ПМТФ, № 2, 1966

ОБ ЭЛЕКТРОННОЙ ПРОВОДИМОСТИ ТЕРМОИОНИЗИРОВАННОГО ГАЗА В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В. Н. Кунин, Н. М. Писарев

(Челябинск)

Известно, что носители тока в термоионизированном газе разнородны по своему составу, но основной вклад в проводимость газа вносят электроны [1], так как их подвижность несравненно больше подвижности других токонесущих частиц. Поэтому нас будет интересовать только электронная проводимость. Если газ находится под высоким давлением в слабом электрическом поле, то при оценке его электропроводности классическим путем обычно используются те же соображения, которые применил Друдэ в теории проводимости металлов. Впоследствии формула Друдэ — Лоренца для удельной электропроводности была усовершенствована Чепменом и Каулингом путем введения коэффициента, учитывающего скорость убывания сил взаимодействия частиц с расстоянием [2]. Для кулоновского взаимодействия электронов этот коэффициент принимает значение 0.532 вместо 0.500 по сравнению с формулой Друдэ — Лоренца.

При высоких давлениях и малых напряженностях электрического поля скорость дрейфа электронов в поле ничтожно мала по сравнению со средней скоростью беспорядочного движения, поэтому логично допустить, что время свободного пробега электронов не зависит от скорости дрейфа, а это допущение в конечном счете ведет к выводу, что к газам с большим давлением в очень слабых полях применим закон Ома.

Нельзя не видеть, однако, что даже для указанных условий заключение о справедливости закона Ома является приближением, которое будет тем более грубым, чем ниже давление газа и чем больше напряженность поля.

Ниже электронная проводимость газа определяется также методом Друдэ, однако с тем уточнением, что при определении времени пробега электронов принимается во внимание скорость дрейфа этих частиц в поле.

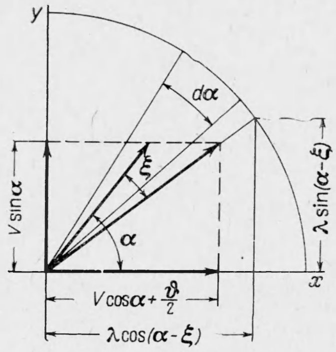
Пусть известна концентрация свободных электронов, известно среднее эффективное сечение их соударений, а следовательно — и средняя длина свободного пробега. Пусть распределение величин в газе пространственно изотропно и не зависит от времени. Полагая заданным также и макроскопические параметры состояния газа, найдем удельную проводимость σ в соответствии с ее определением

$$\sigma = en_e v \,/\, E \tag{1}$$

Здесь e — заряд электрона, n_e — концентрация свободных электронов, v — средняя скорость дрейфа за время свободного пробега на отрезке λ.

Так как в правой части (1) все величины, кроме v, полагаются заданными, то, следовательно, поиски выражения σ сводятся к определению средней скорости дрейфа электронов. Строго эту задачу можно решить, если известна функция распределения скоростей электронов газа, находящегося во внешнем поле. Однако эта функция найдена только в первом приближении [1], которое годно лишь для слабых полей; ниже будет показано, что для определения σ нет необходимости знать функцию распределения, а достаточно использовать лишь кинематические соотношения.

Окружим некоторую частицу газа (фигура) сферой радиуса λ. Внутри этой сферы, очевидно, окажется $N = {}^4/_3\pi\lambda^3 n_e$ свободных электронов. Дрейфуя под действием поля (на фиг. 1 оно параллельно оси x), электроны будут рассеиваться на частице. После рассеяния электроны будут двигаться в поле, вообще говоря, по криволинейным траекториям. Следует иметь в виду, что основным видом столкновений являются электрон-ионные и электрон-молекулярные взаимодействия. Молекулы и ионы имеют большую массу, поэтому их подвижность в не очень сильных полях практически не зависит от напряженности поля. В силу этого можно считать, что свободное движение электронов, с учетом оговорки об изотропности газа, будет ограничено поверхностью сферической ячейки как раз радиусом λ. Если ограничиться случаем несильных полей, то можно предположить, что интенсивность рассеяния электронов по всем направлениям почти одинакова.



Фиг. 1

Рассмотрим движение электронов в элементе сферического сектора с углом раствора α. Так как объем элемента сектора равен $^2/_3\pi\lambda^3 \sin\alpha d\alpha$, а интенсивность рассеяния в наших условиях не зависит от угла, следовательно, в элементе движется $dN_\alpha = n_0{}^2/_3\pi\lambda^3 \sin\alpha d\alpha$ электронов. Действие поля на них кинематически скажется в том, что за время свободного пробега на отрезке λ к составляющей средней скорости беспорядочного движения, параллельной полю v_x, прибавится скорость дрейфа v_α. Геометрически же эффект этого действия сведется к повороту вокруг центра рассеяния средней скорости V на некоторый угол (фигура). Найдем скорость дрейфа v_α. Для этого запишем

$$\begin{aligned} \lambda \sin(\alpha - \xi) &= V \sin\alpha\, \tau_\alpha \\ \lambda \cos(\alpha - \xi) &= (V\cos\alpha + {}^1/_2 v_\alpha)\tau \end{aligned} \qquad \left(\tau_\alpha = v_\alpha \frac{m}{eE}\right) \tag{2}$$

Здесь $\lambda \sin(\alpha - \xi)$ — нормальная к полю составляющая свободного пути электронов внутри рассматриваемого элемента, $\lambda\cos(\alpha - \xi)$ — составляющая пути, параллельная полю, τ_α — время пробега электронов, выраженное через скорость дрейфа и ускорение, испытываемое ими в поле.

Уравнения (2) могут быть упрощены. Дело в том, что в слабых полях в отсутствие вакуумных явлений скорость дрейфа на несколько порядков меньше средней тепловой. Для оценки скорости дрейфа можно, очевидно, использовать выражение $\sqrt{\lambda eE / m}$. Если в этом выражении λ положить 10^{-5} *см*, что соответствует давлению $p = 1$ *мм* (в практических условиях p обычно выше), а напряженность E положить равной 1 *в / см* (практически часто встречающееся значение), то v_α по порядку будет равна 10^5 *см / сек*, а средняя скорость хаотического движения электронов в этих условиях примерно 10^8 *см / сек*, т. е. на два — три порядка выше, чем скорость дрейфа. При больших давлениях p и меньших E разница между V и v_α, очевидно, еще больше. Если это учесть, то, как видно из фигуры, абсолютное значение угла ξ следует считать малым, поэтому система уравнений (2) преобразуется к более простому виду

$$\begin{aligned} \lambda(\sin\alpha - \xi\cos\alpha) &= V\sin\alpha\,\tau_\alpha \\ \lambda(\cos\alpha + \xi\sin\alpha) &= (V\cos\alpha + {}^1/_2 v_\alpha)\tau_\alpha \end{aligned} \qquad \left(\tau_\alpha = \frac{mv_\alpha}{eE}\right) \tag{3}$$

Решая эти уравнения относительно v_α, находим

$$v_\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}\left(V^2 + \frac{2e\lambda E}{m}\cos\alpha\right)^{1/2} - V \tag{4}$$

Теперь определим среднюю скорость дрейфа электронов внутри сферы. Она равна

$$v = \frac{1}{2N}\int_0^{\pi} v_\alpha \, dN_\alpha \tag{5}$$

Подставляя сюда dN_α и v_α и делая замену переменных $\cos\alpha = x$, получаем табличный интеграл.

Пользуясь [3], находим

$$v = 2\frac{E^*}{\sqrt{V^2+2E^*}+\sqrt{V^2-2E^*}} + \frac{V}{4}\ln\frac{2V-(\sqrt{V^2+2E^*}-\sqrt{V^2-2E^*})}{2V+(\sqrt{V^2+2E^*}-\sqrt{V^2-2E^*})}$$

$$\left(E^* = \frac{e\lambda E}{m}\right) \tag{6}$$

Наконец, подставляя (6) в (1), получим уточненную классическую формулу электропроводности

$$\sigma = 2\frac{n_e e^2\lambda}{m}\frac{1}{\sqrt{V^2+2E^*}+\sqrt{V^2-2E^*}} + \frac{n_e eV}{4E}\ln\frac{2V-(\sqrt{V^2+2E^*}-\sqrt{V^2-2E^*})}{2V+(\sqrt{V^2+2E^*}-\sqrt{V^2-2E^*})} \tag{7}$$

Как видно, σ — сложная функция напряженности поля E и давления газа p, поскольку $\lambda = \lambda_0 p$, более того, степень сложности еще больше возрастает, если учесть, что n_e, λ и V в сильных полях также зависят от E. Для более конкретной оценки σ, согласно (7), ограничимся двумя физически простыми ситуациями.

Пусть средняя энергия электронов, приобретенная ими в поле на отрезке λ, много меньше kT (очень слабое поле), тогда n_e и λ можно считать постоянными, а скорость беспорядочного движения электронов, в соответствии с законом Максвелла, будет лишь функцией температуры

$$V = \left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{1/2} \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7) и устремляя в (7) E к нулю, получим, как и следовало ожидать, формулу Друдэ-Лоренца

$$\sigma = \frac{1}{2}\frac{n_e e^2\lambda}{m\sqrt{8kT/\pi m}} \tag{9}$$

Важным является также случай, когда средняя энергия электронов в поле много больше kT. Например, для газа при температуре T порядка $1000°$ и давлении p порядка 1 *мм* рт. ст. это условие будет выполнено в поле с напряженностью E до 1 *в / см*. Как показал Дрювестейн [1], в этом случае средняя скорость беспорядочного движения электронов определяется выражением

$$V = \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{2e\lambda_0 E}{mp}\right)^{1/2}; \qquad \varkappa = \left(\frac{4m}{M}\right)^{1/4} \tag{10}$$

Здесь λ_0 — длина свободного пробега электронов при единичном давлении, например при $p = 1$ *мм*; M — масса ионов или молекул.

Таким образом, в указанных полях скорость беспорядочного движения электронов — функция поля. Если для приведенных выше условий вычислить скорость беспорядочного движения по Дрювестейну, то она оказывается на порядок больше скорости дрейфа электронов. Таким образом, условие малости угла ξ остается в силе. В то же время в поле с напряженностью порядка 1 *в / см* еще можно пренебречь неупругими соударениями, и поэтому n_e и λ_0, как и в первом случае, можно считать не зависящими от поля. Учтя это, после подстановки (10) в (17) получим (11)

$$p\sigma = \left(\frac{2n_e e^3 \lambda_0}{m}\right)^{1/2} \left(\frac{p}{E}\right)^{1/2} \left[\frac{\varkappa}{\sqrt{1+\varkappa^2}+\sqrt{1-\varkappa^2}} + \frac{1}{4}\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{2-\sqrt{1+\varkappa^2}+\sqrt{1-\varkappa^2}}{2+\sqrt{1+\varkappa^2}-\sqrt{1-\varkappa^2}}\right]$$

Так как $\varkappa$ по порядку $^1/_6$ или меньше, то выражение (11) можно упростить. Для этого разложим сомножитель в квадратных скобках по степеням $\varkappa$ и отбросим члены выше первого порядка

$$p\sigma = \frac{1}{4}\varkappa \left(\frac{2n_e^2 e^2 \lambda_0}{m}\right)^{1/2} \left(\frac{p}{E}\right)^{1/2} \qquad (12)$$

	E/p	u/p	$up(E/p)\pi$
Ne	0.20	2.80	1.26
	0.25	2.50	1.25
	0.30	2.30	1.26
	0.48	2.00	1.36
	0.65	1.70	1.37
	1.00	1.40	1.40
He	0.48	1.43	0.99
	0.65	1.25	1.01
	0.92	1.00	0.96
	1.00	0.94	0.94
Ar	0.10	2.40	0.77
	0.14	2.00	0.76
	0.20	1.60	0.72
	0.30	1.10	0.60

Найденное выражение совпадает с выражением электронной проводимости газов, полученным статистическим методом [1]. Как видно из (12), изменение электропроводности существенно зависит от параметра p / E. Характер изменения таков, что произведение $p\sigma\sqrt{E/p}$ в рассматриваемых физических условиях должно быть постоянным.

В таблице приводятся значения u / p [*см*^{2}*мм* / *в сек*]. Здесь u — подвижность свободных электронов в газе, эта величина в рассматриваемом случае пропорциональна σ; E / p [*в* / (*см мм* Hg)] и произведение $\pi = pu\,(E / p)^{1/2}$ для Ne, He и Ar. Все значения вычислены нами по графическим данным, приводимым в справочнике Эберта [4].

Из таблицы следует, что до известного предела аргумента E / p, действительно, $p\sigma\sqrt{E/p}$ близко к постоянной. Сравним полученный результат с формулой Друдэ — Лоренца. Формула Друдэ — Лоренца предполагает независимость подвижности носителей тока от напряженности поля. Подвижность пропорциональна λ или $1 / p$. Таким образом, произведение up не должно зависеть от E / p. Из таблицы видно, однако, что с ростом E / p величина up непрерывно уменьшается. Так, для аргона при увеличении E/ p от 0.1 до 0.3 произведение up уменьшается более чем в два раза. Таким образом, формула (7) описывает экспериментальные данные значительно лучше, чем формула Друдэ — Лоренца.

При больших E / p соотношение (12) нарушается. Физически это понятно. При больших значениях параметра E / p становятся существенными неупругие соударения, вследствие чего не только скорость электронов, но и концентрация их, а также и длина свободного пробега зависят от поля.

В заключение еще раз подчеркнем, что при выполнении некоторых условий уравнение (7) годится для оценки электронной проводимости газов в сильных полях. Если поле стационарно, газ изотропен и относительно далек от состояния молекулярного вакуума, то основная использованная предпосылка о том, что средняя скорость дрейфа меньше средней скорости беспорядочного движения, сохраняет силу и в этом случае. Если это так, то, определяя электропроводность с точностью до неизвестных функций n_e, λ и V, получим выражение (7).

Поступила 28 IX 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Грановский В. А. Электрический ток в газе, т. 1. Гостехиздат, 1952.
2. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. Изд. иностр. лит., 1960.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1963.
4. Эберт Г. Краткий справочник по физике. Физматгиз, 1963.