Теплофизика и аэромеханика, *2018*, *том 25*, *№ 4*

УДК 532.517.4

Уравнения для описания семейства автомодельных решений дальнего поля круглой затопленной турбулентной струи*

Р.И. Мулляджанов

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, *Новосибирск*

Новосибирский государственный университет

E-mail: rustammul@gmail.com

Рассмотрено течение турбулентной круглой затопленной струи в дальнем поле. При помощи известных автомодельных свойств осредненного по времени течения, а также пространственных и временных характеристик всего спектра масштабов турбулентных пульсаций выведены модифицированные уравнения Навье–Стокса. Предложен способ численного расчета этих уравнений для описания семейства автомодельных решений в цилиндрической области с периодическими граничными условиями в продольном направлении, при этом скорость расширения струи входит в полученные уравнения явным образом как параметр.

Ключевые слова: турбулентность, автомодельность, затопленная струя, дальнее поле.

В литературе часто используется термин «автомодельность» в контексте турбулентных свободных сдвиговых потоков для обозначения течения, которое не сохраняет признаков своих начальных/граничных условий [1, 2]. Для струй это означает, что детали ближней области не важны при рассмотрении характеристик дальнего поля. Согласно этой концепции струи, истекающие из различных сопловых устройств и имеющие различные выходные профили скорости и уровень пульсаций, все равно должны стремиться к некоторому единому асимптотическому автомодельному решению. Тем не менее, численные [3] и экспериментальные результаты [4] показали, что входные условия влияют на автомодельный режим течения в дальней области осесимметричных струй, для которых из законов сохранения известно, что осредненная по времени осевая скорость u_c падает обратно пропорционально расстоянию от источника движения, в то время как полуширина струи δ линейно растет.

В работе [1] впервые было аналитически показано, что автомодельное решение для круглой затопленной турбулентной струи при достаточном удалении от начала координат не универсально. «Память» дальнего поля о спектральных характеристиках турбулентности в ближнем поле вырождается в семейство автомодельных решений, где скорость расширения струи $d\delta/dx$ играет роль параметра, при этом x обозначает продольную координату вдоль распространения потока. Другим важным фактом является то, что

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 14-19-01685.

спектр турбулентных пульсаций, нормированных на локальные характеристики (u_c и δ), не меняет форму с изменением x [5, 6], т.е. все масштабы пульсаций эволюционируют автомодельно. Еще одним значимым результатом [7, 8] является то, что для транспортных уравнений на двухточечные корреляции можно применить метод разделения переменных для радиальной и продольной координат, если двухточечные корреляции зависят только от разности $\xi_2 - \xi_1$, где $\xi = \log x$, при этом индексы 1 и 2 соответствуют двум произвольным точкам в пространстве. Таким образом, в турбулентной круглой струе помимо азимутального направления существует еще одна однородная координата — логарифм продольной координаты. В настоящей работе при помощи перечисленных автомодельных свойств струйных течений в дальнем поле выводятся модифицированные уравнения Навье–Стокса.

Согласно линейному росту локального характерного размера с увеличением x, в случае численного расчета удобно рассматривать коническую область в физическом пространстве, которую, однако, можно представить в виде цилиндра, если использовать переменную $\eta = r/\delta$ вместо r (см. рисунок). Важно отметить, что в координатах (ξ, η, φ), где $\xi = \log x$, $\eta = r/\delta$, а φ обозначает азимутальный угол вокруг цилиндрической оси симметрии, пространственный масштаб характерных вихрей не изменяется в продольном и поперечном направлениях. Очевидно, что угловую переменную преобразовывать не нужно. Последней переменной задачи, которую необходимо модифицировать, является время t. Интуитивно понятно, что характерное время оборота вихря будет тем меньше, чем ближе вихрь находится к началу координат, где характерные масштабы меньше, а скорости выше. Опишем эти зависимости математически. Для всех масштабов в струе характерное время вниз по течению растет как $t \sim \delta(x)/u_c(x) \sim x^2$. Преобразуем переменную t таким образом, чтобы характерное время оборота вихря определенного масштаба было одинаково вдоль ξ. Очевидной заменой переменной является комбинация $\tau = t/\delta(x)^2$, где $\delta(x) = \alpha x$, при этом $\alpha = \alpha(*)$ обозначает скорость расширения струи и является функцией начальных условий $*$ (около сопла) [1]. Однако при такой замене переменная τ явным образом входит в выражение для частной производной по x. Вместо этого будем использовать нормировку $\tau = \log[t/\delta(x)^2]$. Тогда, применяя правило перехода от $x_i = (t, x, r, \varphi)$ к $\xi_i = (\tau, \xi, \eta, \varphi)$ для производных в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_j}, \tag{1}$$

получим следующие выражения:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \alpha^{-2} e^{-2\xi} e^{-\tau} \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = -2e^{-\xi} \frac{\partial}{\partial \tau} + e^{-\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - e^{-\xi} \eta \frac{\partial}{\partial \eta}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \alpha^{-1} e^{-\xi} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

С таким преобразованием переменной времени явная зависимость от τ в $\partial/\partial x$ отсутствует, однако появляется множитель $e^{-\tau}$ в производной $\partial/\partial t$. Вместо поля скорости $\boldsymbol{u} = (u_x, u_r, u_\varphi)$

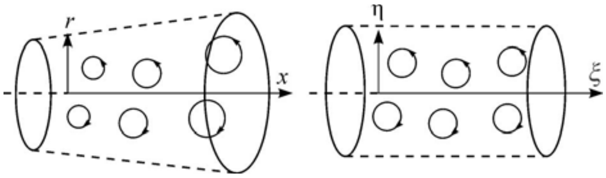

Рис. Схематическое изображение области автомодельного струйного течения в цилиндрических координатах (слева) и новых модифицированных координатах (справа).

и давления p рассмотрим некоторые «приведенные» поля $\boldsymbol{v}$ и q, где уже учтено затухание в продольном направлении, которое продиктовано автомодельными свойствами струйных течений:

$$\boldsymbol{u}(x, r, \varphi, t) = \boldsymbol{v}(\xi, \eta, \varphi, \tau) / \delta(x) = \alpha^{-1} \mathrm{e}^{-\xi} \boldsymbol{v}(\xi, \eta, \varphi, \tau),$$
$$u_x = \alpha^{-1} \mathrm{e}^{-\xi} v_\xi, \quad u_r = \alpha^{-1} \mathrm{e}^{-\xi} v_\eta, \quad u_\varphi = \alpha^{-1} \mathrm{e}^{-\xi} v_\varphi, \tag{3}$$
$$p(x, r, \varphi, t) = q(\xi, \eta, \varphi, \tau) / \delta(x)^2 = \alpha^{-2} \mathrm{e}^{-2\xi} q(\xi, \eta, \varphi, \tau).$$

Следует отметить, что все поля можно считать обезразмеренными на характерные значения в подводящем канале — диаметр сопла и среднерасходную в нем скорость. Далее преобразования (2) и (3) применяются к компонентам уравнения Навье–Стокса, записанных в цилиндрической системе координат (x, r, φ). Таким образом, предлагается получить транспортные уравнения на вектор $\boldsymbol{v}$, компоненты которого для удобства обозначим как $\boldsymbol{v} = (v_\xi, v_\eta, v_\varphi)$. Рассмотрим модифицированное уравнение неразрывности. Для приведенного поля скорости в новых пространственно-временных координатах получим:

$$\frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial (\eta v_\eta)}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = S_\mathrm{c}, \quad S_\mathrm{c} = \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \alpha \Big(v_\xi - \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} + 2 \frac{\partial v_\xi}{\partial \tau} \Big), \tag{4}$$

где слева в уравнении неразрывности формально стоит оператор дивергенции, действующий на $\boldsymbol{v}$, а справа — несколько новых слагаемых, объединенных в источниковый член S_c. Компоненты векторного уравнения, соответствующего закону сохранения импульса в цилиндрических координатах в безразмерном виде для приведенных полей $\boldsymbol{v}$ и q в новых координатах имеют вид:

$$x: \quad \mathrm{e}^{-\tau} \frac{\partial v_\xi}{\partial \tau} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla') v_\xi = -\frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta' v_\xi + S_\xi,$$
$$r: \quad \mathrm{e}^{-\tau} \frac{\partial v_\eta}{\partial \tau} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla') v_\eta - \frac{{v_\varphi}^2}{\eta} = -\frac{\partial q}{\partial \eta} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \left(\Delta' v_\eta - \frac{v_\eta}{\eta^2} - \frac{2}{\eta^2} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) + S_\eta, \tag{5}$$
$$\varphi: \quad \mathrm{e}^{-\tau} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \tau} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla') v_\varphi + \frac{v_\eta v_\varphi}{\eta} = -\frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial q}{\partial \varphi} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \left(\Delta' v_\varphi - \frac{v_\varphi}{\eta^2} + \frac{2}{\eta^2} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) + S_\varphi,$$

где Re — число Рейнольдса, построенное, к примеру, по локальным характеристикам, при этом

$$(\boldsymbol{v} \cdot \nabla') = v_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + v_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{v_\varphi}{\eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi},$$
$$\Delta' = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\eta^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \tag{6}$$

где оператор Лапласа в новых координатах также формально совпадает с выражением в цилиндрических координатах и введен для удобства. Здесь штрихи у дифференциальных операторов означают дифференцирование по новым координатам. Источниковые слагаемые S_ξ, S_η и S_φ в правой части уравнений (5) выражаются как

$$S_\xi = v_\xi \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \alpha \left(2 v_\xi \frac{\partial v_\xi}{\partial \tau} + {v_\xi}^2 - v_\xi \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \eta v_\xi \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial q}{\partial \xi} +$$
$$+ \alpha \left(2 \frac{\partial q}{\partial \tau} + 2q - \frac{\partial q}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial q}{\partial \eta} \right) - \frac{1}{\mathrm{Re}} \cdot \frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \xi} + \frac{\alpha^2}{\mathrm{Re}} \left(2 v_\xi + 4\eta \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \eta^2 \frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \eta^2} - 3 \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} \right) +$$

$$+\frac{\alpha^2}{\mathrm{Re}}\left(-2\eta\frac{\partial^2 v_\xi}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 v_\xi}{\partial\xi^2}+6\frac{\partial v_\xi}{\partial\tau}+4\eta\frac{\partial^2 v_\xi}{\partial\tau\partial\eta}-4\frac{\partial^2 v_\xi}{\partial\tau\partial\xi}+4\frac{\partial^2 v_\xi}{\partial\tau^2}\right), \tag{7}$$

$$S_\eta = v_\xi\frac{\partial v_\eta}{\partial\xi}+\alpha\left(2v_\xi\frac{\partial v_\eta}{\partial\tau}+v_\xi v_\eta - v_\xi\frac{\partial v_\eta}{\partial\xi}+\eta v_\xi\frac{\partial v_\eta}{\partial\eta}\right)-\frac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\frac{\partial^2 v_\eta}{\partial\xi^2}+$$

$$+\frac{\alpha^2}{\mathrm{Re}}\left(2v_\eta+4\eta\frac{\partial v_\eta}{\partial\eta}+\eta^2\frac{\partial^2 v_\eta}{\partial\eta^2}-3\frac{\partial v_\eta}{\partial\xi}-2\eta\frac{\partial^2 v_\eta}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 v_\eta}{\partial\xi^2}+6\frac{\partial v_\eta}{\partial\tau}+4\eta\frac{\partial^2 v_\eta}{\partial\tau\partial\eta}-4\frac{\partial^2 v_\eta}{\partial\tau\partial\xi}+4\frac{\partial^2 v_\eta}{\partial\tau^2}\right),$$

$$S_\varphi = v_\xi\frac{\partial v_\varphi}{\partial\xi}+\alpha\left(2v_\xi\frac{\partial v_\varphi}{\partial\tau}+v_\xi v_\varphi - v_\xi\frac{\partial v_\varphi}{\partial\xi}+\eta v_\xi\frac{\partial v_\varphi}{\partial\eta}\right)-\frac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial\xi^2}+$$

$$+\frac{\alpha^2}{\mathrm{Re}}\left(2v_\varphi+4\eta\frac{\partial v_\varphi}{\partial\eta}+\eta^2\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial\eta^2}-3\frac{\partial v_\varphi}{\partial\xi}-2\eta\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial\xi^2}+6\frac{\partial v_\varphi}{\partial\tau}+4\eta\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial\tau\partial\eta}-4\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial\tau\partial\xi}+4\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial\tau^2}\right).$$

Отметим, что в источниковых членах появляются производные по времени первого и второго порядка, а также смешанные производные по времени и пространственным координатам. Полученная система уравнений является нестандартной для вычислительной гидродинамики. Дальнейшие исследования должны предоставить информацию о свойствах этой системы и ее корректной постановке для численного расчета.

В настоящей работе при помощи известных автомодельных свойств осредненного по времени течения, а также пространственных и временных характеристик всего спектра масштабов турбулентных пульсаций струйного течения в дальнем поле выведены модифицированные уравнения Навье–Стокса. Несмотря на свою громоздкость, полученная система уравнений (3)–(7), по мнению автора, должна позволить провести численные расчеты в цилиндрической области с периодическими граничными условиями вдоль ξ, поскольку осредненные по времени и спектральные характеристики приведенных полей скорости и давления не изменяются вдоль ξ. Это даст возможность построить карту *всех* возможных автомодельных решений в пространстве параметров α и Re, что является целью дальнейших исследований.

Автор благодарит Д.Ф. Сиковского, А. Ходжича и В.К. Джорджа за обсуждения результатов данной работы. Автор также благодарит рецензента за ряд ценных замечаний.

Список литературы

1. **George W.K.** The self-preservation of turbulent flows and its relation to initial conditions and coherent structures // Advances in turbulence 2 / Ed. by H.-H. Fernholz, H.E. Fiedler. Berlin: Springer, 1989. P. 39–73.
2. **George W.K.** Asymptotic effect of initial and upstream conditions on turbulence // J. Fluids Engin. 2012. Vol. 134, No. 6. P. 061203-1–061203-27.
3. **Boersma B.J., Brethouwer G., Nieuwstadt F.T.M.** A numerical investigation on the effect of the inflow conditions on the self-similar region of a round jet // Phys. Fluids. 1998. Vol. 10, No. 4. P. 899–909.
4. **Mi J., Nobes D.S., Nathan G.J.** Influence of jet exit conditions on the passive scalar field of an axisymmetric free jet // J. Fluid Mech. 2001. Vol. 432. P. 91–125.
5. **Burattini P., Antonia R.A., Danaila L.** Similarity in the far field of a turbulent round jet // Phys. Fluids. 2005. Vol. 17. P. 025101–025115.
6. **Mullyadzhanov R.I., Sandberg R.D., Abdurakipov S.S., George W.K., Hanjalic K.** Propagating helical waves as a building block of round turbulent jets // Phys. Rev. Fluids. 2018. Vol. 3, No. 6. P. 062601-1–062601-9.
7. **Ewing D.** On multi-point similarity solutions in turbulent free-shear flows: Ph.D. thesis / D. Ewing; State University of New York at Buffalo, 1995. 261 p.
8. **Ewing D., Frohnapfel B., George W.K., Pedersen J.M., Westerweel J.** Two-point similarity in the round jet // J. Fluid Mech. 2007. Vol. 577. P. 309–330.

Статья поступила в редакцию 23 марта 2018 г.,
после доработки — 21 мая 2018 г.