ПМТФ, № 2, 1975

УДК 532.54+536.252/421

ВЛИЯНИЕ «СТЕФАНОВСКИХ» ПОТОКОВ ЗАТВЕРДЕВАЮЩЕГО РАСПЛАВА НА ПРОЦЕСС ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ

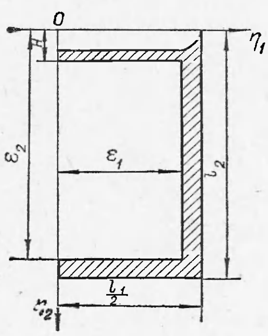
П. Ф. Завгородний, И. Л. Повх, Г. М. Севостьянов

(*Донецк*)

Результаты расчета, представленные графиками, показывают, что в начальный период затвердевания движение расплава полностью определяется усадкой на фронте кристаллизации. Эффект проявляется сильнее при меньших числах Грасгофа и больших числах Стефана. По мере уменьшения скорости затвердевания и температурного градиента в жидкой фазе развивается процесс естественной температурной конвекции. Результаты расчета сравниваются с экспериментом.

Известно, что тепловая конвекция жидкого ядра кристаллизующегося слитка оказывает существенное влияние на процессы формирования макроструктуры слитка. Для определения скоростей конвективного движения расплава авторами работы [1] был проведен ряд экспериментальных исследований, подтвердивших наличие перемешивания жидкого ядра до полной его кристаллизации. Аналогичные результаты дают и теоретические исследования [2, 3], выполненные в предположении одинаковой плотности жидкой и твердой фаз. В реальных условиях плотности жидкого и затвердевающего расплавов различны, поэтому на фронте кристаллизации возникают так называемые «стефановские» потоки, направление которых определяется отношением плотностей двух фаз.

В работе исследуется влияние усадочных явлений на характер тепловой конвекции. Рассматривается прямоугольная область вертикального поперечного сечения с расплавом, начальная температура которого T_0 больше температуры кристаллизации. В момент времени $t > 0$ температура стенок полости скачком понижается до температуры кристаллизации расплава. От холодных границ формируется по квадратичному закону твердая фаза с направлением движения к центру полости. Предполагается, что конвективное движение обладает осевой симметрией относительно вертикальной оси $0\eta_2$, и дальнейшее изучение параметров тепловой конвекции производится в полости, ограниченной верхним, боковым и нижним фронтами затвердевания, и осью симметрии $0\eta_2$ (фиг. 1).



Фиг. 1

Для решения поставленной задачи записывается система уравнений Навье — Стокса, теплопереноса и неразрывности в безразмерном виде:

$$\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial\overline{V}}{\partial\tau} + \left(\overline{V}\nabla\right)\overline{V} = -\nabla\pi + \Delta\overline{V} + \overline{l}_g\mathrm{Gr}\theta; \tag{1}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} + \Pr\left(\bar{\mathbf{V}}\nabla\right)\theta = \Delta\theta; \tag{2}$$

$$\bar{\nabla}\mathbf{V} = 0 \tag{3}$$

с краевыми условиями

$$\begin{gathered}\bar{\mathbf{V}}\big|_{\tau=0} = 0\\ \theta\big|_{\tau=0} = 1;\end{gathered} \tag{4}$$

$$\theta\big|_{\eta_1=\varepsilon_1}\theta\big|_{\eta_2=H} = \theta\big|_{\eta_3=\varepsilon_2} = \frac{d\theta}{d\eta_1}\Big|_{\eta_1=0} = 0; \tag{5}$$

$$V_1\big|_{\eta_1=0} = V_1\big|_{\eta_3=\varepsilon_3} = V_1\big|_{\eta_3=H} = V_2\big|_{\eta_1=\varepsilon_1} = \frac{dV_2}{d\eta_1}\Big|_{\eta_1=0} = 0; \tag{6}$$

$$V_3\big|_{\eta_3=\varepsilon_3} = -\mathrm{St}\varepsilon_3'; \quad V_1\big|_{\eta_1=\varepsilon_1} = -\mathrm{St}\varepsilon_1'; \tag{7}$$

$$V_3\big|_{\eta_3=H} = L_1, \tag{8}$$

где $\varepsilon_i (i=1, 2, \ldots)$ — относительная ширина жидкой зоны; в качестве характерного размера выбрана половина горизонтального размера полости ($l_1/2$); $\tau = t/t_0$ — безразмерное время (число Фруда); характерное время $t_0 = l_1^2/4a$; a — коэффициент температуропроводности; L_1 — скорость опускания верхней корочки; $\mathrm{St} = (\rho_1/\rho_2 - 1)/\Pr$ — критерий Стефана; ρ_1, ρ_2 — плотности твердой и жидкой фаз соответственно; ν — коэффициент кинематической вязкости; $\theta = (T - T_к)/(T_0 - T_к)$ — безразмерная температура; $T_к$ — температура кристаллизации; T_0 — начальная температура; $\Pr = \nu/a$ — число Прандтля; $\mathrm{Cr} = g\beta(T_0 - T_к)l_1^3/8\nu^2$ — число Грасгофа; β — температурный коэффициент объемного расширения; $\pi = p/p_0$ — безразмерное давление; знак $'$ означает производную по времени τ.

В верхней части слитка наряду с формированием твердой корочки образуется усадочная раковина за счет подпитки расплавом бокового и нижнего фронтов затвердевания. Уравнение баланса расходов расплава на твердых границах имеет вид

$$L_1\varepsilon_1 = \left[\mathrm{St}\varepsilon_1'(\varepsilon_3 - H) + \mathrm{St}\varepsilon_3'\varepsilon_1\right]. \tag{9}$$

Разрешая это выражение относительно L_1 и подставляя в (8), получим

$$V_3\big|_{\eta_3=H} = \mathrm{St}\left[\frac{\varepsilon_2 - H}{\varepsilon_1}\varepsilon_1' + \varepsilon_2'\right]. \tag{10}$$

Введем функцию тока ψ, связанную с компонентами скоростей V_1 и V_3 соотношениями

$$V_1 = \frac{\partial\psi}{\partial\eta_2}; \quad V_2 = -\frac{\partial\psi}{\partial\eta_1};$$

вихрь скорости $\bar{\varphi} = \mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{V}}$ и зависящие от времени переменные

$$\zeta_1 = \frac{\eta_1}{\varepsilon_1}; \quad \zeta_3 = \frac{\eta_2 - H}{\varepsilon_2 - H}, \tag{11}$$

отображающие прямоугольную область с подвижными границами на единичную область квадрата. Система уравнений (1) — (3) при этом принимает вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}+\frac{1}{\varepsilon_1}\left[\frac{\mathrm{Pr}}{(\varepsilon_3-H)}\frac{\partial\psi}{\partial\zeta_3}-\zeta_1\varepsilon_1'\right]\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_1}- \tag{12}$$

$$-\frac{1}{(\varepsilon_3-H)}\left[\frac{\mathrm{Pr}}{\varepsilon_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_1}+\zeta_3(\varepsilon_3'-H)+H'\right]\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_3}=\mathrm{Pr}\Delta_1\varphi-\frac{\mathrm{R}}{\varepsilon_1}\frac{\partial\theta}{\partial\zeta_1};$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau}+\frac{1}{\varepsilon_1}\left[\frac{\mathrm{Pr}}{(\varepsilon_2-H)}\frac{\partial\psi}{\partial\zeta_2}-\zeta_1\varepsilon_1'\right]\frac{\partial\theta}{\partial\zeta_1}-\frac{1}{\varepsilon_3-H}\left[\frac{\mathrm{Pr}}{\varepsilon_1}\frac{\partial\psi}{\partial\zeta_1}+ \right. \tag{13}$$

$$\left. +\zeta_3(\varepsilon_3'-H')+H'\right]\frac{\partial\theta}{\partial\zeta_3}=\Delta_1\theta;$$

$$\Delta\psi=-\varphi, \tag{14}$$

где

$$\Delta_1=\frac{1}{\varepsilon_1^2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta_1^2}+\frac{1}{(\varepsilon_3-H)^2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta_3^2}.$$

Для представления системы (12) — (14) в конечно-разностной форме вводятся координатная и временная сетки:

$$\omega_h=\{\zeta_1=ih;\ \zeta_3=mh;\ h=1/I=1/M;\ i=1,\ 2,\ \ldots I;\ m=1,\ 2\ldots M\};$$

$$\tau_n=\left\{\tau=\sum_n n\tau_{\kappa_1}\tau_k=A\frac{h_2}{4};\ 0<A\leqslant 1;\ n=1,2\ldots\right\}.$$

Если использовать метод дробных шагов, то уравнения (12) и (13) после расщепления по осям координат $0\zeta_1$ и $0\zeta_3$ запишутся в виде

$$\frac{\varphi^{\wedge}_{i,m}-\bar{\varphi}}{0,5\tau_k}=\frac{1}{\varepsilon_1}\left[ih\varepsilon_1'+\frac{\mathrm{Pr}}{(\varepsilon_2-H)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\zeta_2}\right)^{-}_{i,m}\right]\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_1}\right)^{\wedge}_{i,m}+ \tag{15}$$

$$+\frac{\mathrm{Pr}}{\varepsilon_1^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)_{i,m}-\frac{\mathrm{R}}{2\varepsilon_1}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\zeta_1}\right)^{-}_{i,m};$$

$$\frac{\varphi^{+}_{i,m}-\varphi^{\wedge}_{i,m}}{\tau_k}=\frac{1}{(\varepsilon_3-H)}\left[mh(\varepsilon_3'-H)+H'+\frac{\mathrm{Pr}}{\varepsilon_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\zeta_1}\right)^{-}\right]\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_3}\right)^{+}+ \tag{16}$$

$$+\frac{\mathrm{Pr}}{(\varepsilon_3-H)^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta_3^2}\right)^{+}_{i,m}-\frac{\mathrm{R}}{2\varepsilon_1}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\zeta_1}\right)^{-}_{i,m};$$

$$\frac{\theta^{\wedge}_{i,m}-\theta^{-}_{i,m}}{0,5\tau_k}=\frac{1}{\varepsilon_1}\left[ih\varepsilon_1'+\frac{\mathrm{Pr}}{(\varepsilon_3-H)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\zeta_3}\right)^{+}_{i,m}\right]\left(\frac{\partial\theta}{\partial\zeta_1}\right)^{\wedge}_{i,m}+\frac{1}{\varepsilon_1^2}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial\zeta_1^2}\right)^{\wedge}; \tag{17}$$

$$\frac{\theta^{+}_{i,m}-\theta^{\wedge}}{\tau_k}=\frac{1}{(\varepsilon_3-H)}\left[mh(\varepsilon_3'-H')+H'+\frac{\mathrm{Pr}}{\varepsilon_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\zeta_1}\right)^{+}_{i,m}\right]\times \tag{18}$$

$$\times\left(\frac{\partial\theta}{\partial\zeta_3}\right)^{+}+\frac{1}{(\varepsilon_3-H)^2}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial\zeta_3^2}\right).$$

Уравнение Пуассона в удобном для итерации виде запишется

$$\psi^{s+1}_{i,m}=\psi^{s}_{i,m}+\omega_0\left\{\frac{1}{2[\varepsilon_1^2+(\varepsilon_2-H)^2]}\left[(\varepsilon_3-H)^2\left(\psi^{s+1}_{i-1,m}+\right.\right.\right. \tag{19}$$

$$\left.\left.\left.+\psi^{3}_{i+1,m}\right)+\varepsilon_1^2\left(\psi^{s+1}_{i,m-1}+\psi^{s}_{i,m+1}\right)+\varepsilon_1^2(\varepsilon_3-H)^2h^2\varphi_{i,m}\right]-\psi^{s}_{i,m}\right\},$$

где ω_0 — параметр релаксации, определяемый выражением $\omega_0=2/(1+$ $+\sin\pi h)$; S — номер итерации.

В уравнениях (15) — (18) обозначения —, $\wedge$, $+$ соответствуют n-му; $(n+1/2)$-му; $(n+1)$-му временным слоям.

Из условия (4) получаем

$$\psi|_{\tau=a}=\varphi|_{\tau=a}=0;\quad \theta_{\tau=a}=1. \tag{20}$$

Разлагая функцию температуры в окрестности границы $\zeta_1=0$ с учетом условия (5), а также уравнения (17), получим

$$\theta^{\wedge}_{0,m}=\frac{2\tau_k}{h^2+2\tau_k}\left[\theta^{\wedge}_{i,m}+\frac{h^2}{2\tau_k}\,\theta^{-}_{0,m}\right]. \tag{21}$$

Остальные граничные условия температуры выполняются точно. Для определения граничного условия для функции тока при $\zeta_3=0$ выражение (10) записывается в виде

$$-\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\bigg|_{\zeta_2=0}=\mathrm{St}\left[\frac{\varepsilon_3-H}{\varepsilon_1}\,\varepsilon_1^{\boldsymbol{\cdot}}+\varepsilon_3^1\right].$$

Интегрируя полученное выражение вдоль координаты ζ_1 и полагая постоянную интегрирования равной нулю, получаем

$$\psi_{i,0}=-\mathrm{St}\left[\frac{\varepsilon_3-H}{\varepsilon_1}\,\varepsilon^{\boldsymbol{\cdot}}+\varepsilon_2'\right]\varepsilon_1 ih. \tag{22}$$

Аналогичным образом определяются функции тока на остальных границах:

$$\psi_{0\,m}=0;\ \psi_{i,M}=\mathrm{St}\,\varepsilon_3' ih; \tag{23}$$

$$\psi_{I,m}=-\mathrm{St}\,\varepsilon_1'(\varepsilon_3-H)mh. \tag{24}$$

Граничные условия для вихря скорости φ получены путем разложения функции тока на соответствующих границах с использованием условий (6), (22) — (24) и уравнения Пуассона (14):

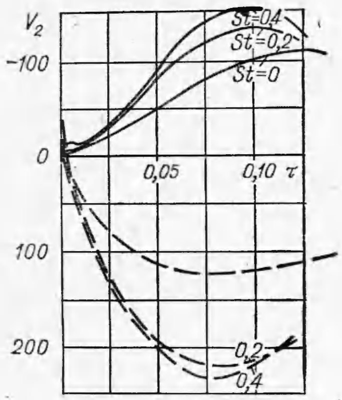
$$\varphi_{0,m}=0;\ \varphi_{i,n}=\frac{2}{h^2}(\mathrm{St}\,\varepsilon_3'\varepsilon_1 ih-\psi_{i,M-1}); \tag{25}$$

$$\varphi_{i,0}=-\frac{2}{h^2}\left\{\left[\mathrm{St}\left(\frac{\varepsilon_3-H}{\varepsilon_1}\varepsilon_1'+\varepsilon_2'\right)\right]\varepsilon_1 i+\psi_{i,1}\right\}; \tag{26}$$

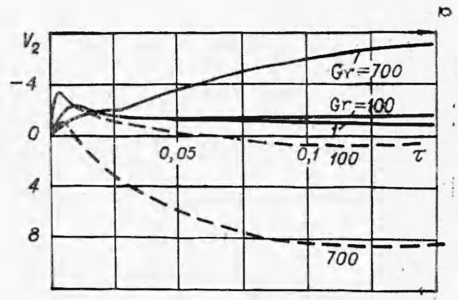
$$\varphi_{I,m}=-\frac{2}{h^2}[\mathrm{St}\,\varepsilon_1'(\varepsilon_3-H)mh+\psi_{I-1,m}]. \tag{27}$$

Таким образом, задача (15) — (19) с краевыми условиями (20) — (27) сформулирована в конечно-разностном виде. Для численной ее реализации на ЭЦВМ «Днепр-21» был выбран интегро-интерполяционный метод, разработанный в [4]. В соответствии с этой же работой были определены прогоночные формулы и коэффициенты к ним. Для исследования выбрана полость с относительной высотой $l_2=4$. Число Прандтля во всех случаях оставалось постоянным, равным 0,224.

Как показывают результаты расчета, представленные на фиг. 2 (сплошные линии — восходящие потоки, штриховые — нисходящие), развитие тепловой конвекции во времени условно можно разбить на три стадии. В интервале чисел $0<\tau\leqslant\tau_1$ около фронта затвердевания наблюдается движение расплава в верхнюю часть полости. Длительность этой стадии, а также максимальные значения скоростей в этом интервале



Фиг. 2

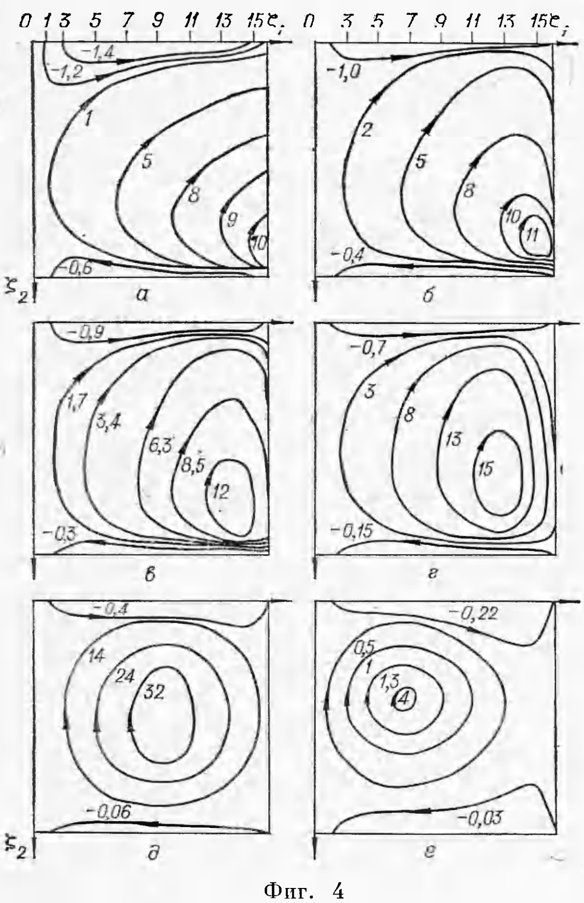


Фиг. 3

существенно зависят от значений чисел St, характеризующих степень усадки твердой фазы. При отсутствии усадки в жидкой области подобных особенностей не возникает (фиг. 2, кривая 0).

При уменьшении скорости роста твердой корочки в жидкой части слитка под действием температурного градиента получает развитие вторая стадия — стадия естественной температурной конвекции. В интервале чисел Фурье $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$ происходит разгон конвективного движения, при этом в конце промежутка достигается максимальная скорость. Как показывают результаты расчета, увеличение усадки твердой фазы вызывает возрастание интенсивности перемешивания расплава при одновременном сокращении стадии разгона.

Третья стадия процесса ($\tau > \tau_2$) характеризуется уменьшением интенсивности перемешивания расплава по мере уменьшения его температуры и переходом в режим «ползущего» течения.



Фиг. 4

Фиг. 5

Влияние чисел Грасгофа на процесс тепловой конвекции иллюстрирует фиг. 3 ($St=0{,}2$; сплошные линии — восходящие потоки; штриховые — нисходящие), откуда видно, что при малых числах Грасгофа ($Gr=1$) движение расплава определяется лишь усадочными явлениями на границах твердой фазы. С ростом числа Грасгофа сила конвективного движения ($Gr\theta$) становится определяющей процесс развития конвективного движения. Возрастание интенсивности тепловой конвекции сопровождается изменением длительности всех стадий.

Для понимания гидродинамических процессов, возникающих в кристаллизующемся жидком ядре, построены расчетные изолинии функции тока, анализ которых позволяет проследить динамику развития тепловой конвекции (фиг. 4, $St=0{,}5$; *а, б, в, г, д, е* для $\tau=0{,}03$; 0,06; 0,02; 0,01; 0,09; 0,19 соответственно).

Характерной особенностью рассматриваемых случаев является наличие в жидкой области трех самостоятельных зон, замкнутых на границах твердой фазы в начальный момент времени. В последующие моменты времени (см. фиг. 4, *б*) в нижнем углу полости начинает формироваться вихрь скорости, который «отмывается» в дальнейшем от границы опускающимся у фронта затвердевания расплавом (см. фиг. 4, *в*, *г*). Симметричное расположение вихря (см. фиг. 4, *д*) соответствует на фиг. 2 максимальному значению скорости. По мере опускания охлажденных слоев расплава в донную часть полости происходит смещение вихря скорости в область более высоких температур.

На фиг. 5 приведено сопоставление экспериментальной (штриховая линия) и расчетной (сплошная линия) компонент скорости V_2 при $Gr=0{,}5\cdot 10^5$; $Pr=8{,}8$; $St=0{,}1$. Эксперимент проведен на нафталине по методике работы [5]. Начальная стадия тепловой конвекции регистрировалась непрерывной киносъемкой. Относительная высота изложницы составляла $l_3=4$ при характерном размере $l_1/2=30$ мм.

Анализ показывает, что как расчет, так и эксперимент дают качественно одинаковую картину. Количественные различия следует отнести за счет трехмерности экспериментальной изложницы и большого количества растворенного в нафталине газа, который, выделяясь из затвердевшей фазы, способствовал формированию в жидкой фазе обратного движения.

Таким образом, «стефановские» потоки на границе твердожидкой фазы оказывают существенное влияние на интенсивность конвективного движения. Эффект тем заметнее, чем меньше числа Грасгофа и больше величина усадки.

Поступила 15 V 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ефимов В. А. и др.** В кн.: Проблемы стального слитка. Вып. 4. М., «Металлургия», 1969. с. 93—95.
2. **Самойлович Ю. А.** «Изв. АН СССР. Металлы», 1969, № 2, с. 84—92.
3. **Иодко Э. А., Завгородний П. Ф., Севостьянов Г. М.** «Изв. АН СССР. Теплофиз. высоких темп.», 1971, № 5, т. 9, с. 975—979.
4. **Самарский А. А.**, Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971.
5. **Иодко Э. А. и др.** «Изв. АН СССР. Металлы», 1971, № 2, с. 102—108.