

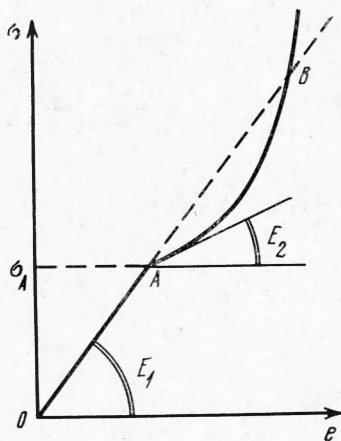
К РАСПРОСТРАНЕНИЮ ПЛОСКИХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ТОЛСТОЙ ПЛАСТИНЕ

Ю. Р. Лепик

(Тарту)

Исследуются распространение и взаимодействия плоских волн высокой амплитуды в толстой пластине. К поверхности пластины приложено монотонно убывающее давление. Деформации считаются немалыми; задача сформулирована и решена в переменных Лагранжа. Предложен приближенный метод построения фронтов ударных волн. Давление и скорость частиц для любой точки и для любого момента времени определяются методом характеристик. Приведен численный пример.

1. Рассмотрим бесконечную пластину со свободными поверхностями $x = 0$ и $x = h$ (x — лагранжева координата среды). Пусть на поверхности $x = 0$ действует динамическая сжимающая нагрузка σ , которая изменяется по закону $\sigma = \sigma_0 f(t)$; символом $f(t)$ обозначена некоторая монотонно убывающая функция, причем $f(0) = 1$. Зависимость напряжение — деформация будем аппроксимировать при помощи формул (фиг. 1).



Фиг. 1

$$\begin{aligned} \sigma &= L \left(\frac{1}{1-e} \right)^k + M \quad \text{при } \sigma > \sigma_A \\ \sigma &= E_1 e \quad \text{при } \sigma < \sigma_A \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь L , M и k — для данного материала характерные постоянные, а величина E_1 вычисляется по формуле

$$E_1 = \frac{1}{e_A} \left[L \left(\frac{1}{1-e_A} \right)^k + M \right] \quad (1.2)$$

Наклон касательной в точке A найдем по формуле

$$E_2 = \left(\frac{d\sigma}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=e_A} = \frac{kL}{(1-e_A)^{k+1}} \quad (1.3)$$

Будем предполагать давление, приложенное к пластине, достаточно большим, так что можно считать нагрузку и разгрузку материала происходящими по единой кривой (гидродинамическая модель среды). Влиянием температуры, а также влиянием скорости деформации на механические параметры материала будем пренебрегать.

2. Уравнения движения имеют в лагранжевых координатах x , t вид (v — скорость частиц, ρ — плотность материала, ρ_0 — плотность в недеформированном состоянии)

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho^2}{\rho_0} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

Эта система имеет характеристики $dx = \pm a(e)dt$, причем лагранжева скорость волн $a(e)$ определяется по формулам

$$a(e) = \begin{cases} \sqrt{E_1/\rho_0} & \text{при } \sigma < \sigma_A \\ \sqrt{kL/\rho_0} (1-e)^{-1/2(k+1)} & \text{при } \sigma > \sigma_A \end{cases} \quad (2.2)$$

Если $\sigma > \sigma_A$, то условия на характеристиках имеют вид

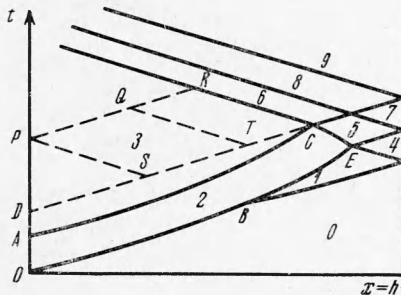
$$\begin{aligned} v + K(1-e)^{1/2(1-k)} &= R_1 \quad \text{для } dx = a(e)dt \\ v - K(1-e)^{1/2(1-k)} &= R_2 \quad \text{для } dx = -a(e)dt \end{aligned} \quad \left(K = \frac{2}{k-1} \left(\frac{kL}{\rho_0} \right)^{1/2} \right) \quad (2.3)$$

На фронтах волн должны быть выполнены условия скачка

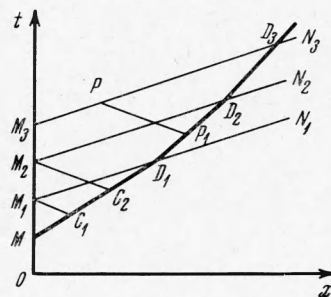
$$[v] = a[e], \quad [\sigma] = \rho_0 a[v] \quad (2.4)$$

В рассматриваемом случае на плоскости xt появляются области, схематическое распределение которых указано на фиг. 2.

Появляются две ударные волны: ударная волна при нагружении материала возникает за счет вогнутости участка AB диаграммы на фиг. 1; так как $E_2 < E_1$, то возникает еще ударная волна при разгрузке материала (при прохождении точки A из фиг. 1). Фронты этих ударных волн представлены на фиг. 2 в виде кривых OBC и AC . Приведенные вычисления



Фиг. 2



Фиг. 3

показывают, что во многих случаях величины v и e изменяются вдоль положительных характеристик мало. На этом основывается приближенный метод построения ударной волны, при котором величины v и e считаются постоянными вдоль положительных характеристик. Отметим, что такой метод по существу применялся и Г. М. Ляховым и Н. И. Поляковой в работе [1]. Более точный способ построения ударной волны будет изложен в другой статье, где также оценивается точность, достигаемая приближенным методом.

Определение фронта ударной волны происходит теперь по следующей схеме. Если величины v и e постоянны вдоль положительных характеристик, то эти характеристики являются прямыми линиями. В случае рассматриваемой задачи функция $e = e(t)$ задана на оси $x = 0$. Выберем некоторый достаточно малый промежуток времени Δt , и нанесем на ось $x = 0$ точки $M_n = n\Delta t$, где $n = 1, 2, 3, \dots$ (фиг. 3); через эти точки проведем характеристики положительного направления $x = a(e)t + C$. Если ударная волна проходит точку M и ее начальная скорость a_{*0} известна, то можем построить начальный участок ударной волны MD_1 по формуле $x = a_{*0}(t - t_M)$.

Условия скачка (2.4) получают для точки D_1 форму

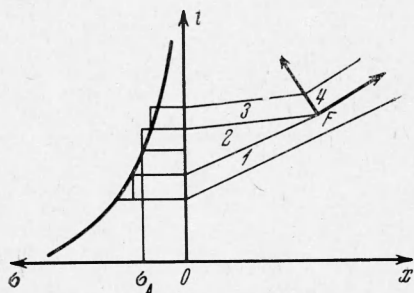
$$\sigma_{D_1}^+ - \sigma_{D_1}^- = \rho_0 a_{*1}^2 (e_{D_1}^+ - e_{D_1}^-), \quad v_{D_1}^+ - v_{D_1}^- = a_{*1} (e_{D_1}^+ - e_{D_1}^-) \quad (2.5)$$

Здесь верхними индексами плюс и минус обозначены значения соответствующей величины после и до прохождения ударного фронта, a_{*1} есть скорость ударной волны в точке D_1 .

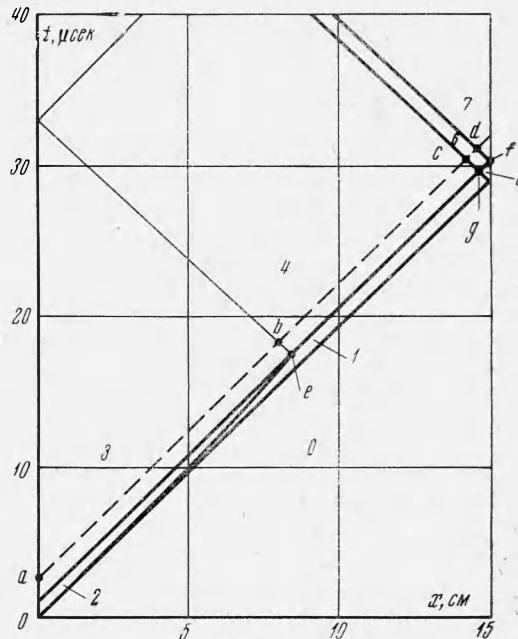
Так как считаем величины $e_{D_1}^-$, $v_{D_1}^-$, $\sigma_{D_1}^-$ известными и, кроме того, имеем

$$v_{D_1}^+ = v_{M_1}, \quad e_{D_1}^+ = e_{M_1}$$

то из системы (2.6) можно определить величины v_{M_1} и a_{*1} . С уклоном a_{*1} проведем следующий участок ударной волны до пересечения с характеристикой M_2N_2 в точке D_2 и повторим указанные выше вычисления. Таким образом могут быть построены все участки ударной линии. Отметим, что в случае предложенного метода не выполняются условия (2.3) на отрицательных характеристиках. Последнее обстоятельство дает возможность проверить точность найденного приближенного решения. Для этого надо построить некоторые отрицательные характеристики M_1C_1 , M_2C_2 , ..., найти значения v и e в точках пересечения с положительными характеристиками и выяснить, насколько больше будут отклонения от условия (2.3).



Фиг. 4



Фиг. 5

Для применения указанного выше метода построения ударного фронта должен быть известен наклон начального участка волны a_{*0} . Для волны нагружения эта величина может быть легко найдена; как вытекает из фиг. 2, около точки O $\sigma^- = v^- = 0$, $\sigma^+ = \sigma_0$ и согласно условиям скачка (2.4) имеем

$$a_{*0} = \sqrt{\sigma_0 / \rho_0 e_0} \quad (2.6)$$

Более сложным является определение величины a_{*0} для ударной волны разгрузки, так как здесь величины σ^- и v^- уже неизвестны. Для решения этой задачи рекомендуем представленный ниже прием.

Выбираем некоторую небольшую величину $\Delta\sigma$ и заменяем диаграмму $\sigma = \sigma(t)$ вблизи точки $\sigma = \sigma_A$ ступенчатой линией (фиг. 4), причем высота каждой ступени $\Delta\sigma$. Теперь в плоскости xt возникают области 1, 2, 3, в которых параметры σ и v имеют постоянные значения (фиг. 4), причем $\sigma_1 = \sigma_A + \Delta\sigma$, $\sigma_2 = \sigma_A$, $\sigma_3 = \sigma_A - \Delta\sigma$

Фронт $1-2$ имеет наклон $a = a|_{\sigma=\sigma_A+\Delta\sigma}$, фронт $2-3$ — наклон $a_1 = \sqrt{E_1/\rho_0}$. Так как $a_1 > a$, то обе волны встречаются в точке F . Вследствие этого столкновения возникают проходящая ударная волна $1-4$ и отраженная волна $3-4$. Параметры σ и v являются постоянными и в области 4. По-видимому, $\sigma_4 < \sigma_A$, так как иначе не возникало бы ударного фронта $1-4$. Так как $\sigma_3 < \sigma_A$, то фронт между областями $3-4$ распространяется со скоростью a_1 .

Выведем формулы для определения скорости частиц в областях $1-4$, напряжения σ_4 и скорости ударного фронта $1-4$. Для этого выпишем условия скачка на фронтах волн (a_{*0} — скорость ударной волны $1-4$)

$$\begin{aligned} v_2 - v_1 &= a(e_2 - e_1) \\ v_3 - v_2 &= a_1(e_3 - e_2) \\ v_4 - v_3 &= -a_1(e_4 - e_3) \\ v_4 - v_1 &= a_{*0}(e_4 - e_1) \\ \sigma_4 - \sigma_1 &= \rho_0 a_{*0}^2(e_4 - e_1) \end{aligned} \quad (2.7)$$

На основании соотношений (1.1) и (1.3) имеем

$$\begin{aligned} e_1 &\approx e_A + \left(\frac{de}{d\sigma}\right)_{\sigma=\sigma_A} \Delta\sigma = e_A + \frac{\Delta\sigma}{E_2} = \frac{\sigma_A}{E_1} + \frac{\Delta\sigma}{E_2} \\ e_2 = e_A &= \frac{\sigma_A}{E_1}, \quad e_3 = \frac{\sigma_A - \Delta\sigma}{E_1}, \quad e_4 = \frac{\sigma_4}{E_1} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Введем еще обозначение

$$\kappa = \frac{\sigma_A - \sigma_4}{\Delta\sigma_1} \quad (2.9)$$

Система (2.7) приобретает теперь вид

$$\begin{aligned} v_2 - v_1 &= -a \frac{\Delta\sigma}{E_2}, \quad v_3 - v_2 = -a_1 \frac{\Delta\sigma}{E_1} \\ v_4 - v_3 &= -a_1 \frac{1-\kappa}{E_1} \Delta\sigma, \quad v_4 - v_1 = -a_{*0} \left(\frac{1}{E_2} + \frac{\kappa}{E_1} \right) \Delta\sigma \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\rho_0 a_{*0}^2 = \frac{E_1 E_2 (1 + \kappa)}{E_1 + E_2 \kappa} \quad (2.11)$$

При достаточно малом шаге $\Delta\sigma$ можно считать $a \approx \sqrt{E_2/\rho_0}$; складывая теперь три первых уравнения системы (2.10) и вычитая последнее, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{E_2}} + \frac{2-\kappa}{\sqrt{E_1}} - a_{*0} \sqrt{\rho_0} \left(\frac{1}{E_2} + \frac{\kappa}{E_1} \right) = 0 \quad (2.12)$$

Из уравнения (2.11), (2.12) определим величины κ и a_{*0} . Вводя еще для краткости обозначение $\gamma = E_2/E_1$, находим, что

$$\kappa = \frac{4(\gamma + \sqrt{\gamma})}{1 + 2\sqrt{\gamma} + 5\gamma} \quad (2.13)$$

$$a_{*0} \sqrt{\rho_0} = \frac{\sqrt{E_2}(1 + 3\sqrt{\gamma})}{1 + \sqrt{\gamma} + 2\gamma} \quad (2.14)$$

Формулой (2.14) определяется и наклон начального участка ударной волны, возникающей при разгрузке материала.

Переходим теперь к определению параметров σ и v в областях из фиг. 2. На тех участках ударной волны нагружения, где $\sigma^+ > \sigma_B$ (участок OB на фиг. 2; σ_B есть напряжение в точке B из фиг. 1), переход в область 2 происходит сразу из области покоя 0. Если же $\sigma^+ < \sigma_B$, то между областями 0 и 2 должна быть еще область 1, где параметры имеют постоянные значения

$$\sigma_1 = \sigma_A, \quad v_1 = \frac{\sigma_A}{\rho_0 a_1} \quad (2.15)$$

Прямая $0-1$ является линией сильного разрыва и имеет к оси t наклон $a_1 = \sqrt{E_1/\rho_0}$. Фронт $0-2$ является ударным. В точке B на фиг. 2, где $\sigma = \sigma_B$ происходит разветвление фронтов. Если напряжение σ уже в начальный момент времени меньше, чем σ_B (т. е. $\sigma_0 < \sigma_B$), то точка B совпадает с точкой O и разветвление фронтов происходит в начале координат. В области 2, где $\sigma > \sigma_A$, характеристики не являются прямыми линиями, что затрудняет нахождение параметров в областях 2 и 3. Вычисления значительно упрощаются, если сделать предположение, что в областях 2 и 3 величины σ и v постоянны вдоль положительных характеристик.

Волна $0-1$ отражается от стенки $x = h$, и возникает область 4, где

$$\sigma_4 = 0, \quad v_4 = -\frac{2\sigma_A}{\rho_0 a_1} \quad (2.16)$$

В результате взаимодействия волн $1-4$ и $1-2$ возникают в точке E две новых волны, причем проходящая волна $4-5$ является линией сильного разрыва, а отраженная волна $2-5$ — ударной. При дальнейших взаимодействиях возникают еще области 6-9. Лишь в области 2 имеем $\sigma_2 > \sigma_A$, во всех остальных областях напряжение меньше, чем σ_A .

Постоянство величин σ и v предполагается лишь для области 2. Для областей 3, 5-9 нетрудно определить значения этих величин методом характеристик. Что касается области 3, то здесь вначале определим значения σ и v для треугольной части ACD , а потом уже для остальной части этой области.

Для иллюстрации применения этого метода определим величины e и v для точек P , Q , R из фиг. 2, считая при этом, что ударная волна AC уже построена, а также найдены значения e и v в области ACD . Проведем через точки P и Q положительные и отрицательные характеристики; они являются прямыми с наклоном $\pm a_1 = \pm \sqrt{E_1/\rho_0}$. Для этих характеристик должны быть выполнены условия

$$\begin{aligned} v_Q + a_1 e_Q &= v_P + a_1 e_P \\ v_Q - a_1 e_Q &= v_T - a_1 e_T \\ v_P - a_1 e_P &= v_S - a_1 e_S \end{aligned} \quad (2.17)$$

Так как параметры в области ACD уже определены, то известны v_T , e_T , v_S и e_S . Кроме того, e_P известно из закона нагружения $\sigma = \sigma(t)$ на поверхности $x = 0$. Следовательно, из системы (2.17) можем определить неизвестные величины v_P , v_Q и e_Q . Переходим теперь к точке R . Линию скачка $4-7$ будем истолковывать как двойную характеристику. Условия для характеристик имеют теперь вид

$$\begin{aligned} v_R^- + a_1 e_R^- &= v_Q + a_1 e_Q \\ v_R^- - a_1 e_R^- &= v_C^- - a_1 e_C^- \\ v_R^+ - a_1 e_R^+ &= v_C^+ - a_1 e_C^+ \end{aligned} \quad (2.18)$$

Кроме того, придется выполнить еще условие скачка

$$v_R^+ - v_R^- = a_1 (e_R^+ - e_R^-) \quad (2.19)$$

Из уравнений (2.18), (2.19) определим величины v_R^- , v_R^+ , e_R^- , e_R^+ . Если деформации e_Q , e_R^- , e_R^+ уже найдены, то соответствующее напряжение можно определить на основании диаграммы σ - e .

Таким путем могут быть найдены значения σ , e и v для любой точки диаграммы из фиг. 2.

Отметим, что распределение областей, указанное на фиг. 2, не является единственно возможным. Если пластина достаточно толста, то ударный фронт нагружения может пересекать ударный фронт разгрузки еще до достижения границы $x = h$. Этот случай будет рассмотрен в связи с примером, решенным в п. 3.

3. Рассмотрим пластину с толщиной $h = 15$ см. Приложенное к поверхности $x = 0$ напряжение изменяется по закону

$$\sigma = 300\,000 \exp(-0.805 \cdot 10^6 t)$$

Для параметров материала L , M , k и σ_A выберем значения

$$L = 142.5 \cdot 10^3, M = -67.1 \cdot 10^3, \sigma_A = 165\,000 \text{ бар}, k = 6$$

Прежде чем приступить к решению задачи, определим величину σ_B (ср. фиг. 1). Проведя соответствующие вычисления, находим, что $\sigma_B = 3.28 \cdot 10^5$ бар. Так как в данном случае $\sigma < \sigma_B$, то область 1 из фиг. 2 появляется уже в начальный момент времени $t = 0$. Далее построим фронты ударных волн 1-2 и 2-3 (фиг. 5), начальный наклон фронта 2-3 вычисляется по формуле (2.14): $a_{*0} = 0.4708 \cdot 10^6$ см/сек. Результаты вычислений представлены в табл. 1 и 2, причем данные табл. 1 соответствуют фронту 1-2, а данные табл. 2 — фронту 2-3. В этих таблицах t и t^* — координаты точки ударной волны, a_* — скорость волны в данной точке, $\sigma^\mp$ — напряжения на отрицательной и положительных сторонах (у фронта 1-2 имеем $\sigma^- = 1.65 \cdot 10^5$ бар).

Таблица 1

x	$t \cdot 10^{-6}$	$a_* \cdot 10^{-6}$	$\sigma^+ \cdot 10^{-5}$
0	0	0.5004	3
0.572	1.150	0.4904	2.768
0.924	1.867	0.4855	2.658
1.427	2.903	0.4808	2.554
1.784	3.638	0.4780	2.493
2.286	4.687	0.4752	2.433
3.018	6.226	0.4716	2.356
3.622	7.506	0.4694	2.309
4.322	8.998	0.4672	2.263
4.736	9.885	0.4651	2.218
6.237	13.113	0.4630	2.174
7.225	15.226	0.4612	2.139
8.677	18.334	0.4595	2.105

Таблица 2

x	$t \cdot 10^{-6}$	$a_* \cdot 10^{-6}$	$\sigma^- \cdot 10^{-5}$	$\sigma^+ \cdot 10^{-5}$
0	0.743	0.4708	1.650	1.650
0.309	1.398	0.4870	1.708	1.527
0.510	1.811	0.4850	1.749	1.469
0.866	2.546	0.4845	1.806	1.368
1.300	3.441	0.4890	1.851	1.253
1.614	4.084	0.4901	1.881	1.181
2.017	4.909	0.4914	1.911	1.096
2.489	5.869	0.4926	1.942	1.007
3.085	7.079	0.4939	1.974	0.907
3.816	8.558	0.4950	2.006	0.801
4.859	10.665	0.4963	2.038	0.673
6.246	13.460	0.4975	2.072	0.538
8.179	17.345	0.4986	2.105	0.396

Распределение фронтов и областей в плоскости xt указано на фиг. 5. Как видно из фиг. 5, область 2, где $\sigma > \sigma_A$, очень небольшая; во всех остальных областях имеем $\sigma < \sigma_A$ и, следовательно, характеристики имеют постоянный наклон $\pm a_1 = \pm 0.5516 \cdot 10^6$ см/сек. Чтобы исследовать изменение значений параметров в разных областях, проведены еще вычисления для точек a , b , c , d , e , g , f , отмеченных на фиг. 5; данные этих вычислений

представлены в т. бл. 3. Считается, что точки $e-f$ лежат на положительной стороне фронтов 1-4 и 5-6; знаки плюс и минус в табл. 3 указывают, на какой стороне фронтов 3-4, 4-6 или 6-7 лежит соответствующая точка.

На основании данных табл. 3 можно сделать следующие выводы:

Таблица 3

точки	$\sigma \cdot 10^{-5}$		$v \cdot 10^{-5}$	
	-	+	-	+
a	0.3326		0.0525	
b	0.3266	0.4131	0.0540	0.0315
c	0.4131	-1.1744	0.0315	0.4459
d	-1.1744	-0.0087	0.4459	0.1416
e	0.3771	0.4217	0.0672	0.0337
g	0.4217	-1.1657	0.0337	0.4481
f	-1.1657	0	0.4481	0.1438

1) на отрезках положительной характеристики $b-c$, $c-d$, $e-g$, $g-f$ параметры σ и v практически не изменяются; небольшое изменение этих величин имеет место лишь для начального участка $a-b$;

2) явление откола происходит в точке g , при этом улетает осколок толщиной ~ 0.5 см;

3) если выполняется неравенство $x_e < h$ (x_e — координата точки e), то при отколе толщина осколка не зависит от общей толщины пластины h .

Поступила 6 V 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Л я х о в Г. М., П о л я к о в а Н. И. Приближенный метод расчета ударных волн и их взаимодействий. Изв. АН СССР ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 2.
2. О р л е н к о Л. П. Поведение материалов при интенсивных динамических нагрузках. М., «Машиностроение», 1964.