

КОНСТАНТА СКОРОСТИ ИОНИЗАЦИИ ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ. БОЛЬШИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ

Ю. П. Денисов, Н. М. Кузнецов

(Москва)

Функция распределения электронов и константа скорости ионизации атомов электронным ударом вычислены применительно к условиям, характерным для ударной волны, а именно распределение электронов по энергиям и константа скорости ионизации определяются как функции температуры тяжелых частиц. Энергетическая зависимость эффективного сечения возбуждения атома электронным ударом предполагается линейной. При решении задачи использованы уравнения типа Фоккера — Планка и определена область температур и концентраций, в которой отклонение распределения от максвелловского приводит к существенному изменению константы скорости ионизации.

Суммарная скорость ионизации электронным ударом, включающая в себя многоступенчатые переходы через возбужденные состояния атома, при высоких температурах пропорциональна количеству электронов, энергия которых достаточна для возбуждения первого уровня атома. В процессе такого возбуждения электрон теряет энергию $\Delta\epsilon \geq E_1$ (E_1 — энергия первого возбужденного состояния, отсчитанная от основного уровня). Если средняя энергия электрона в несколько раз меньше $\Delta\epsilon$, то в подавляющем большинстве случаев после столкновения, которое заканчивается возбуждением атома, электрон уже не обладает запасом энергии, достаточным для повторения подобного столкновения. Таким образом ионизационные столкновения приводят к уменьшению плотности электронов n ($\epsilon > E_1$), способных возбудить атом, т. е. число n ($\epsilon > E_1$), определяющее скорость ионизации, само зависит от этой скорости.

Задача определения константы скорости ионизации сводится к вычислению функции распределения электронов. Эта функция распределения в течение процесса ионизации в ударной волне отличается от равновесной и определяется балансом ухода электронов из области высоких энергий при неупругих столкновениях и восполнения этих потерь за счет упругих столкновений электронов с электронами, атомами и ионами.

Простой приближенный метод вычисления константы скорости ионизации газа в ударной волне развит Петчеком и Байроном [1]. Согласно [1] функция распределения электронов при всех энергиях полагается максвелловской и все ее отличие от равновесной заключается в том, что температура электронов T_e в процессе ионизации не равна температуре тяжелых частиц T . Температура электронов вычисляется при помощи релаксационного уравнения Л. Д. Ландау [2] с учетом затрат энергии электронов на ионизацию. Температура T_e даже при сильном отклонении состава газа от равновесного по порядку величины не отличается от T ($T_e < T$), но константа скорости ионизации, экспоненциально зависящая от температуры электронов, намного меньше своего равновесного значения, соответствующего равенству температур $T_e = T$. В дальнейшем вопрос об отклонении функции распределения электронов от равновесной за счет тех или иных неупругих процессов и о соответствующем изменении константы скорости ионизации или возбуждения атомов рассматривался в ряде работ (см., например, [3–7]). Данная работа является непосредственным продолжением исследования ионизации одноатомного газа в ударной волне, начатого Петчеком и Байроном. Отличие постановки задачи от [4] состоит в том, что функция распределения электронов не предполагается максвелловской.

1. Постановка задачи. Рассмотрим оптически плотный газ с постоянной температурой атомов T вдали от ионизационного равновесия, где комбинацией можно пренебречь. Температуру будем считать достаточно высокой для того, чтобы процесс ионизации не имел диффузионного характера и определялся кинетикой перехода атома из основного в первое возбужденное состояние. Прямыми переходами из основного состояния

на более высокие уровни пренебрегаем вследствие малости соответствующих сечений. Рассматриваемая схема ионизационного процесса реализуется в том случае, когда устанавливающаяся при ионизации квазистационарная заселенность первого возбужденного состояния n_1 много меньше своего равновесного¹ значения n_1^* .

Искомая граница температур, выше которой

$$n_1 \ll n_1^* \quad (1.1)$$

определяется из баланса электронов, находящихся на первом возбужденном уровне в квазистационарном приближении

$$dn_1/dt = 0 \quad (1.2)$$

Используя (1.2), можно показать, что заселенность n_1 при условии (1.1) определяется соотношением

$$n_1 = n_1^* \left(\frac{\sigma_{1e}}{\sigma_{10}} \exp \frac{E_1 - E}{T_e} + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{10}} \exp \frac{E_1 - E_2}{T_e} \right)^{-1}$$

где σ_{1e} — сечение перехода из первого возбужденного состояния в непрерывный спектр, σ_{ik} — сечение перехода между i и k связанными состояниями. Следовательно для выполнения (1.1), во всяком случае, достаточно потребовать

$$\exp(-I_1/T_e)(\sigma_{1e} + \sigma_{12})/\sigma_{10} \gg 1$$

где I_1 — потенциал ионизации из первого возбужденного состояния атома. Типичные значения отношения $(\sigma_{1e} + \sigma_{12})/\sigma_{10}$ по порядку величины [8-10] равны 10^2 . Отсюда для температурной границы получаем $5I_e > I_1$. Для атомов, у которых, как и в водороде, отношение потенциалов ионизации из первого и из основного состояний $I_1/I = 1/4$, неравенство можно записать в виде

$$20T_e > I \quad (1.3)$$

Кинетическое уравнение для функции распределения электронов $f(t, \epsilon)$ имеет вид

$$\dot{f} = I_{ee} + I_{ea} + I_{ei} + I_i \quad (1.4)$$

В правой части уравнения (1.4) символами I_{ee} , I_{ea} и I_{ei} обозначены соответствующие интегралы столкновений электронов с электронами, атомами и ионами. Слагаемое I_i учитывает ионизацию.

Будем предполагать, что время релаксации энергии при электрон-электронном обмене энергией существенно меньше, чем при электрон-атомных упругих столкновениях. Это налагает определенное условие на концентрацию электронов $c = n_e/n_a$ (n_e и n_a — числа электронов и атомов в единице объема). Если обозначить через $\tau_{ee}(\epsilon)$ и $\tau_{ea}(\epsilon)$ соответственно электрон-электронное и электрон-атомное время релаксации, то условие, налагаемое на концентрацию, запишется в виде

$$\tau_{ee} \ll \tau_{ea} \quad (1.5)$$

Время релаксации

$$\tau(\epsilon) \sim T^2 / \langle \partial (\Delta E)^2 / \partial t \rangle$$

где $\langle \partial (\Delta E)^2 / \partial t \rangle$ — средний квадрат изменения энергии электрона в единицу времени для данного типа столкновений в термодинамически равно-

¹ Имеется в виду равновесие по отношению к основному состоянию атома.

весной среде. Для электрон-электронных столкновений

$$\langle \partial (\Delta E_{ee})^2 / \partial t \rangle = 2^{3/2} \pi e^4 Q n_e T_e / (m \varepsilon)^{1/2} \quad (1.6)$$

где m — масса электрона, а Q — кулоновский логарифм. Для электрон-атомных упругих столкновений с сечением рассеяния σ_{ea} имеем

$$\langle \partial (\Delta E_{ea})^2 / \partial t \rangle = 2^{3/2} M^{-1} m^{1/2} \sigma_{ea} n_a T \varepsilon^{3/2}$$

где M — масса атома. Условие (1.5) с учетом того обстоятельства, что $e^4 / \sigma_{ea} \sim I^2$, для области энергий $\varepsilon > E_1$ дает

$$c \gg m \varepsilon^2 / M I^2 Q \quad (1.7)$$

Кроме величин τ_{ee} и τ_{ea} в задаче есть еще один масштаб времени — характерное время ионизационной релаксации $\tau_i \sim (K n_a)^{-1}$, где K — константа скорости ионизации. Наибольший практический интерес представляет случай, когда τ_i удовлетворяет неравенству

$$\tau_i \gg \tau_{ee} \quad (1.8)$$

Соотношения (1.5) и (1.8) позволяют значительно упростить кинетическое уравнение (1.4). В интервале $0 < \varepsilon < E_1$ нет неупругих столкновений электронов с невозбужденными атомами. Поэтому за время порядка τ_{ee} в этом интервале энергий устанавливается распределение Максвелла с температурой T_e , которое несколько нарушено вследствие столкновений с тяжелыми частицами, диффузионного потока энергии электронов в интервал $\varepsilon > E_1$, где есть большие потери на возбуждение, и вследствие неупругих столкновений с атомами, находящимися в высших возбужденных состояниях. Каждый из этих процессов лишь незначительно нарушает распределение Максвелла электронов.

Первый мало эффективен вследствие неравенства (1.5) и

$$\tau_{ee} \sim \tau_{ei} m / M \ll \tau_{ei} \quad (1.9)$$

Здесь τ_{ei} — время релаксации при упругих столкновениях электронов с ионами.

Второй источник нарушения распределения Максвелла мал, потому что в интервале $\varepsilon > E_1$ (в рассматриваемом диапазоне температур) в термодинамически равновесном газе находится экспоненциально малая часть общего числа электронов и, следовательно, экспоненциально мал поток энергии в отсутствие равновесия.

Третий процесс несуществен, потому что число атомов, находящихся в высших возбужденных состояниях, экспоненциально мало по сравнению с их общим числом. Таким образом, в интервале $\varepsilon < E_1$ имеется распределение Максвелла, и задача сводится к вычислению температуры электронов, которая может быть найдена из релаксационного уравнения для двухтемпературного газа с потерями энергии на ионизацию.

Можно показать, что для выполнения неравенства (1.8) температура T_e должна быть не слишком высокой, а именно $T_e < I \alpha^{-1}$, где $\alpha \sim 5 \div 6$. Из дальнейшего будет видно, что это условие, ограничивающее температуру сверху, для квазистационарной стадии ионизации в ударной волне всегда выполняется.

Для того чтобы написать релаксационное уравнение в замкнутом виде, необходимо сначала найти функцию распределения электронов при высоких энергиях $\varepsilon > E_1$, от которой зависит скорость ионизации. Отклонение функции распределения электронов от максвелловской в интервале

$\varepsilon > E_1$ значительно больше, чем при малых энергиях. Это связано с тем, что при $\varepsilon > E_1$ имеется интенсивный сток энергии. Сечения возбуждения атомов электронами близки к газокинетическим и при каждом таком столкновении теряется энергия $\Delta\varepsilon \gg T_e$. Механизм, компенсирующий эти потери — упругие столкновения электронов с электронами и тяжелыми частицами, — характеризуется эффективными сечениями, тоже близкими к газокинетическим для электрон-электронных столкновений и в $\sim m/M$ раз меньшими для столкновений с тяжелыми частицами. Кроме того, эффективные кулоновские сечения при $\varepsilon > E_1$ значительно меньше, чем при $\varepsilon \sim T_e$.

Вследствие сильного нарушения распределения Максвелла электронов при $\varepsilon > E_1$ интегралы столкновений I_{ee} , I_{ea} и I_{ei} относятся друг к другу обратно пропорционально соответствующим временам релаксации. Следовательно, в соответствии с (1.5) и (1.9) интегралами столкновений с тяжелыми частицами при энергиях $\varepsilon > E_1$ можно пренебречь.

Восстановление равновесия в интервале $\varepsilon > E_1$ происходит главным образом путем столкновений с электронами, имеющими энергию $\varepsilon < E_1$ (таких электронов подавляющее количество), распределенных по Максвеллу и характеризующихся температурой T_e . Это значит, что восстановление равновесной функции распределения можно рассматривать как релаксацию в среде, имеющей температуру T_e . Интеграл столкновений I_{ee} можно представить в виде дифференциального соотношения фоккер-планковского типа, разлагая функцию распределения по величине передаваемой энергии при столкновении. Такая операция законна, поскольку все разложение умножается на сечение Резерфорда, имеющее острый максимум в области малых углов, которые как раз соответствуют малым передачам энергии. Учитывая все сказанное, можно представить (1.4) в виде уравнения типа Фоккера — Планка с источником

$$\dot{f} = \frac{1}{\Phi(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\frac{\Phi(\varepsilon)}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} (\Delta E_{ee})^2 \right\rangle \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} + \frac{f}{T_e} \right) \right] - \sigma_i(\varepsilon) n_a \left(\frac{2\varepsilon}{m} \right)^{1/2} f \quad (1.10)$$

Здесь $\langle \partial (\Delta E_{ee}) / \partial t \rangle$ определено формулой (1.6), плотность уровней $\Phi(\varepsilon) = 4\pi m^{-3/2} (2\varepsilon)^{1/2}$, σ_i — сечение возбуждения атома из основного состояния в первое, которое интерполируется линейной функцией от энергии [11, 12]

$$\sigma_i(\varepsilon) = \sigma \theta(\varepsilon - E_1)(\varepsilon - E_1)/E_1$$

Здесь $\theta(x)$ — функция Хэвисайда, σ зависит от конкретного вида атомов. Для большинства элементов $\sigma \sim 10^{-16} \text{ см}^2$.

Уравнение (1.10) применительно к рассматриваемой задаче допускает дальнейшее упрощение. Введем функцию распределения, нормированную на один электрон $f = n_e f_1$. Тогда левая часть уравнения (1.10) запишется в виде

$$\dot{f} = f_1 \dot{n}_e + f_1 n_e^*$$

Согласно определению константы скорости ионизации K вдали от ионизационного равновесия, где можно не учитывать процесс рекомбинации, имеем

$$n_e^* = K n_e n_a \quad (1.11)$$

Константа скорости ионизации связана с f_1 следующим образом:

$$K = \int_{E_1}^{\infty} \sigma_i \left(\frac{2\varepsilon}{m} \right)^{1/2} f_1 \Phi d\varepsilon \quad (1.12)$$

Сравнивая величину $f_1 n_e$ с последним членом в правой части уравнения (1.10) и учитывая, что в рассматриваемом температурном диапазоне имеет место неравенство

$$\int_{E_1}^{\infty} f_1(\varepsilon) \varphi(\varepsilon) d\varepsilon \ll 1$$

непосредственно получаем

$$K n_e n_a f_1 \ll \sigma_i(\varepsilon) n_e n_a (2\varepsilon/m)^{1/2} f_1$$

для всех $\varepsilon > E_1$ (кроме очень узкого интервала энергии вблизи порога возбуждения). Поэтому слагаемое $f_1 n_e$ в кинетическом уравнении (1.10) может быть опущено. Оставшееся в левой части (1.10) слагаемое $f_1 n_e$ обращается за время τ_{ee} в нуль, и весь дальнейший процесс ионизации происходит в квазистационарном режиме, который описывается уравнением¹

$$\frac{1}{\varphi(\varepsilon)} \frac{d}{d\varepsilon} \left[\frac{8\pi^2 Q n_e e^4 T_e}{m^2} \left(\frac{df_1}{d\varepsilon} + \frac{f_1}{T_e} \right) \right] - \sigma n_a \left(\frac{2\varepsilon}{m} \right)^{1/2} \frac{\varepsilon - E_1}{E_1} f_1 = 0 \quad (1.13)$$

2. Решение кинетического уравнения. Запишем уравнение (1.13) в безразмерных переменных $x = \varepsilon / T_e$, $\beta = E_1 / T_e$. Тогда вместо (1.13) имеем

$$f_1''(x) + f_1'(x) - \kappa x(x - \beta) f_1(x) = 0, \quad x > \beta \quad (2.1)$$

$$\kappa = \sigma n_a T_e^3 / \pi Q e^4 n_e E_1 = \kappa_0 / c^3, \quad \kappa_0 = \sigma E_1^2 / \pi Q e^4$$

Решение уравнения (2.1), удовлетворяющее граничному условию на бесконечности $f_1 \rightarrow 0$, $x \rightarrow +\infty$, имеет вид

$$f_1 = B D_p(z) \exp -x/2, \quad z = (4\kappa)^{1/4} (x - \beta/2)$$

$$p = -\frac{1}{2} + \frac{\kappa\beta^2 - 1}{8\sqrt{\kappa}}$$

Здесь $D_p(z)$ — функция параболического цилиндра [13]. Для дальнейшего удобно ввести безразмерные величины

$$\omega = (4\kappa)^{1/4}, \quad a = 1/2\beta\omega, \quad p = -1/2 + 1/4(a^2 - \omega^{-2})$$

В области энергий $0 < \varepsilon < E_1$ функция распределения незначительно отличается от максвелловской. Если пренебречь этим отличием и выбрать ее в виде

$$f_1 = (m / 2\pi T_e)^{3/2} e^{-x}$$

то, как будет показано ниже, производные справа и слева при $x = \beta$ практически равны. Если учесть это обстоятельство, то постоянная B находится сразу, и окончательно функция распределения в области больших энергий запишется так:

$$f_1 = \left(\frac{m}{2\pi T_e} \right)^{3/2} \frac{D_p(\omega(x - \beta/2))}{D_p(a)} \exp \frac{-(x + \beta)}{2} \quad (2.2)$$

¹ Строго говоря, за время $t > \tau_{ee}$ устанавливается режим, при котором разность двух интегралов столкновений I_{ee} и I_i не равна нулю, но много меньше каждого из них.

Сделаем несколько замечаний относительно поведения функции $D_p(z)$. При достаточно малых ω , т. е. при достаточно больших концентрациях и низких температурах (большие β), индекс p принимает большие отрицательные значения. По мере уменьшения концентрации и роста температуры он уменьшается по модулю, при некоторых значениях s и β переходит через нуль и затем возрастает до значений ~ 10 . Дальнейшее возрастание ограничено условием (1.7).

В области малых температур и высоких концентраций искажающее влияние ионизации сказывается меньше всего, следовательно, в этой области вид функции распределения (2.2) ближе всего к максвелловскому. Пределу $\omega \rightarrow 0$ соответствует $z \rightarrow 0$, $p \rightarrow -\infty$, причем $z^2 p \rightarrow \text{const}$. Делая в (2.2) предельный переход, найдем (см. приложение), что

$$f_1(x) \rightarrow (m/2\pi T_e)^{3/2} e^{-x} \quad (2.3)$$

3. Вычисление константы скорости ионизации и температуры электронов. Константа скорости ионизации K определяется интегралом (1.12). Этот интеграл проще всего вычислить, если воспользоваться уравнением (1.13), умножив его на $\varphi(\epsilon)$ и интегрируя от E_1 до $+\infty$. Это дает

$$K = - \frac{8\pi^2 Q e^4 T_e c}{m^2} \left(\frac{df_1}{d\epsilon} + \frac{f_1}{T_e} \right) \Big|_{\epsilon=E_1}$$

Подставив сюда выражение для функции распределения (2.2), получим

$$K = - \frac{V 2\pi Q e^4 c e^{-\beta}}{V m T_e^{3/2}} \left(1 + 2\omega \frac{D_p'(a)}{D_p(a)} \right) \quad (3.1)$$

Для вычисления (3.1) рассмотрим плоскость $s\beta$ и нанесем на нее линии равных индексов p , т. е. решения уравнения $p = \text{const}$.

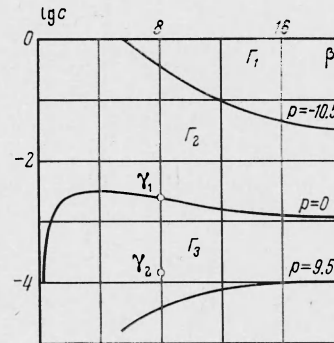
Точка γ_1 на графике соответствует равновесной концентрации для He при $T_e = 2.46$ эв и плотности атомов $2.7 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$. Точки, лежащие на вертикальной прямой ниже точки γ_1 , характеризуют состояние газа, в котором концентрация заряженных частиц меньше равновесной.

Линия $p = 0$ делит всю плоскость на две части. В верхней части индекс $p < 0$. Он возрастает по модулю при переходе от линии к линии вверх. В правом верхнем углу плоскости функция распределения переходит в максвелловскую. Этому соответствует предел (2.3). Ясно поэтому, что в области Γ_1 функция $D_p(z)$ определяется асимптотикой, полученной при условии $z \rightarrow 0$, $p \rightarrow \infty$ так, что $z^2 p = \text{const}$. Эта асимптотика найдена в приложении. Переходная область Γ_2 от асимптотики к значениям функции $D_p(z)$ при $p > 0$ достаточно узкая (индекс p в ней меняется от 0 до ~ -10).

В области Γ_3 плоскости $s\beta$ выражение (3.1) просто вычисляется для целых p , так как функция $D_p(z)$ в этом случае сводится к полиномам Эрмита H_p

$$D_p(z) = 2^{-1/2p} \exp(-z^2/4) H_p(z/\sqrt{2})$$

Для вычисления константы скорости ионизации при дробных значениях p достаточно использовать линейную интерполяцию по p .



Фиг. 1

Перейдем теперь к определению температуры распределения Максвелла электронов при энергиях $\varepsilon < E_1$. Напишем уравнение баланса энергии с учетом электрон-атомных и электрон-ионных упругих столкновений и неупругих столкновений электронов с атомами, заканчивающихся ионизацией

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} T_e n_e \right) = \int_0^\infty I_{ea} \varepsilon \varphi d\varepsilon + \int_0^\infty I_{ei} \varepsilon \varphi d\varepsilon + \int_0^\infty I_i \varepsilon \varphi d\varepsilon \quad (3.2)$$

Слева в (3.2) стоит изменение энергии электронов со временем. Этот член можно представить в таком виде, потому что подавляющее число электронов имеет максвелловскую функцию распределения с температурой T_e . Учитывая, что атомы и ионы распределены по Максвеллу с температурой T , выражению (3.2) можно придать вид

$$T_e \dot{=} - (I + T_e) n_a K - \frac{32 \varepsilon_a n_a \sqrt{m T_e}}{3 \sqrt{2 \pi m}} (T_e - T) - \frac{4 \sqrt{2 \pi e^4 Q n_e} \sqrt{m}}{3 M T_e^{3/2}} (T_e - T) \quad (3.3)$$

Здесь учтено, что производная dn_e / dt определена (1.11). Будем искать решение уравнения (3.3) в квазистационарном приближении, т. е. пренебрежем зависимостью T_e от времени, тогда из (3.3) сразу получим

$$T = T_e \left\{ 1 + \left(1 + \frac{I}{T_e} \right) \frac{3}{4} \frac{M}{m} \left(1 + \frac{4 \varepsilon_a T_e^2}{\pi Q e^4 c} \right)^{-1} \left(-1 + 2 \omega \left| \frac{D_p'(a)}{D_p(a)} \right| \right) e^{-\beta} \right\} \quad (3.4)$$

Функция T_e примерно логарифмически зависит от T и от других параметров, входящих в трансцендентное уравнение (3.4). Поэтому при любых разумных значениях параметров электронная температура в квазистационарной стадии ионизации ограничена сверху. Так, например, если $T \sim I$, то $T_e \sim I/5$.

4. Анализ результатов. Учет отклонения функции распределения электронов от максвелловской приводит к уменьшению константы скорости ионизации при заданном значении T_e . Если функция распределения электронов при всех энергиях характеризуется температурой T_e , то, как известно

$$K(T_e) = \frac{4 \varepsilon \sqrt{T_e}}{\sqrt{2 \pi m}} \left(1 + \frac{2}{\beta} \right) e^{-\beta}$$

Введем

$$K = K(T_e) \Pi$$

Поскольку в области Γ_1 «хвост» распределения искажен слабо, функция Π там мало отличается от единицы. В самом деле, из (3.4) получим для Π выражение, которое можно разложить по степеням ω , воспользовавшись малостью этой величины в области Γ_1

$$\Pi = 1 - \omega^2 + O(\omega^4)$$

Наибольшего отличия Π от единицы следует ожидать в области Γ_3 , потому что в ней функция распределения сильно искажена. Сделаем вычисления для целых $p = n$ и всем величинам будем приписывать соответствующий номер. Из уравнений $p = n$ определяются зависимости кон-

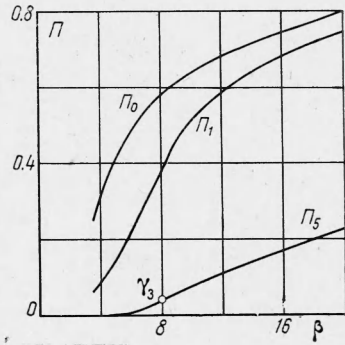
центраций от температуры

$$c_n(\beta) = \kappa_n [\beta + 8(n + 1/2)(1 + 16\beta^{-2}(n + 1/2)^2)^{1/2} + 32\beta^{-1}(n + 1/2)^2]^{-1}$$

Функции Π_n можно получить из общего результата (3.1). Результаты вычислений удобно представить в виде графика.

Состоянию газа He, описываемому точкой γ_2 на фиг. 1, соответствует точка γ_3 на фиг. 2. Из графика видно, что в области Γ_3 учет искажения хвоста распределения приводит к существенному изменению константы скорости ионизации. По мере уменьшения концентрации это изменение возрастает. Случай малых концентраций, не отвечающих неравенству (1.7), т. е. таких, при которых становятся существенными упругие столкновения электронов с атомами в области больших энергий, отличается рядом особенностей. Этот случай в данной работе не рассматривается.

Осталось показать законность сшивки функции распределения (2.2). Производная слева получается дифференцированием максвелловского распределения и в точке $x = \beta$ равна $-T_e(m/2\pi T_e)^{3/2}e^{-\beta}$. Производная справа получается из выражения (2.2), которое в области Γ_1 весьма близко к (2.3). Наибольшее отличие в производных достигается в области Γ_3 , где становятся существенными искажающие эффекты ионизации. Тем не менее возможность сшивки все еще сохраняется. Например, для $n = 0$ производная справа равна



Фиг. 2

$$-T_e \left(\frac{m}{2\pi T_e} \right)^{3/2} e^{-\beta} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4}{\beta} \left(1 + \frac{4}{\beta} \left(1 + \frac{4}{\beta^2} \right)^{1/2} + \frac{8}{\beta^3} \right)^{1/2} \right) \right] \quad (4.1)$$

Выражение в квадратных скобках (4.1) практически не отличается от единицы всюду, где выполнено неравенство (1.3).

Приложение. Найдем асимптотический вид функции $D_p(z)$ при условии $z \rightarrow 0$, $p \rightarrow -\infty$, $z^2 p \rightarrow \text{const}$. Воспользуемся интегральным представлением для функции $D_p(z)$ в случае отрицательных p

$$D_p(z) = \frac{1}{\Gamma(-p)} \int_0^\infty \exp \left(-\frac{z^2}{4} - zx - \frac{x^2}{2} \right) \frac{dx}{x^{p+1}} \quad (1)$$

Вычислим этот интеграл методом перевала. Для перевальной точки x_0 получим

$$2x_0 = (z^2 + 4k)^{1/2} - z, \quad k = -(p + 1)$$

Теперь (1) принимает вид

$$\frac{1}{\Gamma(-p)} \exp \left(-zx_0 - \frac{x_0^2}{2} + k \ln x_0 - \frac{z^2}{4} \right) \int_0^\infty \exp \left[\left(-1 - \frac{k}{x_0^2} \right) \frac{(x - x_0)^2}{2} \right] \quad (2)$$

Выражение (2) с большой точностью равно (1), если

$$x_0 \gg (1 + k/x_0^2)^{-1/2} \quad (3)$$

Неравенство (3) на плоскости $c\beta$ определяет область применимости искомой асимптотики в данной задаче. Численный анализ его показывает, что асимптотика хорошо представляет собой функцию $D_p(z)$ при $p \lesssim -10$. При выполнении условия (3) интеграл (2) легко вычисляется. Результат с точностью до члена $z^2 / \sqrt{k}$ имеет вид

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(-p)} \left(1 - \frac{z}{4\sqrt{k}}\right) \exp\left[\frac{k}{2}(\ln k - 1)\right] \exp\left(-z\sqrt{k} - \frac{z^2}{8}\right)$$

Поступила 13 IV 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. P e t s c h e k Н. Е., B y r o n S. Approach to equilibrium ionization behind strong shock waves in argon. In: The threshold of space. London — New York — Paris — Los Angeles, 1957.
2. Л а н д а у Л. Д. Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия. ЖЭТФ, 1937, т. 7, вып. 2.
3. К а г а н Ю. М., Л я г у щ е н к о Р. И. О функции распределения электронов по энергиям в положительном столбе разряда. Ж. техн. физ., 1964, т. 34, № 5.
4. W o j a s z e k K. Die Annäherung der Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen an die Maxwell — Verteilung im Bereich der unelastischen stöße. Beiträge Plasma-physik, 1965, Bd 5, H. 3.
5. У л ь я н о в К. Н. Функция распределения электронов по скоростям в неравновесной плазме. Теплофизика высоких температур, 1966, т. 4, № 3.
6. Б и б е р м а н Л. М., В о р о б ь е в В. С., Я к у б о в И. Т. Неравновесная низкотемпературная плазма, II. Распределение по энергиям свободных электронов. Теплофизика высоких температур, 1968, т. 6, № 3.
7. Б и б е р м а н Л. М., В о р о б ь е в В. С., Я к у б о в И. Т. К теории ионизации и рекомбинации в низкотемпературной плазме. ЖЭТФ, 1969, т. 56, вып. 6.
8. S e a t o n M. J. The theory of excitation and ionization by electron impact. In: Atomic and molecular processes. New York — London, Acad. Press, 1962. (Рус. перев.: Теория возбуждения и ионизации электронным ударом. Сб. «Атомные и молекулярные процессы», М., «Мир», 1964).
9. И о н и х Ю. З. Эффективные сечения возбуждения гелия электронным ударом из состояния 2¹S. Оптика и спектроскопия. 1969, т. 26, вып. 1.
10. G r u z i n s k i M. Classical theory of atomic collisions, I. Theory of inelastic collisions. Phys. Rev., Ser. 2, 1965, vol. 138, No. 2.
11. H a s t e d J. B. Physics of atomic collisions. London, Butterworths, 1964. (Рус. перев.: Физика атомных столкновений. М., «Мир», 1965).
12. К о р ч е в о й Ю. П., П р ж о н с к и й А. М. Эффективные сечения возбуждения и ионизации атомов цезия, рубидия и калия электронным ударом в припороговой области. ЖЭТФ, 1966, т. 51, вып. 6.
13. Г р а д ш т е й н И. С., Р ы ж и к И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Изд. 4. М., Физматгиз, 1963.