ускорило процесс капиллярного впитывания. Однако и в этом случае скорость капиллярной пропитки при большом отношении вязкостей нефти и воды оказалась значительно ниже, чем для неполярной жидкости той же вязкости.

На ход противоточной пропитки при малых отношениях вязкостей заметно влияет капиллярная неустойчивость, отмеченная в работе [3] для вытеснения нефти водой при малых скоростях. В некоторых опытах под действием капиллярных сил образовались зоны развития языков обводнения, имевшие значительные размеры. В то же время при проведении экспериментов на трубках меньшего диаметра (2.5 *см*) существенного размазывания фронта за счет капиллярной неустойчивости не происходит.

Для более подробного исследования капиллярной неустойчивости было проведено несколько опытов по противоточной капиллярной пропитке на плоской модели пласта размером $47 \times 26 \times 1.3$ *см*, с проницаемостью 5.3 *дарси* при отношении вязкостей $M = 2.5$. Методика проведения опытов на плоской модели несколько отличается от той, которая использовалась в опытах при пропитке на трубках. В боковой крышке модели сделана камера, через которую протекала дистиллированная вода. Выходящая из модели нефть поступала в камеру, откуда выносилась потоком дистиллированной воды.

На фиг. 4 показан характер продвижения водонефтяного контакта во времени в одном из опытов (непроницаемые стенки модели на схеме заштрихованы). Видно, что в начале двигался устойчивый фронт вытеснения (контур *1*). Затем, по мере падения скорости пропитки, на фронте начали образовываться языки воды (контур *2*), проникающие в нефтяную часть модели пласта. В результате остался целик нефти (контур *4*), который, в свою очередь, обводнялся путем противоточной капиллярной пропитки. К моменту, когда вода подошла к противоположному концу модели, за фронтом остались три целика нефти (контур *5*). Исчезновение их происходило крайне медленно. На полную ликвидацию всех целиков нефти ушло столько же времени, сколько на то, чтобы вода прошла от одного конца модели до другого. Такое замедление пропитки вызвано тем, что водонасыщенность на границе целиков невелика, и значительно меньше, чем на входе в модель. Возможно, что в реальных условиях при весьма малых скоростях вытеснения замеченная особенность может играть существенную роль.

Поступила 12 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Graham J. W., Richardson J. C. Theory and application of imbibition phenomena in recovery of oil. J. Petrol. Technol., 1959, vol. 11, No. 2.
2. Рыжик В. М. О капиллярной пропитке водой нефтенасыщенного гидрофильного пласта. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1960, № 2.
3. Кисиленко Б. Е. Экспериментальное изучение характера продвижения водонефтяного контакта в пористой среде. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение 1963, № 6.
4. Mattax C. C., Kyte J. R. Imbibition oil recovery from fractured water — drive reservoir. Soc. Petrol. Engng. J., 1962, vol. 2, No. 2.
5. Везиров Д. Ш., Кочешков А. А. Экспериментальное исследование механизма нефтеотдачи трещиновато-пористых коллекторов при заводнении. Изв АН СССР, Механика и машиностроение, 1963, № 6.
6. Мартынцив О. Ф., Рыжик В. М. Исследование процесса вытеснения нефти водой из неоднородных пластов. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 5.

О СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА

В. А. Янгарбер *(Ленинград)*

Обычно движение влаги в почве описывается нелинейным уравнением диффузии [1], основанным на законе Дарси. Однако имеют место эксперименты [2-4], в которых качественная картина влажности существенно отличается от той, которая наблюдается в результате решения уравнения диффузии. Попытка объяснить движение воды, соответствующее указанным экспериментальным данным, предпринята в [2]. Для этого вся сеть капилляров в почве классифицируется на две группы: толстые, магистральные каналы, по которым в основном движется жидкость, и тонкие капилляры, транспортирующие воду к магистральным. Обозначая потенциал влаги в тонких капиллярах через ψ, а в магистральных — через ψ_e (эффективный потенциал по терминологии [2]), можно записать пропорциональность скорости изменения влажности w на любой глубине разности этих потенциалов

$$\psi_e - \psi = K_1 \partial w / \partial t$$

Подставляя найденное отсюда значение эффективного потенциала ψ_e в уравнение течения однокомпонентной сжимаемой жидкости [1]

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial \psi_e}{\partial x}\right)$$

получим дифференциальное уравнение, которое здесь будет называться модифицированным уравнением влагопереноса

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[D(w)\frac{\partial w}{\partial x} + K\frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial x}\right] \quad (0 \leqslant x \leqslant H) \quad \left(D = a\frac{\partial \psi}{\partial w},\ K = aK_1\right) \tag{1}$$

Здесь D — коэффициент диффузивности, a — коэффициент влагопроводности. Уравнение (1) и рассуждения, приводящие к нему, аналогичны таким, которые обычно используются для описания движения жидкости в трещиновато-пористых средах [5-8]. Краевые задачи для таких уравнений чаще всего формулируются для несогласованных начальных и граничных условий.

В данной работе приводится описание одного из видов смешанной задачи, поставленной к уравнению (1), и дается решение этой задачи в случае постоянных коэффициентов и согласованности начального и граничных условий.

Отметим, что хотя здесь рассматривается одномерное уравнение (1) (x — вертикальная координата), этот случай является достаточно характерным. Переход к большему числу измерений вносит лишь технические затруднения.

К уравнению (1) присоединим начальное условие

$$w(x, t)\big|_{t=0} = \varphi(x) \tag{2}$$

и граничные условия на концах отрезка

$$\left[D(w)\frac{\partial w}{\partial x} + K\frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial x}\right]\Bigg|_{x=0} = -f(t), \qquad \frac{\partial w}{\partial x}\Bigg|_{x=H} = 0 \tag{3}$$

Физический смысл второго условия (3) ясен — это условие отсутствия потока влаги через границу $x = H$. Что касается первого условия (3), то к нему приводят следующие соображения. Обозначим через

$$A(t) = \int\limits_0^H w(x, t)\,dx$$

влагосодержание слоя $[0, H]$ в момент времени t. Интегрируя уравнение (1) в пределах от 0 до H и меняя слева порядок интегрирования и дифференцирования, получим

$$\frac{dA}{dt} = \left[D(w)\frac{\partial w}{\partial x} + K\frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial x}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=H}$$

Отсюда, учитывая второе условие (3), получим

$$\frac{dA}{dt} = -\left[D(w)\frac{\partial w}{\partial x} + K\frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial x}\right]_{x=0}$$

Последнее соотношение показывает, что $f(t) = dA/dt$, т. е. $f(t)$ — скорость иссушения слоя $[0, H]$. При $K = 0$ первое условие (3) превращается в классическое условие второго рода, при этом физический смысл остается тем же, что указан выше. Отметим, что первое граничное соотношение (3) получено в [6] из других соображений.

Предположим теперь, что $D(w) = \text{const}$. Это условие часто выполняется, если влажность меняется в небольшом диапазоне. В этом случае первое условие (3) заменяется более простым

$$\partial w/\partial x\,|_{x=0} = f_1(t) \tag{4}$$

$$f_1(t) = -\frac{1}{K}\int\limits_0^t \exp\left\{-\frac{D}{K}(t-\tau)\right\} f(\tau)\,d\tau + \varphi'(0)\exp\left\{-\frac{D}{K}t\right\} \tag{5}$$

Здесь $\varphi(x)$ — из равенства (2). Предельный случай $K = 0$ требует дополнительного рассмотрения, так как равенство (5) не определено для $K = 0$. Докажем, что

$$\lim_{K\to 0} f_1(t) = -\frac{1}{D}f(t) \tag{6}$$

тем самым будет доказано, что условие (4) переходит в классическое условие второго рода. Для доказательства заменим переменную интегрирования $t - \tau = -K\xi/D$ и введем обозначение

$$J(x, t) = \frac{1}{K}\int\limits_0^t \exp\left\{-\frac{D}{K}(t-\tau)\right\} f(\tau)\,d\tau = \frac{1}{D}\int\limits_{-\theta}^{0} \exp(\xi)\, f\left(\frac{K}{D}\xi + t\right)d\xi, \quad \theta = \frac{D}{K}t$$

Исходя из очевидного равенства

$$f(t) = \int\limits_{-\infty}^{0} \exp(\xi) f(t)\,d\xi$$

получим

$$\left|J(x, t) - \frac{f(t)}{D}\right| = \left|\int\limits_{-\theta}^{0} \frac{1}{D} e^{\xi} f\left(\frac{K}{D}\xi + t\right)d\xi - \frac{1}{D}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\xi} f(t)\,d\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_{-\theta}^{0} \frac{1}{D} e^{\xi}\left[f\left(\frac{K}{D}\xi + t\right) - f(t)\right]d\xi\right| + \left|\int\limits_{-\infty}^{-\theta} e^{\xi}\frac{f(t)}{D}\,d\xi\right|$$

Легко видеть, что

$$\lim_{K\to 0}\left|\int\limits_{-\infty}^{-\theta} e^{\xi}\frac{f(t)}{D}\,d\xi\right| = 0$$

Отсюда для заданного $\varepsilon > 0$ и малого K получаем

$$\left|J(x, t) - \frac{f(t)}{D}\right| \leqslant \int\limits_{-\theta}^{0}\left|\frac{1}{D}e^{\xi}\left[f\left(\frac{K}{D}\xi + t\right) - f(t)\right]\right|d\xi + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{D^2}\int\limits_{-\theta}^{0} e^{\xi}\,|f'(t^*)|\,K\,|\xi|\,d\xi + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{D^2}|f'(t^*)|\left[K - K\exp\left(-\frac{D}{K}t\right) - \right.$$

$$\left. - Dt\exp\left(-\frac{D}{K}t\right)\right] + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad t^* \in [0, t]$$

Здесь $f'(t)$ предполагается ограниченной. Последнее неравенство получено за счет возможного уменьшения K. Так как

$$\lim_{K\to 0}\varphi'(0)\exp\left(-\frac{D}{K}t\right) = 0$$

то равенство (6) доказано.

Переходим к решению уравнения (1) при начальном условии (2) и граничных условиях (4) и втором условии (3). Предположим, что выполнены условия непрерывности предельных соотношений $f_1(0) = \varphi'(0)$, $\varphi'(H) = 0$. Нетрудно отыскать замену неизвестной функции, которая сводила бы условия (2), (4) и второе условие (3) к однородным. Например, $u(x, t) = v f_1(0) - f_1(t)\varphi(x)$ при $f_1(0) = \varphi'(0) \neq 0$ или $u(x, t) = w - \varphi(x)$ при $f_1(0) = \varphi'(0) = 0$. Для функции $u(x, t)$ задача тогда приобретает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K\frac{\partial^3 u}{\partial t\,\partial x^2} + F(x, t), \qquad u\big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=H} = 0 \tag{7}$$

Здесь

$$F = -f_1'(t)\,\varphi(x) + Df_1(t)\varphi''(x) + Kf_1'(t)\varphi''(x) \quad \text{при} \quad f_1(0) \neq 0$$

и

$$F = D\varphi''(x) \quad \text{при} \quad f_1(0) = \varphi'(0) = 0$$

Решение однородного уравнения из (7) ищется в виде $X(x)T(t)$. Для определения X получим $Dx'' = -\lambda_n(X - KX'')$ или

$$X'' + \mu_n X = 0, \qquad X'(0) = X'(H) = 0, \quad \mu_n = \lambda_n/(D - K\lambda_n)$$

Известно, что нетривиальные решения X существуют только для $\mu_n = n\pi/H$ и равны $X = B_n \cos \mu_n x$. Будем поэтому искать $u(x, t)$ в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \cos \frac{n\pi}{H} x \tag{8}$$

Разложим $F(x, t)$ в ряд Фурье:

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) \cos \frac{n\pi}{H} x, \qquad F_n(t) = \frac{2}{H} \int_0^H F(\xi, t) \cos \frac{n\pi}{H} \xi \, d\xi$$

Подставляя выражение $F(x, t)$ в (7), решаем полученное уравнение

$$u_n'(t)(1 + K\mu_n^2) + D\mu_n^2 u_n(t) = F_n(t)$$

при условии $u_n(0) = 0$, которое вытекает из (7) и из представления (8). Имеем

$$u_n(t) = \int_0^t \frac{1}{1 + K\mu_n^2} \exp\left\{-\frac{D\mu_n^2}{1 + K\mu_n^2}(t - \tau)\right\} F_n(\tau)\, d\tau$$

Подставляя это выражение и значение $F_n(t)$ в ряд (8), получим

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^H G(x, \xi, t - \tau) F(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau \tag{9}$$

$$G(x, \xi, t - \tau) = \frac{2}{H} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + K\mu_n^2} \exp\left\{-\frac{D\mu_n^2}{1 + K\mu_n^2}(t - \tau)\right\} \cos \mu_n x \cos \mu_n \xi \tag{10}$$

В книге [8] решение другой краевой задачи для уравнения (1) при несогласованных условиях (распределение в начальный момент линейно, на концах отрезка — нулевой поток и постоянное значение искомой функции соответственно) приводится в виде аналогичного тригонометрического ряда. Вопрос регулярности представленного решения не обсуждается.

Решение (9) является рядом, который мажорируется сходящимся числовым рядом

$$M \sum_{n=0}^{\infty} (1 + K\mu_n^2)^{-1}$$

если $F(x, t)$ ограничена. Поэтому ряд (9) сходится равномерно и, следовательно, является обобщенным решением задачи (7). Из представления (10) для ядра $G(x, \xi, t - \tau)$ непосредственно видно, что ряд для $\partial u/\partial t$ равномерно сходится. Пусть предельные функции $f(t)$ и $\varphi(x)$ таковы, что почти всюду на $[0, H]$ существует ограниченная производная $\partial^2 F(x, t)/\partial x^2$. В этом случае цепочка равенств, полученных последовательным интегрированием по частям и использованием равенств

$$\left.\frac{\partial G}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = \left.\frac{\partial G}{\partial \xi}\right|_{\xi=H} = 0$$

доказывает существование второй производной функции $u(x, t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \int_0^t \int_0^H \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} F(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau = \int_0^t \int_0^H \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} F(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau =$$

$$= -\int_0^t G \frac{\partial F}{\partial \xi} d\tau \Big|_0^H + \int_0^t \int_0^H G \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} d\xi\, d\tau$$

Аналогично можно доказать существование производной $\partial^3 u/\partial t \partial x^2$. Таким образом, если выполнены дополнительные условия гладкости функций $f(t)$ и $\varphi(x)$, формула (9) дает регулярное решение задачи (7).

Для оператора L и ему сопряженного по Лагранжу оператора M

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - K\frac{\partial^3 u}{\partial t\, \partial x^2}, \qquad Mu = -\frac{\partial u}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K\frac{\partial^3 u}{\partial t\, \partial x^2}$$

имеет место формула, которая легко проверяется

$$u(x, t)\, Mv(x, t) - v(x, t)\, Lu(x, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(uv + K\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x}\left[D\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + K\left(v\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + u\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}\right)\right] \tag{11}$$

Функция $G(x, \xi, t-\tau)$ — обобщенное решение уравнения $L_{x,t}G = 0$ (индексы у оператора L означают, что производные берутся по соответствующим переменным). Легко проверить, что

$$\int_0^t \int_0^H M_{\xi,\tau}\, G(x, \xi, t-\tau)\, d\xi\, d\tau = 0$$

то есть, что G как функция аргументов ξ и τ удовлетворяет уравнению $MG = 0$ в обобщенном смысле. Положим в (11) $u = f_1(\tau)\varphi(\xi)$, $v = G(x, \xi, t-\tau)$ и проинтегрируем равенство в пределах $[0, H]$ и $[0, t]$ по ξ и τ соответственно

$$-\int_0^t \int_0^H G(x, \xi, t-\tau)\, L[f_1(\tau)\varphi(\xi)]\, d\xi\, d\tau = \tag{12}$$

$$= \int_0^H [f_1(0)\, G(x, \xi, t) - f_1(t)\, G(x, \xi, 0)]\, \varphi(\xi) +$$

$$+ \int_0^t D\left[G(x, 0, t-\tau)\, f_1(\tau)\, \varphi'(0) - f_1(\tau)\, \varphi(0)\frac{\partial G(x, 0, t-\tau)}{\partial \xi}\right] d\tau +$$

$$+ \int_0^t K\left[G(x, 0, t-\tau)\, f_1'(\tau)\, \varphi'(0) + f_1(\tau)\, \varphi(0)\frac{\partial^2 G(x, 0, t-\tau)}{\partial \tau\, \partial \xi}\right] d\tau -$$

$$-\int_0^t f_1(\tau)\, \varphi(H)\left[K\frac{\partial^2 G(x, H, t-\tau)}{\partial \tau\, \partial \xi} - D\frac{\partial G(x, H, t-\tau)}{\partial \xi}\right] d\tau +$$

$$+ K\int_0^H \left[f_1(0)\frac{\partial G(x, \xi, t)}{\partial \xi} - f_1(t)\frac{\partial G(x, \xi, 0)}{\partial \xi}\right] \varphi'(\xi)\, d\xi$$

Предположим, что $f_1(t)$, $\varphi(x)$ и их производные ограничены. Тогда, производя в правой части равенства (12) интегрирование по частям и перебрасывая дифференцирование на $\varphi(\xi)$ и $f_1(\tau)$, замечаем, что интегралы с ядрами $\partial G/\partial \xi$ и $\partial^2 G/\partial\tau\partial\xi$ равномерно сходятся, так как ряд для G мажорируется сходящимся числовым рядом. Учтем далее, что $-L_{\xi,\tau}$, $[f_1\varphi] = F(\xi, \tau)$, $\varphi'(0) = f_1(0)$ и $\varphi'(H) = 0$. Кроме этого, из представления (10) видно непосредственно, что

$$\frac{\partial G(x, 0, t-\tau)}{\partial \xi} = \frac{\partial G'(x, H, t-\tau)}{\partial \xi} = 0$$

Учитывая все сказанное, а также равенство (9), из формулы (12) получим

$$u(x, t) = \int_0^H f_1(t-\tau)\left[\varphi G(x,\xi,\tau) + K\varphi'\frac{\partial G(x, \xi, \tau)}{\partial \xi}\right]\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} d\xi + \\ + \varphi'(0)\int_0^t [Df_1(\tau) + Kf_1'(\tau)]\, G(x, 0, t-\tau)\, d\tau \tag{13}$$

Аналогично можно использовать (11) для выражения $u(x, t)$ в случае, когда $f_1(0) = \varphi'(0) = 0$

$$u(x, t) = -f_1(t)\int_0^H \left[\varphi G(x, \xi, 0) + K\varphi' \frac{\partial G(x, \xi, 0)}{\partial \xi}\right] d\xi =$$

$$= \frac{1}{K}\left[\int_0^t \exp\left\{-\frac{D}{K}(t-\tau)\right\} f(\tau)\, d\tau\right] \int_0^H \left[\varphi G(x, \xi, 0) + K\varphi' \frac{\partial G(x, \xi, 0)}{\partial \xi}\right] d\xi$$

Заметим, что при $K \to 0$ функция $G(x, \xi, t-\tau)$ имеет предел $G_0(x, \xi, t-\tau)$, который является функцией Грина задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u\big|_{t=0} = \varphi(x), \; D\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = -f(t), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=H} = 0$$

Формула (9) в этом случае после перехода в ней от $u(x, t)$ к $w(x, t)$ дает решение этой задачи.

Несоответствие экспериментальных данных с решением уравнения диффузии, которое отмечалось в начале статьи, состоит в следующем. Если в начальный момент верхний слой почвы более увлажнен, чем нижний, и создается условие интенсивного испарения, то, согласно экспериментальным данным [2-4], влажность в нижних более сухих слоях убывает одновременно с иссушением верхнего слоя. Если бы движение воды подчинялось уравнению диффузии, то градиент влажности между верхним и нижним слоями создал бы приток влаги в нижний слой, по крайней мере в начале процесса, то есть поток против градиента влажности.

Используя формулу (13), можно проиллюстрировать, как уравнение (1) моделирует явление передвижения влаги по градиенту влажности. Предположим для простоты, что $f(t)$ выбрано так, чтобы $f_1(t) = f_1(0) = \text{const}$. Тогда выражение для влажности примет вид $w = a^{-1}u(x, t) + \varphi(x)$. Так как (13) при $K = 0$ превращается в обычное решение задачи диффузии $u_0(x, t)$, то, чтобы выявить эффект движения влаги по градиенту влажности, достаточно показать, что при $K < 0$ можно удовлетворить неравенству $u_0(x, t)\; u(x, t) < 0$.

Если считать t настолько малым, что вторым слагаемым правой части (13) можно пренебречь, то, полагая K таким, что

$$\int_0^H \left[\varphi G(x, \xi, 0) + K\varphi' \frac{\partial G(x, \xi, 0)}{\partial \xi}\right] d\xi < 0$$

можно удовлетворить написанному неравенству, выбрав в качестве начального распределения убывающую функцию $\varphi(x) > 0$, $\varphi'(x) < 0$. Заметим, что выбор в качестве φ убывающей функции естествен, если хотеть объяснить «аномальное» движение по градиенту влажности. Действительно, если $\varphi' \equiv 0$, то уменьшение влажности при $x = H$ есть следствие испарения. В случае же $\varphi' > 0$ уменьшению влажности при $x = H$ способствует и диффузия.

В работе [2] экспериментально проверялся именно случай убывающего начального распределения влажности. При увеличении K можно получить не только уменьшение притока влаги внизу слоя ($x = H$), но и отток влаги, т. е. тот эффект, который наблюдается экспериментально.

Поступила 25 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы. Изд. «Мир», 1964.
2. Hallaire M. Léau et la production végétal. Inst. nat. rech. agronom., 1964.
3. Абрамова М. М. Передвижение воды в почве при испарении. Тр. Почв. ин-та АН СССР, 1953, т. 41.
4. Дмитриев Е. А. К вопросу о применимости уравнения диффузии для изучения явления влагопереноса в почвогрунтах. Тр. ЛГМИ, 1962, вып. 13.
5. Бан А., Богомолов А. Ф., Максимов В. А., Николаевский В. Н., Огаджанянц В. Г., Рыжик В. М. Влияние свойств горных пород на движение в них жидкости. Гостоптехиздат, 1962.
6. Баренблатт Г. И. О некоторых краевых задачах для уравнения фильтрации жидкости в трещиноватых породах. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
7. Золотарев П. П. О уравнении теплопроводности в гетерогенных сплошных средах. Инж. ж., 1963, т. 3, № 3.
8. Ромм Е. С. Фильтрационные свойства трещиноватых горных пород. Изд. «Недра», 1966.