УДК 539.214+539.374

РАЗВИТИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ И УПРУГОЕ ПОСЛЕДЕЙСТВИЕ ПОСЛЕ ЕГО ОСТАНОВКИ

А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, А. Л. Мазелис

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, 690041 Владивосток
E-mail: burenin@iacp.dvo.ru

Приводится аналитическое решение краевой задачи теории больших упруговязкопластических деформаций о прямолинейном движении материала в зазоре между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями. Рассмотрены случаи первоначально равноускоренного движения с последующей равнозамедленной остановкой одной из поверхностей, когда другая поверхность остается неподвижной. Приведены законы движения упругопластических границ, распределения перемещений и напряжений, в том числе остаточных.

Ключевые слова: упругость, вязкопластичность, большие деформации, остаточные напряжения.

Прямолинейные движения вязкопластических сред рассматривались в работах [1–3]. Вследствие нелинейности, следующей из модели системы уравнений, даже без учета упругих свойств среды в рамках модели Шведова — Бингама получено незначительное количество аналитических решений. Как правило, упругие деформации считают пренебрежимо малыми по сравнению с пластическими. Однако в процессах интенсивного формоизменения деформируемых тел (например, при обработке металлов давлением) обратимые деформации могут приводить к значительным изменениям формы и объема обрабатываемых заготовок после снятия оснастки (в процессах разгрузки) и к недопустимому увеличению возникающих в готовых деталях остаточных напряжений. Изучение подобных эффектов возможно лишь в рамках модели больших упруговязкопластических деформаций, так как в рассматриваемых процессах необратимые деформации нельзя считать малыми.

В настоящей работе приводится решение краевой задачи теории больших упруговязкопластических деформаций о прямолинейном движении материала, расположенного между жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями при движении одной из них. Задача решается в квазистатической постановке. Предлагается метод решения подобных задач, позволяющий в простейшем случае (т. е. когда обратимые деформации настолько малы, что при вычислении по ним напряжений их кубами можно пренебречь) в каждый момент времени определить положение упругопластических границ и получить аналитические зависимости для перемещений как в областях обратимого деформирования, так и в областях вязкопластического течения, не проводя при этом сложных вычислений. Заметим, что данный метод учитывает свойства модели больших упругопластических деформаций [4, 5], позднее обобщенной на случай учета вязких свойств материалов на стадии пластического течения [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09-08-98502-р_восток_а) и Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки молодых ученых — докторов наук (грант № МД-2036.2008.1).

1. Основные соотношения модели. Будем полагать, что обратимые и необратимые деформации являются независимыми термодинамическими параметрами состояния деформируемой среды, для которых следует привести уравнения изменения (переноса) [7], определяющие не измеряемые экспериментально составляющие деформаций. Как и в работах [4, 5], полагая систему координат прямоугольной и декартовой, запишем данные уравнения в пространственных переменных Эйлера x_i:

$$\frac{De_{ij}}{Dt} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon^p_{ij} - \frac{1}{2}\left((\varepsilon_{ik} - \varepsilon^p_{ik} + z_{ik})e_{kj} + e_{ik}(\varepsilon_{kj} - \varepsilon^p_{kj} - z_{kj})\right),$$

$$\frac{Dp_{ij}}{Dt} = \varepsilon^p_{ij} - p_{ik}\varepsilon^p_{kj} - \varepsilon^p_{ik}p_{kj}, \tag{1.1}$$

$$\frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}, \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}),$$

$$r_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) + z_{ij}(\varepsilon_{sk}, e_{sk}), \qquad v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j}v_j, \qquad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

Здесь p_{ij}, e_{ij} — компоненты тензоров необратимых и обратимых деформаций соответственно; u_i, v_i — компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды. В уравнении изменения тензора необратимых деформаций источник ε^p_{ij} отождествляется с тензором скоростей изменения необратимых (вязкопластических) деформаций. Наличие в тензоре вращений r_{ij} нелинейной части z_{ij} (в работах [4, 5] зависимость $z_{ij}(\varepsilon_{sk}, e_{sk})$ выписана полностью) обусловлено требованием неизменности тензора необратимых деформаций в процессах разгрузки ($\varepsilon^p_{ij} = 0$). При этом компоненты тензора необратимых деформаций p_{ij} изменяются так же, как при жестком перемещении тела. Выполнение этого требования и законов термодинамики приводит к необходимости использования объективной производной D/Dt, выражения для которой в соотношениях (1.1) записаны для произвольного тензора n_{ij}.

Компоненты тензора деформаций Альманси d_{ij} связаны с компонентами p_{ij} и e_{ij} соотношением

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} - e_{ik}e_{kj}/2 - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{ks}e_{sj}. \tag{1.2}$$

Материал будем считать несжимаемым. В условиях, когда плотность распределения свободной энергии определяется только величиной обратимых деформаций, из первого закона термодинамики следуют аналоги формулы Мурнагана [4, 5]

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} -p\delta_{ij} + \dfrac{\partial W}{\partial d_{ik}}(\delta_{kj} - 2d_{kj}), & p_{ij} \equiv 0, \\[2ex] -p_1\delta_{ij} + \dfrac{\partial W}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - e_{kj}), & p_{ij} \neq 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

где

$$W = -2\mu J_1 - \mu J_2 + bJ_1^2 + (b-\mu)J_1J_2 - \chi J_1^3 + \ldots, \qquad J_k = \begin{cases} L_k, & p_{ij} \equiv 0, \\ I_k, & p_{ij} \neq 0, \end{cases}$$

$$L_1 = d_{kk}, \quad L_2 = d_{ik}d_{ki}, \quad I_1 = e_{kk} - e_{sk}e_{ks}/2, \quad I_2 = e_{st}e_{ts} - e_{sk}e_{kt}e_{ts} + e_{sk}e_{kt}e_{tn}e_{ns}/4,$$

σ_{ij} — компоненты тензора напряжений Эйлера — Коши; p, p_1 — добавочные гидростатические давления; W — упругий потенциал; μ, b, χ — постоянные материала.

В качестве пластического потенциала примем обобщенное условие текучести Треска [8, 9]

$$\max|\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta\max|\varepsilon^p_k|, \tag{1.4}$$

где σ_i, ε_k^p — главные значения тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций; η — вязкость; k — предел текучести.

Скорости необратимых деформаций связаны с напряжениями ассоциированным законом пластического течения.

2. Упругое равновесие. Пусть несжимаемый упруговязкопластический материал, деформационные свойства которого рассмотрены выше, находится между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями: неподвижной внешней поверхностью с радиусом R и внутренней поверхностью с радиусом $r = r_0$, движущейся вдоль оси z. В цилиндрической системе координат (r, φ, z) решение данной краевой задачи будем искать в классе функций $u = u_z(r,t)$, $v = v_z(r,t)$. Граничные условия задачи имеют вид

$$u(R,t) = v(R,t) = 0 \quad \forall\, t, \qquad u(r_0) = u_0 \quad \text{при} \quad t = 0,$$
$$v(r_0,t) = \alpha t \quad \text{при} \quad t \geqslant 0. \tag{2.1}$$

Таким образом, момент времени $t = 0$ будем полагать моментом начала пластического течения в окрестности внутренней жесткой стенки; до этого момента времени материал деформируется обратимо. Вычислим параметры данного упругого равновесного состояния, которое является начальным условием для последующего процесса необратимого деформирования.

В рассматриваемом случае ненулевыми компонентами тензора Альманси являются

$$d_{rr} = -\frac{1}{2}\,(u')^2, \qquad d_{rz} = \frac{1}{2}\,u', \qquad u' = \frac{\partial u}{\partial r}. \tag{2.2}$$

Из зависимостей (1.1), (2.2) для компонент напряжений с точностью до слагаемых второго порядка малости по u' получаем

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = -(p + 2\mu) - (b + \mu)(u')^2/2 = -s,$$
$$\sigma_{zz} = -s + \mu(u')^2, \qquad \sigma_{rz} = \mu u'.$$

Согласно условиям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0$$

s является функцией только z, поэтому $s = az + a_0$. Для того чтобы напряжения σ_{rr}, $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz} были конечными при $z \to \infty$, необходимо положить $a = 0$. Тогда решение упругой задачи имеет вид

$$\sigma_{rz} = c/r, \qquad \sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = -a_0, \qquad \sigma_{zz} = -a_0 + c^2/(\mu r^2),$$
$$u = F(c,r), \qquad F(c,r) = (c/\mu)\ln(r/R). \tag{2.3}$$

Для отыскания компоненты перемещения используем первое граничное условие (2.1). Постоянную c определим с использованием условия выхода напряженного состояния на поверхность нагружения (1.4). В рассматриваемом случае данное условие сначала выполняется на поверхности $r = r_0$ в форме

$$\sigma_{rz}\big|_{r=r_0} = -k.$$

Отсюда получаем $c = -kr_0$. Постоянная a_0 влияет только на распределение компонент нормальных напряжений (задаваемое обжатие слоя), поэтому ее можно считать заданной величиной, которая в процессе пластического течения может как оставаться постоянной, так и изменяться со временем. Согласно выражениям (2.1) величина u_0, на которую необходимо сдвинуть внутреннюю поверхность, для того чтобы на ней началось пластическое течение, равна $u_0 = (k/\mu)r_0 \ln(R/r_0)$.

В соответствии с выражением (1.2) компоненты обратимых деформаций вычисляются по найденному полю перемещений:

$$e_{rz} = d_{rz} = \frac{1}{2}\,u' = -\frac{kr_0}{2\mu r}, \qquad e_{rr} = -\frac{3}{2}\,e_{rz}^2, \qquad e_{zz} = \frac{1}{2}\,e_{rz}^2. \tag{2.4}$$

3. Вязкопластическое течение. Начиная с момента времени $t_0 = 0$ внутренняя жесткая поверхность движется со скоростью $v = \alpha t$. При этом развивающаяся область вязкопластического течения ограничена поверхностями $r = r_0$ и $r = r_1(t)$ ($r_0 \leqslant r \leqslant r_1(t)$). В области $r_1(t) \leqslant r \leqslant R$ материал по-прежнему деформируется обратимо, т. е. поверхность $r = r_1(t)$ является движущейся границей области развивающегося вязкопластического течения. Вычислим параметры напряженно-деформированного состояния, соответствующего скорости $v^* = \alpha t_1$ ($t_1 \geqslant 0$) при $r = r_0$.

Интегрируя уравнения равновесия (квазистатическое приближение), как и выше, в области обратимого деформирования $r_1(t) \leqslant r \leqslant R$ находим

$$\sigma_{rz} = b/r, \qquad u(r, t_1) = F(b, r), \qquad v = 0, \qquad b = c(t_1). \tag{3.1}$$

Вследствие непрерывности компонент упругих деформаций на упругопластической границе $r = r_1(t)$ две последние зависимости из (2.4) справедливы и в области вязкопластического течения. Тогда согласно формуле Мурнагана (1.3) при $p_{ij} \neq 0$ для компонент напряжений в данной области имеем

$$\begin{gathered} \sigma_{rr} = -(p_1 + 2\mu) - 2(b + \mu)e_{rz}^2 = -s_1(t), \\ \sigma_{zz} = -s_1(t) + 4\mu e_{rz}^2, \qquad \sigma_{rz} = 2\mu e_{rz}. \end{gathered} \tag{3.2}$$

В то же время, интегрируя уравнения равновесия и используя условие непрерывности компонент напряжений на упругопластической границе $r = r_1(t)$, в области вязкопластического течения $r_0 \leqslant r \leqslant r_1(t)$ для компонент напряжений получаем те же зависимости, что и в упругой области.

Пластический потенциал (1.4) можно записать в форме

$$f(\sigma_{rz}, \varepsilon_{rz}^p) = \sigma_{rz}^2 - (k - \eta\varepsilon_{rz}^p)^2 = 0.$$

Следуя ассоциированному закону пластического течения, находим

$$\sigma_{rz} = -k + \eta\varepsilon_{rz}^p, \qquad \lambda = \varepsilon_{rz}^p/(\eta\varepsilon_{rz}^p - k). \tag{3.3}$$

Сравнение соотношений (3.2), (3.3) позволяет найти скорость пластических деформаций

$$\varepsilon_{rz}^p = (b/r + k)/\eta. \tag{3.4}$$

Учитывая, что на упругопластической границе $r = r_1(t)$, $\varepsilon_{rz}^p = 0$, получаем

$$r_1 = -b/k. \tag{3.5}$$

С использованием кинематических зависимостей

$$\begin{gathered} \frac{dd_{rz}}{dt} = \frac{\partial d_{rz}}{\partial t} = \frac{1}{2}\,v', \qquad r_{zr} = -r_{rz} = \frac{1}{2}\,v', \\ \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\,v' = \varepsilon_{rz}^e + \varepsilon_{rz}^p = \frac{\partial e_{rz}}{\partial t} + \frac{\partial p_{rz}}{\partial t}, \qquad \varepsilon_{rr}^p = \frac{dp_{rr}}{dt} + 2p_{rz}(r_{zr} + \varepsilon_{rz}^p), \\ \varepsilon_{zz}^p = \frac{dp_{zz}}{dt} + 2p_{rz}(r_{rz} + \varepsilon_{rz}^p), \qquad \varepsilon_{rr}^p = -\varepsilon_{zz}^p = -2\varepsilon_{rz}^p e_{rz}, \end{gathered}$$

имеющих место в рассматриваемом случае, находим скорости точек в области вязкопластического течения:

$$v = G(b, r, r_0) + v^*, \qquad G(b, r, r_0) = 2(b\ln(r/r_0) + k(r - r_0))/\eta. \tag{3.6}$$

Из условия равенства скоростей (3.1), (3.6) на упругопластической границе $r = r_1(t)$ для определения значения r_1, соответствующего значению скорости $v^* = \alpha t_1$ на поверхности $r = r_0$, получаем уравнение

$$G(b, r_1, r_0) + v^* = 0. \tag{3.7}$$

Перемещение в области необратимого деформирования находится интегрированием (3.6) с точностью до произвольной функции $q(r)$:

$$u = tG(b, r, r_0) + v^* t + q(r). \tag{3.8}$$

Функция $q(r)$ должна быть такой, чтобы перемещения в (3.1), (3.8) и их производные u' при $r = r_1$ были непрерывны, а перемещения в (2.3), (3.8) при $t = 0$ совпадали. Данным условиям удовлетворяет функция

$$q(r) = F(b, r). \tag{3.9}$$

Таким образом, окончательное решение задачи о вязкопластическом течении в упругой области $r_1(t) \leqslant r \leqslant R$ описывается зависимостями (3.1), (3.5), в области вязкопластического течения — зависимостями (3.6), (3.8), (3.9). Напряжения, а следовательно, и обратимые деформации в области вязкопластического течения вычисляются по тем же зависимостям, что и в упругой области. Необратимые деформации находятся из системы уравнений, в рассматриваемой постановке следующей из формулы (1.2):

$$-2e_{rz}^2 + p_{rr} - 2e_{rz}p_{rz} = -0{,}5(u')^2,$$
$$p_{zz} - 2e_{rz}p_{rz} = 0, \qquad e_{rz} + p_{rz} = 0{,}5u'.$$

В результате получаем

$$p_{rz} = kt(1 - r_1/r)/\eta, \qquad p_{rr} = 2e_{rz}(e_{rz} + p_{rz}) - (u')^2/2,$$
$$p_{zz} = 2e_{rz}p_{rz}, \qquad e_{rz} = -kr_1/(2\mu r).$$

Развитие области вязкопластического течения $(r_1/R)(\tau)$ $(\tau = \alpha t^2/r_0)$ при $r_0/R = 0{,}2$, $k/\mu = 0{,}006\,21$, $y = (\mu/\eta)\sqrt{r_0/\alpha} = 100$ показано на рис. 1. На рис. 2 приведено распределение перемещений u/R при $r_1/R = 0{,}8$.

4. Торможение. Пусть начиная с некоторого момента времени $t = t_1$ скорость поверхности $r = r_0$ уменьшается, например по закону

$$v = \alpha t_1 - \beta(t - t_1), \tag{4.1}$$

до нуля, т. е. конечным моментом торможения является момент времени $t_k = (\alpha/\beta + 1)t_1$. Рассмотрим изменение параметров напряженно-деформированного состояния в каждый момент времени $t_1 \leqslant t^* \leqslant t_k$.

Начиная с момента времени $t = t_1$ в материале имеется три области: область упругого деформирования $r_1 \leqslant r \leqslant R$, область с неизменяющимся тензором необратимых деформаций $r_2(t) \leqslant r \leqslant r_1$ и область продолжающегося вязкопластического течения $r_0 \leqslant r \leqslant r_2(t)$ ($r_2(t)$ — граница области). В первой области справедливы зависимости (3.1) с текущим значением $g = c(t^*)$ функции $c(t)$. В области $r_2(t) \leqslant r \leqslant r_1$ при неизменном тензоре необратимых деформаций его компоненты p_{rr}, p_{zz} должны изменяться согласно уравнениям переноса в (1.1). При этом скорости необратимых деформаций ε_{rr}^p и ε_{zz}^p ($\varepsilon_{rr}^p = -\varepsilon_{zz}^p$) также продолжают изменяться. Неизменной остается компонента деформаций p_{rz} ($\varepsilon_{rz}^p = 0$):

$$p_{rz} = kt_1(1 - r_1/r)/\eta.$$

Определив из условия равенства перемещений при $r = r_1$ постоянную интегрирования, из условия $u' = 2(e_{rz} + p_{rz})$ найдем перемещение в данной области:

$$u = F(g, r) + t_1 G(b, r, r_1).$$

Тогда скорость в данной области равна $v = \dot{u} = 0$.

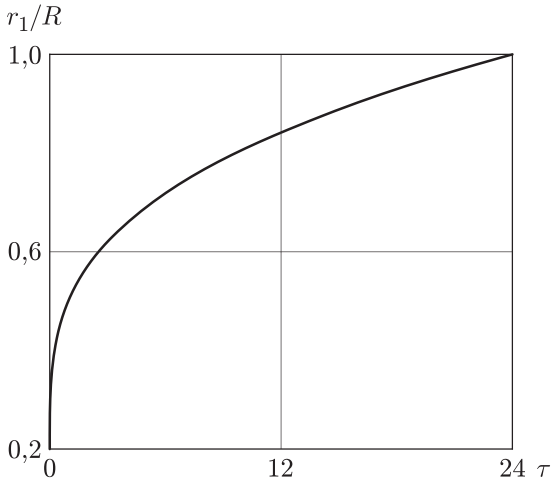

Рис. 1

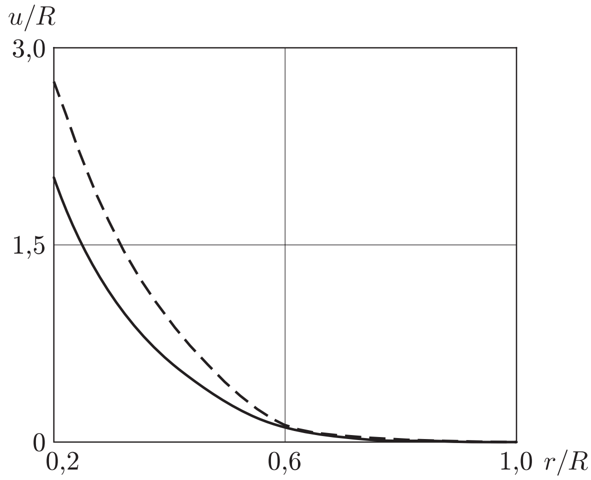

Рис. 2

Рис. 1. Закон движения границы области вязкопластического течения для случая увеличивающейся скорости движения жесткой поверхности

Рис. 2. Распределения перемещений при движении внутренней поверхности со скоростью $v = v^*$ (сплошная линия) и в момент торможения при $\tau = 12{,}5$ (штриховая линия) для $r_1/R = 0{,}8$, $r_2/R = 0{,}6$

В области продолжающегося вязкопластического течения $r_0 \leqslant r \leqslant r_2(t)$ находим

$$\varepsilon^p_{rz} = (g/r + k)/\eta, \qquad r_2 = -g/k, \qquad v = G(g, r, r_0) + v^* - \beta(t^* - t_1),$$
$$u = (t - t_1)G(g, r, r_0) + v^* t - \beta t(t^* - t_1) + q_1(r).$$

Из условий непрерывности перемещения и его производных при $r = r_2$ определим $q_1(r)$ и получим уравнение для определения значения r_2, соответствующего значению скорости $v^* - \beta(t^* - t_1)$ поверхности $r = r_0$:

$$q_1(r) = t_1 G(b, r, r_1) + F(g, r), \qquad G(g, r_2, r_0) + v^* - \beta(t^* - t_1) = 0. \tag{4.2}$$

В данной области компонента пластических деформаций p_{rz} определяется соотношением

$$p_{rz} = \frac{k(t - t_1)}{\eta}\Big(1 - \frac{r_2}{r}\Big) + \frac{kt_1}{\eta}\Big(1 - \frac{r_1}{r}\Big).$$

На рис. 3 показано изменение поверхности $r = r_2$ ($\alpha/\beta = 1/4$). Видно, что в конечный момент торможения $t = t_k$ поверхность r_2 совпадает с поверхностью $r = r_0$. Отсюда следует, что в области $r_0 \leqslant r \leqslant r_1$ компонента p_{rz} деформаций будет постоянной, а значение компоненты остаточных напряжений $\sigma_{rz} = -kr_0/r$ совпадает с ее значением в момент начала пластического течения. Распределение перемещений в момент торможения ($\tau = 12{,}5$) показано на рис. 2 (штриховая линия).

5. Деформирование при движении внешнего цилиндра. Рассмотрим деформирование упруговязкопластического материала в случае, когда внешний жесткий цилиндр движется, в то время как внутренний цилиндр остается неподвижным:

$$u(r_0, t) = v(r_0, t) = 0, \qquad v(R, t) = \alpha t.$$

Пластическое течение также начинается в окрестности внутренней жесткой стенки при выполнении условия пластичности $\sigma_{rz}\big|_{r=r_0} = k$. Компоненты напряжения вычисляются по соотношениям (2.3), в момент начала пластического течения $c = kr_0$, a_0 — значение

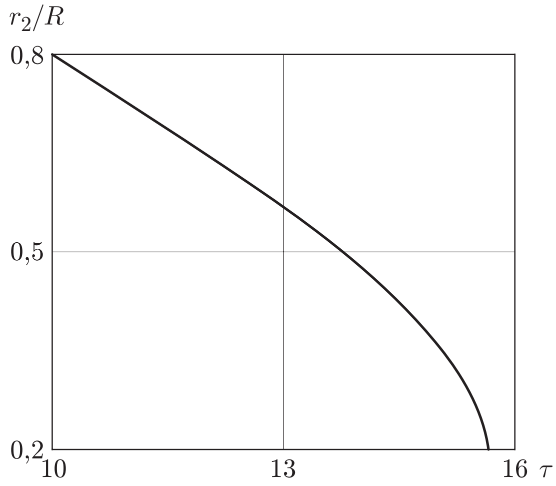

Рис. 3. Закон движения границы области вязкопластического течения для случая уменьшающейся скорости движения жесткой поверхности

компоненты напряжений σ_{rr} на поверхности $r = R$. Таким образом, значение параметра начала пластического течения u_0 равно значению этого параметра при движении внутренней поверхности.

При дальнейшем изменении скорости внешней поверхности область вязкопластического течения, где $\sigma_{rz} = k + \eta\varepsilon^p_{rz}$, определяется неравенствами $r_0 \leqslant r \leqslant r_1(t)$, в области $r_1(t) \leqslant r \leqslant R$ деформирование обратимо. В данном случае для перемещений и скоростей получаем следующие зависимости:

— в области $r_1(t) \leqslant r \leqslant R$

$$u = (kr_1/\mu)\ln(r/r_0) + t\,G_1(b_1, r_1, r_0), \qquad v = \alpha t_1; \tag{5.1}$$

— в области $r_0 \leqslant r \leqslant r_1(t)$

$$u = (kr_1/\mu)\ln(r/r_0) + tG_1(b_1, r, r_0), \qquad v = G_1(b_1, r, r_0). \tag{5.2}$$

При этом

$$G_1(b_1, r_1, r_0) = 2(b_1\ln(r_1/r_0) - r_1 + r_0)/\eta, \qquad b_1 = kr_1.$$

Используя условие непрерывности скоростей (5.1), (5.2) на границе области вязкопластического течения $r = r_1$, для случаев движения внутреннего и внешнего цилиндров получаем одинаковые уравнения движения данной границы (3.7), несмотря на то что компоненты скоростей и перемещений различны.

Согласно выражению (4.1) при изменении скорости движения внешней поверхности компоненты перемещений и скоростей находятся по следующим соотношениям:

— в области упругого деформирования $r_1 \leqslant r \leqslant R$

$$u = (kr_2/\mu)\ln(r/r_0) + t_1G_1(b_1, r_1, r_0) + (t - t_1)G_1(g_1, r_2, r_0), \qquad g_1 = kr_2,$$
$$v = \alpha t_1 - \beta(t^* - t_1);$$

— в области с неизменяющимся тензором необратимых деформаций $r_2(t) \leqslant r \leqslant r_1$

$$\begin{gathered} u = (kr_2/\mu)\ln(r/r_0) + t_1G_1(b_1, r, r_0) + (t - t_1)G_1(g_1, r_2, r_0), \\ v = \alpha t_1 - \beta(t^* - t_1); \end{gathered} \tag{5.3}$$

— в области вязкопластического течения $r_0 \leqslant r \leqslant r_2(t)$

$$\begin{gathered} u = (kr_2/\mu)\ln(r/r_0) + t_1G_1(b_1, r, r_0) + (t - t_1)G_1(g_1, r, r_0), \\ v = G_1(g_1, r, r_0). \end{gathered} \tag{5.4}$$

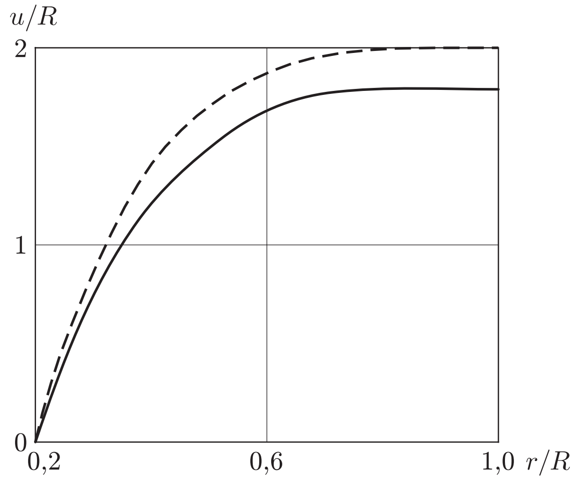

Рис. 4. Распределения перемещений при движении внешней поверхности со скоростью $v = v^*$ (сплошная линия) и в момент торможения при $\tau = 10{,}6$ (штриховая линия) для $r_1/R = 0{,}8$, $r_2/R = 0{,}6$

Как и при увеличении скорости внешнего цилиндра, уравнение движения границы $r = r_2$, полученное из условия равенства скоростей (5.3), (5.4) при $r = r_2$, совпадает со вторым уравнением в (4.2), несмотря на различие компонент скоростей и перемещений для случаев движения внутреннего и внешнего цилиндров.

На рис. 4 показаны распределения перемещений при нагружении и в момент торможения.

Таким образом, приведено аналитическое решение краевой задачи о прямолинейном движении материала в зазоре между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями при больших упругопластических деформациях.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мясников В. П.** Некоторые точные решения для прямолинейных движений вязкопластической среды // ПМТФ. 1961. № 2. С. 54–60.
2. **Огибалов П. М.** Нестационарные движения вязкопластичных сред / П. М. Огибалов, А. Х. Мирзаджанзаде. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1970.
3. **Быковцев Г. И., Чернышов А. Д.** О вязкопластическом течении в некруговых цилиндрах при наличии перепада давления // ПМТФ. 1964. № 4. С. 94–96.
4. **Буренин А. А., Быковцев Г. И., Ковтанюк Л. В.** Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // Докл. АН. 1996. Т. 347, № 2. С. 199–201.
5. **Ковтанюк Л. В.** Моделирование больших упругопластических деформаций в неизотермическом случае // Дальневост. мат. журн. 2004. Т. 5, № 1. С. 107–117.
6. **Ковтанюк Л. В., Шитиков А. В.** О теории больших упругопластических деформаций при учете температурных и реологических эффектов // Вестн. ДВО РАН. 2006. № 4. С. 87–93.
7. **Мясников В. П.** Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестн. ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8–13.
8. **Знаменский В. А., Ивлев Д. Д.** Об уравнениях вязкопластического тела при кусочно-линейных потенциалах // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1963. № 6. С. 114–118.
9. **Быковцев Г. И., Семыкина Т. Д.** О вязкопластическом течении круглых пластин и оболочек вращения // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1964. № 4. С. 68–76.

Поступила в редакцию 20/I 2009 г.,
в окончательном варианте — 27/IV 2009 г.