

УДК 536.25, 532.68

## **Численное моделирование естественной конвекции в лежащей капле жидкости\***

**М.В. Барташевич, И.В. Марчук, О.А. Кабов**

*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск*

E-mail: bartashevichmv@gmail.com

Численно исследован теплообмен в лежащей капле жидкости. Разработан программный комплекс, позволяющий решать задачи конвекции в осесимметричной полусферической капле, а также в сферическом слое. Задача на установление равновесного состояния в капле решается в переменных: температура, функция тока, вихрь скорости. Проведены расчеты для капель воды, этилового спирта и модельных жидкостей. Варьировались: интенсивность теплоотдачи от поверхности капли, безразмерные критерии Рэлея и Марангони, а также характерный перепад температуры. Установлено, что зависимость интенсивности конвективного течения от интенсивности теплоотдачи на поверхности капли имеет максимум. Получена двухвихревая структура в неподвижном полусферическом профиле капли жидкости при сравнимых значениях поверхностных термокапиллярных и объемных термогравитационных сил. Показано, что доминирующим в структуре течения может быть как термокапиллярный, так и термогравитационный вихри.

**Ключевые слова:** лежащая капля, конвективный теплообмен, термоконвекция.

### **Введение**

Многочисленные работы посвящены изучению термокапиллярной конвекции в сферической области [1], в испаряющейся лежащей на подогреваемой поверхности капле жидкости, а также явлению пиннинга трехфазной линии контакта, когда угол смачивания меняется с изменением объема капли, при этом положение линии контакта фиксировано и площадь смоченного пятна остается постоянной [2–6]. В работе [7] представлены точные решения нестационарной сопряженной задачи термокапиллярной конвекции и теплопереноса в слое жидкости со свободными границами. Построенные решения позволяют изучить течение слоя теплопроводной жидкости в условиях невесомости в случае, когда на свободных границах слоя учитывается касательное напряжение, индуцированное внешней средой.

Стационарная задача о конвективном течении с недеформируемой термокапиллярной свободной границей в прямоугольной каверне в условиях земной гравитации и невесомости рассматривалась в работе [8], предполагалось, что источником тангенциальной силы на свободной поверхности является газовый поток. Точное решение близкой математической задачи о конвекции в области со свободной границей в условиях спутного потока газа получено в работах [9, 10].

---

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды проектов 10-01-00007, 09-08-01127) и при поддержке Министерства образования и науки РФ (ГК 14.740.11.0103).

Приведено обобщенное решение Бириха для жидкого слоя с недеформируемой свободной границей, с постоянным градиентом температуры на границах.

В модели тонкой, интенсивно испаряющейся капли [11], растекающейся по равномерно нагретой поверхности, учтены термокапиллярный эффект, расклинивающее давление, гравитация для случаев полного и частичного смачивания. В работе [12] исследовано влияние гравитации на форму капли, радиус смоченного каплей пятна, а также представлены расчеты конвективного движения жидкости в неизотермической капле.

Анализ динамики вихревых структур в испаряющейся капле капиллярного размера вследствие действия сил Марангони на поверхности капли проведен в исследованиях [13]. Нестационарный процесс испарения капель чистых жидкостей (в том числе воды, этанола) в сухой газ в потоке экспериментально и численно рассмотрен в [14]. Капля также является объектом для изучения смачивания и явлений вблизи линии контакта [15, 16]. В работе [17] проведен анализ эволюции многовихревой структуры течения в капле полимера.

Сегодня активно разрабатываются [3, 18] математические модели, включающие сопряженный теплообмен в капле, подложке и окружающей газопаровой смеси, учитывающие фазовые превращения. Из гидродинамических соображений система испаряющейся капли, подложки и окружающей газопаровой смеси абсолютно неустойчива, а протекающие в ней процессы строго нестационарны. По мере нагрева в капле развивается естественная конвекция, с прогревом поверхности интенсифицируется испарение, далее возможно возникновение пиннинга [5] и полное высыхание капли.

Настоящая работа посвящена численному анализу режимов свободно-конвективного теплопереноса в лежащей на подогреваемой подложке капле жидкости (вода, этиловый спирт). Цель работы — рассмотреть процесс установления в лежащей капле теплового баланса при постоянной температуре подложки в различных режимах теплоотдачи от поверхности, оценить влияние термокапиллярных и термогравитационных сил на характер и интенсивность конвективного течения, провести сравнительный анализ процесса тепловой гравитационно-капиллярной конвекции в различных тепловых режимах.

### **Постановка задачи**

Для численного эксперимента постановка задачи и расчётная область определялись условиями реального эксперимента [19]. Рассмотрим каплю жидкости постоянного объема, лежащую на горизонтальной поверхности в поле силы тяжести, направленной перпендикулярно подложке. Явление гистерезиса краевого угла и другие возможные явления вблизи движущейся линии контакта не рассматриваются. Предполагается, что краевой угол контакта постоянен и равен  $90^\circ$ . Предположение о сферичности капли допустимо при рассмотрении капель малого размера, так как известно, что чем меньше размер капель, тем ближе их форма к сферической, а также при исследованиях в условиях пониженной гравитации [19]. Кроме того, когда капля жидкости помещается на подогреваемую подложку и температура подложки больше температуры капли и температуры окружающей среды, силы поверхностного натяжения препятствуют растеканию капли, стягивают ее, уменьшая смоченную область. На подложке температура считается заданной и постоянной, на поверхности капли рассматривается условие теплообмена с окружающей средой. В данной задаче полагаем допустимым пренебрегать влиянием испарения на форму капли вследствие малой интенсивности испарения (незначительный перепад температур, рассмотрение этапа первоначального прогрева капли).

Возможность применения модели Обербека–Буссинеска проверяется критерием микроконвекции  $|g|R^3 > \nu\chi$  [20], где  $g$  — ускорение свободного падения,  $R$  — характерный размер,  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $\chi$  — температуропроводность. Из работы [20] известно, что приближение Обербека–Буссинеска неприменимо в случае  $|g|R^3 < \nu\chi$  (то есть в микромасштабах) для жидкостей с большим произведением коэффициентов вязкости и температуропроводности, для быстро изменяющихся температурных полей и при малых  $g$  оно неприменимо для описания конвекции. В качестве характерного размера  $R$  принят радиус смоченного каплей пятна.

Геометрия и схема расчетной области представлены на рис. 1. Выбор сетки в полярных координатах аналогичен [21]. В случае учета конвективного переноса тепла, в приближении Обербека–Буссинеска в переменных вихря скорости  $\omega$ , функции тока  $\psi$  и температуры  $T$ , в сферической системе координат ( $r = \rho \sin \alpha$ ,  $z = \rho \cos \alpha$ , где  $\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = r/z$ ) движение жидкости описывается системой безразмерных уравнений, аналогичной [1]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + u_\rho \frac{\partial \omega}{\partial \rho} + \frac{u_\alpha}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \frac{1}{\rho} (u_\rho + u_\alpha \operatorname{ctg} \alpha) \omega = \operatorname{Pr} \left( \Delta \omega - \frac{\omega}{\rho^2 \sin^2 \alpha} \right) - \\ \quad - Ra \operatorname{Pr} \left( \sin \alpha \frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{\cos \alpha}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \alpha} \right), \\ \Delta \psi - \frac{2}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \frac{2 \operatorname{ctg} \alpha}{\rho^2} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = \omega \rho \sin \alpha, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_\rho \frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{u_\alpha}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \alpha} = \Delta T. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\Delta = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \sin \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right)$ ; вихрь

выражается через компоненты вектора скорости  $\omega = \frac{1}{\rho} u_\alpha + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \alpha}$ ,

$u_\rho = -\frac{1}{\rho^2 \sin \alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}$ ,  $u_\alpha = \frac{1}{\rho \sin \alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \rho}$ . В качестве характерных величин выбраны:

масштаб длины  $R$  — радиус смоченного каплей пятна, характерная скорость  $V^* = \chi/R$ , характерное время процесса  $t^* = R/V^*$ ,  $\Delta T$  — характерный перепад температуры. Также в (1) входят безразмерные критерии: число Рэлея  $Ra = g\beta_T \Delta T R^3 / (\nu\chi)$ , число Прандтля  $\operatorname{Pr} = \nu/\chi$ , где  $g$  — величина ускорения свободного падения,  $\beta_T$  — коэффициент теплового объемного расширения жидкости,  $\chi$  — температуропроводность,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости.

Граничные условия следующие. На поверхности капли при  $\rho = R$  выполняется:

$$\omega = \operatorname{Ma} \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \frac{2}{R^2 \sin \alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \rho}, \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \rho} = -\operatorname{Bi} T, \quad (2)$$

где  $\operatorname{Ma} = \frac{\Delta T R \sigma_T}{\chi \nu \rho_l}$  — число Марангони,  $\operatorname{Bi} = \frac{\tilde{\alpha} R}{\kappa}$  — число Био,  $\tilde{\alpha}$  — коэффициент теплоотдачи,  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности жидкости,  $\rho_l$  — плотность жидкости,  $\sigma_T < 0$  температурный коэффициент поверхностного натяжения.

На подложке при  $\alpha = \pi/2$  для функции тока выполняются условия, следующие из условия прилипания и непротекания, а также задана постоянная температура  $T_w$  :

$$\psi = 0, \quad \partial\psi/\partial\alpha = 0, \quad T = T_w. \quad (3)$$

Условия на оси симметрии капли соответствуют:

$$\omega = 0, \quad \psi = 0, \quad T = T_w, \quad \text{при } \rho = 0, \quad (4)$$

$$\omega = 0, \quad \psi = 0, \quad \partial T/\partial\alpha = 0, \quad \text{при } \alpha = 0. \quad (5)$$

### Численный метод решения

Задача решалась численно до установления равновесного состояния. Численное решение задачи (1) с граничными условиями (2)–(5) проводилось с использованием продольно-поперечной конечно-разностной схемы, известной как метод переменных направлений [20, 22], имеющей второй порядок аппроксимации. Конвективные члены брались с предыдущего итерационного слоя и аппроксимировались против потока. Поэтому использованная схема имеет первый порядок аппроксимации. Уравнения для вихря скорости и температуры из (1) решались по следующей схеме общего вида:

$$\begin{aligned} \frac{U^{k+1/2} - U^k}{0,5\tau} &= \kappa_U \left[ \Lambda_1 U^k + \Lambda_2 U^{k+1/2} \right] + F^k, \\ \frac{U^{k+1} - U^{k+1/2}}{0,5\tau} &= \kappa_U \left[ \Lambda_1 U^{k+1} + \Lambda_2 U^{k+1/2} \right] + F^k, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $U = (\omega, T)^T$  и  $U^k = U(t^k)$ , разностные операторы  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  аппроксимируют дифференциальные операторы  $\frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}$ ,  $\frac{\text{ctg}\alpha}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}$  со вторым порядком (см. ниже). В выражениях (6)  $\kappa_U = \text{Pr}$  при  $U = \omega$ ;  $\kappa_U = 1$  при  $U = T$ .

В  $F^k$  включаются слагаемые, насчитываемые на предыдущем слое. Определим  $F^k$  при  $U = T$ :

$$F^k = -\Lambda_r T^k,$$

разностный оператор  $\Lambda_r$ , аппроксимирующий конвективные слагаемые против потока с первым порядком аппроксимации, определим позже.

Теперь представим  $F^k$  при  $U = \omega$ :

$$F^k = -\Lambda_r \omega^k + \frac{1}{\rho} (u_\rho^k + u_\alpha^k \text{ctg}\alpha) \omega^k - \text{Pr} \frac{\omega^k}{\rho^2 \sin^2 \alpha} - \text{Ra Pr} \left( \sin \alpha \frac{\partial T^{k+1}}{\partial\rho} + \frac{\cos \alpha}{\rho} \frac{\partial T^{k+1}}{\partial\alpha} \right).$$

Меридианальному сечению капли в цилиндрических координатах  $(r, z)$  соответствует радиально-лучевая сетка в области  $\Omega := \{0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq H(r)\}$ .

При переходе к полярным координатам  $(\alpha, \rho)$  получим прямоугольную область  $\Omega' := \{0 \leq \alpha \leq \pi/2, 0 \leq \rho \leq 1\}$  и равномерную прямоугольную сетку  $(i, j) \in J$  (см. рис. 1):

$$\alpha_i = (i-1)h_\alpha, \quad \rho_j = (j-1)h_\rho, \quad i = 1, \dots, N+1; \quad j = 1, \dots, M+1, \quad h_\alpha = \pi/(2N), \quad h_\rho = R/M.$$

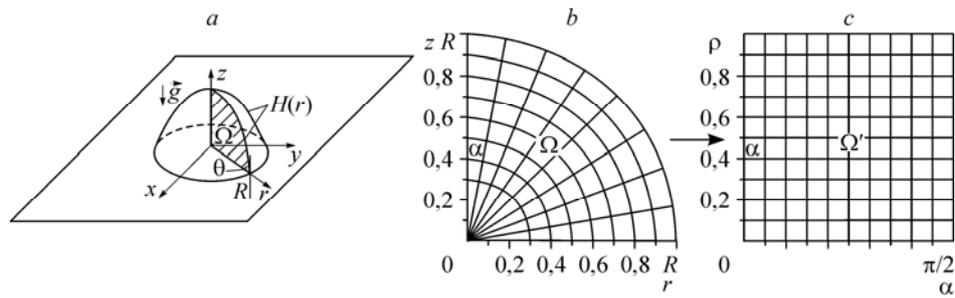


Рис. 1. Геометрия и схема расчетной области: *a* — капля, лежащая на подложке; *b, c* — переход от меридианального сечения капли в цилиндрических координатах (*b*) к расчетной области в сферических координатах (*c*).

В узлах  $(\alpha_i, \rho_j) \in \Omega'$  для значений искомых функций будем использовать обозначения  $f_{i,j} = f(\alpha_i, \rho_j)$ . Имеет место следующее представление оператора Лапласа его разностным аналогом  $\Delta_h$  [22]:

$$\begin{aligned} \Delta_h f_{i,j} &= \Lambda_1 f_{i,j} + \Lambda_2 f_{i,j} \\ \Lambda_1 f_{i,j} &= \frac{\text{ctg} \alpha_i}{\rho_j^2} \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h_\alpha} + \frac{1}{\rho_i^2} \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{h_\alpha^2} \\ \Lambda_2 f_{i,j} &= \frac{2}{\rho_j} \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2h_\rho} + \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{h_\alpha^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Входящие в (1) первые и вторые производные внутри расчетной области аппроксимировались традиционными конечно-разностными аналогами со вторым порядком аппроксимации:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \alpha} &\sim \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h_\alpha}, \quad \frac{\partial f}{\partial \rho} \sim \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2h_\rho}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} &\sim \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{h_\alpha^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} &\sim \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{h_\rho^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для аппроксимации конвективных слагаемых вида  $u_\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{u_\alpha}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \alpha}$  использовалась идея аппроксимации против потока (они брались с предыдущего слоя и включались в правую часть). Разностный оператор  $\Lambda_r$ , аппроксимирующий конвективные слагаемые, определялся следующим образом [20, 23]:

$$\begin{aligned} -\Lambda_r f_{i,j} &= - \left[ (u_\rho)_{i,j} \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h_\rho} + \frac{(u_\alpha)_{i,j}}{\rho_{i,j}} \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2h_\alpha} \right] + \\ &+ \left| u_\rho \right|_{i,j} \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{2h_\rho} + \left| \frac{u_\alpha}{\rho} \right|_{i,j} \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{2h_\alpha}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для решения второго уравнения в (1) — уравнения Пуассона для функции тока — на каждом внешнем итерационном шаге  $k + 1$  применялась внутренняя итерационная схема:

$$\psi_{i,j}^s = \psi_{i,j}^{s-1} + \tilde{\omega}(LK - \psi_{i,j}^{s-1}),$$

$$L = -\text{ctg}\alpha_i \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2h_\alpha \rho_j^2} + \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j}}{\rho_j^2 h_\alpha^2} + \frac{\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}}{h_\rho^2} - \omega_{ij} \sin \alpha_i \rho_j, \quad (10)$$

$$K = \frac{1}{2 \left( \frac{1}{h_\rho^2} + \frac{1}{h_\alpha^2 \rho_j^2} \right)},$$

здесь  $s$  — номер внутренней итерации,  $\tilde{\omega}$  — параметр релаксации, полагавшийся равным 1,8.

Для аппроксимации производных на границе со вторым порядком использовались центральные разности, условие теплоотдачи  $\partial T / \partial \rho$  аппроксимировалось правой разностью, то есть  $(T_{i,N+1} - T_{i,N}) / h_\rho = -Bi T_{i,N+1}$ . Разностный аналог условия на верхней границе (2) имеет вид:

$$\omega_{i,M+1} = \text{Ma} \frac{T_{i+1,M+1} - T_{i-1,M+1}}{2h_\alpha} + \frac{1}{R^2 \sin \alpha_i} \frac{4\psi_{i,M} - \psi_{i,M-1}}{h_\rho},$$

$$\psi_{i,M+1} = 0, \quad (11)$$

$$T_{i,M+1} = T_{i,M} - \text{Bi} \cdot h_\rho T_{i,M+1}.$$

На нижней стенке разностный аналог (3) для температуры:

$$T_{N+1,j} = T_w. \quad (12)$$

На твердой границе считается выполненным уравнение для функции тока, поэтому с учетом того, что функция тока на подложке  $\psi_{N+1,j} = 0$  и  $(\partial \psi / \partial \alpha)_{N+1,j} = 0$ , выполняется следующее условие для вихря скорости на подложке, аналогичное разностным условиям Тома [23], и полученное с использованием разложения Тейлора и уравнения Пуассона для функции тока при  $\alpha = \pi/2$ :

$$\omega_{N+1,j} = \frac{(8\psi_{N,j} - \psi_{N-1,j})}{2\rho_j^3 h_\alpha^2}. \quad (13)$$

Условиям при  $\rho = 0$  и  $\alpha = \pi/2$  (4–5) соответствуют разностные аналоги:

$$\omega_{i,1} = 0, \quad \psi_{i,1} = 0, \quad T_{i,1} = T_w \quad \text{при } \rho = 0 \text{ и}$$

$$\omega_{N+1,j} = 0, \quad \psi_{N+1,j} = 0, \quad T_{N+1,j} = T_w \quad \text{при } \alpha = \pi/2. \quad (14)$$

Численное исследование стационарной задачи проводилось методом установления,  $\tau$  из (6) является итерационным параметром. Соотношения (6) для температуры, вихря скорости и функции тока представляют собой неявные локально-одно-

мерные разностные схемы. Полученные системы разностных уравнений приводят к системам линейных алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами. Для решения этих систем используем метод прогонки [22].

Переход на новый итерационный слой  $t_{k+1} = \tau(k+1)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) начинается с расчета температуры по схеме (6). Затем вычисляется вихрь скорости. На промежуточном слое  $k + 1/2$  осуществляется прогонка в направлении  $\alpha$ , на основном  $k + 1$ -м слое — прогонка в направлении  $\rho$ .

Выбирались следующие начальные значения: для температуры  $T_0 = 0$ , для вихря скорости  $\omega_0 = 0$  и функции тока  $\psi_0 = 0$ . На каждом  $k + 1$ -м итерационном слое проводился внутренний итерационный процесс для вычисления функции тока по схеме (10).

Условиями выхода из итерационного процесса являются, во-первых, достижение баланса тепловых потоков  $I_1, I_2$  (менее 1 %), во-вторых, уменьшение интегральной нормы изменения решения между соседними итерациями до величины, меньшей  $\varepsilon_f$ .

Интегральная норма изменения решения между соседними итерациями определяется как

$$\|f^k - f^{k-1}\| = \sqrt{h_\rho h_\alpha \sum_{i,j} (f_{i,j}^k - f_{i,j}^{k-1})^2} < \varepsilon_f, \quad (15)$$

где  $\varepsilon_f$  заданная точность расчета сеточной функции  $f^k$ .

Кроме того, стационарное решение считается достигнутым, если сделано не менее чем  $K$  внешних итераций и выполнено условие [20]:

$$\max_{i,j} |f_{i,j}^{K+k} - f_{i,j}^K| < \varepsilon_f. \quad (16)$$

То есть на протяжении любых  $k$  итераций, начиная с некоторого  $K$ , решение меняется не больше чем на малую величину  $\varepsilon_f$ . Решение устанавливается и от итерации к итерации не меняется.

Тепловой поток через основание капли вычисляется через разностный аналог интеграла:

$$I_1 = 2\pi \int_0^R \frac{\partial T}{\partial \alpha} d\rho. \quad (17)$$

Тепловой поток через поверхность вычисляется через разностный аналог интеграла:

$$I_2 = 2\pi R^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\partial T}{\partial \rho} \sin \alpha d\alpha. \quad (18)$$

### Результаты и обсуждение

Проведены серии расчетов в режиме тепловой капиллярно-гравитационной конвекции для капли радиуса  $R = 0,5$  мм при различных параметрах теплоотдачи от поверхности ( $Bi = 0,01-4$  для воды и  $Bi = 0,01-10$  для этилового спирта), а также при различных характерных  $\Delta T$ , определяющих соответствующие значения критериев Марангони и Рэлея.

В численных экспериментах при решении поставленной задачи используются постоянные физические свойства веществ, приведенные в табл. 1, составленной

Таблица 1

Свойства веществ при температуре 20 °С

|       | $\nu, \text{м}^2/\text{с}$ | $\kappa, \text{Вт}/\text{м}\cdot\text{К}$ | $\chi, \text{м}^2/\text{с}$ | $\beta_T, 1/\text{К}$ | $\sigma, \text{Н}/\text{м}$ | $\sigma_T, \text{Н}/\text{м}\cdot\text{К}$ | $\rho_p, \text{кг}/\text{м}^3$ |
|-------|----------------------------|---|-----------------------------|-----------------------|-----------------------------|--|--------------------------------|
| спирт | $2,3 \cdot 10^{-6}$        | 0,167                                     | $1,43 \cdot 10^{-7}$        | $1,1 \cdot 10^{-3}$   | $22,5 \cdot 10^{-3}$        | $0,875 \cdot 10^{-4}$                      | 789,3                          |
| вода  | $1,0 \cdot 10^{-6}$        | 0,603                                     | $1,44 \cdot 10^{-7}$        | $1,94 \cdot 10^{-4}$  | $72,8 \cdot 10^{-3}$        | $0,191 \cdot 10^{-3}$                      | 998,1                          |

Таблица 2

Диапазон изменения параметров

|    |             |   |
|----|-------------|---|
| Pr | 6,97        | 16,1  |
| Ma | 3,325–6650  | 0,843–1687  |
| Ra | 16,45–164,5 | $4,10\text{--}41,0, 10,26\cdot 10^3, 10,26\cdot 10^4$ |
| Bi | 0,01–4,0    | 0,01–10,0   |

по [24, 25]. Диапазон варьирования критериев подобия в численных экспериментах представлен в табл. 2.

Коэффициент теплоотдачи от поверхности капли  $\tilde{\alpha}$  варьировался при  $Pr = 16,1$  от 3,34 до 3340  $\text{Вт}/\text{м}^2\cdot\text{К}$  (число Био от 0,01 до 10), при  $Pr = 6,97$  от 12,1 до 4824  $\text{Вт}/\text{м}^2\cdot\text{К}$  (число Био от 0,01 до 4).

Интенсивность конвекции характеризуется, аналогично [1], абсолютной величиной функции тока. На рис. 2 представлены поля скорости и поля температуры (в режиме конвекции и теплопроводности) для капель воды и спирта при земной гравитации  $g = g_0$ ,  $\Delta T = 2,5 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $R = 0,5 \text{ мм}$ . Значения критериев подобия:  $Ma = 1662,81$ ,  $Ra = 4,11$ ,  $Pr = 6,7$ ,  $Bi = 0,1$  — для воды и  $Ma = 421,74$ ,  $Ra = 10,26$ ,

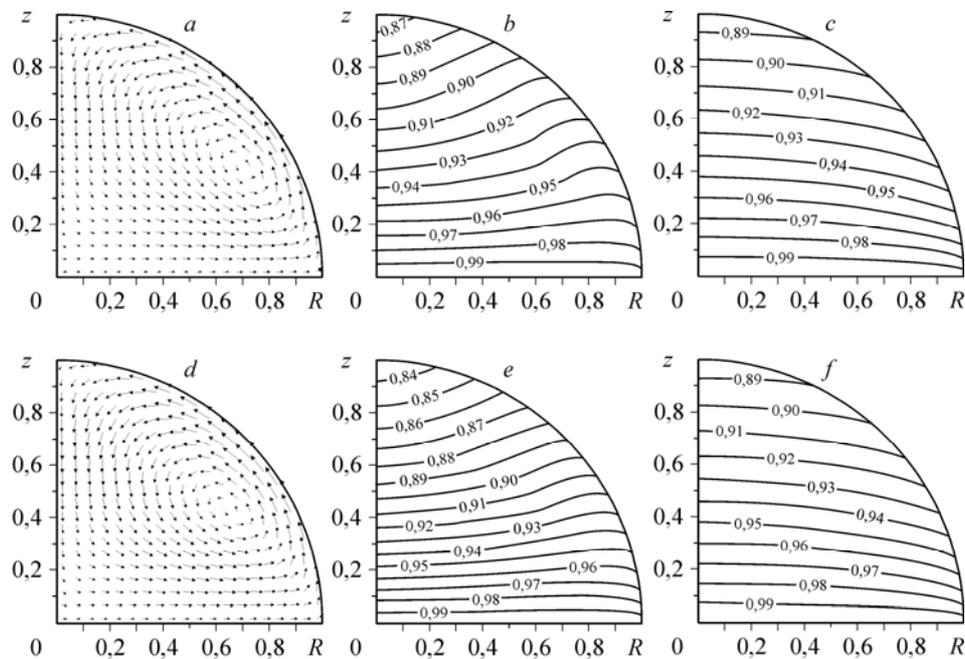


Рис. 2. Поле скорости (a, d), поле температуры в режиме конвекции (b, e), поле температуры в режиме теплопроводности (c, f).

$Ma = 1662,81$ ,  $Ra = 4,11$ ,  $Pr = 6,7$ ,  $Bi = 0,1$  (a-c);  $Ma = 421,74$ ,  $Ra = 10,26$ ,  $Pr = 16,1$ ,  $Bi = 0,1$  (d-f).

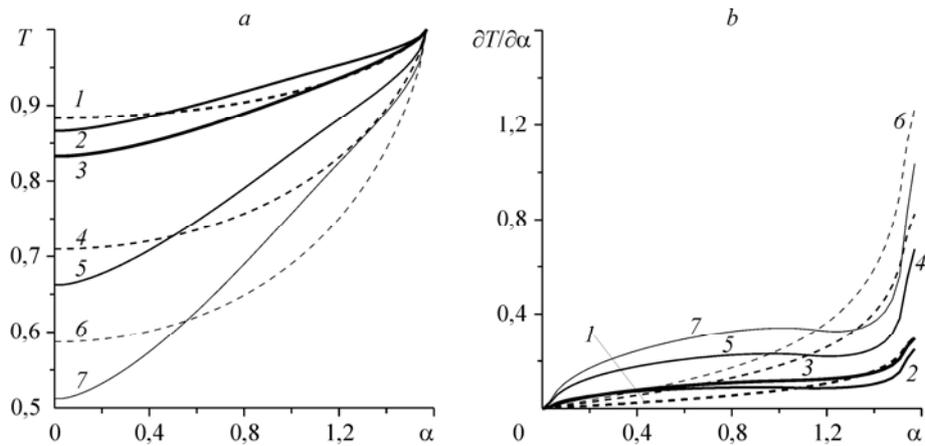


Рис. 3. Эволюция температуры поверхности капли (а) и поверхностного градиента температуры (б) с ростом числа Био.

Штрих-линии — режимы теплопроводности:  $Bi = 0,1$  (1),  $Bi = 0,3$  (4),  $Bi = 0,5$  (6). Сплошные линии — конвективные режимы:  $Ma = 1662,81$ ,  $Ra = 4,11$ ,  $Pr = 6,7$ ,  $Bi = 0,1$  (2);  $Ma = 421,74$ ,  $Ra = 10,26$ ,  $Pr = 16,1$ ,  $Bi = 0,1$  (3);  $Ma = 1662,81$ ,  $Ra = 4,11$ ,  $Pr = 6,7$ ,  $Bi = 0,3$  (5);  $Ma = 1662,81$ ,  $Ra = 4,11$ ,  $Pr = 6,7$ ,  $Bi = 0,5$  (7).

$Pr = 16,1$ ,  $Bi = 0,1$  — для спирта. В этих режимах в профиле капли развивается одновихревая конвективная структура (рис. 2, а, d), инициированная термокапиллярными силами. Видно, что наличие конвективного течения искажает поле температуры в сравнении с режимом теплопроводности. Изменение температуры и градиента температуры вдоль поверхности капли представлено на рис. 3. Самый большой поверхностный градиент температуры наблюдается вблизи подложки, и он убывает с удалением от нее.

Далее для фиксированных  $Pr = 6,7$ ;  $16,1$  варьировались числа Рэлея, Марангони и Био. На рис. 4 представлены поля скорости в профиле капли воды при  $g = g_0$ ,  $\Delta T = 2,5$  °C,  $R = 0,5$  мм ( $Ma = 1662,81$ ,  $Ra = 4,11$ ,  $Pr = 6,7$ ), расположенные по возрастанию числа Био ( $Bi = 0,01$ ;  $0,5$ ;  $1,5$ ). Поле скорости для  $Ma = 1662,81$ ,  $Ra = 4,11$ ,  $Pr = 6,7$ ,  $Bi = 0,1$  представлено на рис. 2, а. С ростом числа Био возрастает поверхностный градиент температуры вблизи подложки (рис. 3), это вызывает смещение конвективного вихря в “угловую” область профиля капли (рис. 4) и последующее снижение интенсивности конвективного течения (рис. 5).

Установлено, что интенсивность конвекции зависит от интенсивности теплоотдачи. Результаты численных расчетов обобщены на рис. 5. Видно, что данная зависимость имеет максимум для  $Ma = 1687,0$ ,  $Ra = 41,05$ ,  $Pr = 16,1$  и  $Ma = 1662,81$ ,  $Ra = 4,11$ ,  $Pr = 6,7$  при  $Bi = 1,3$ .

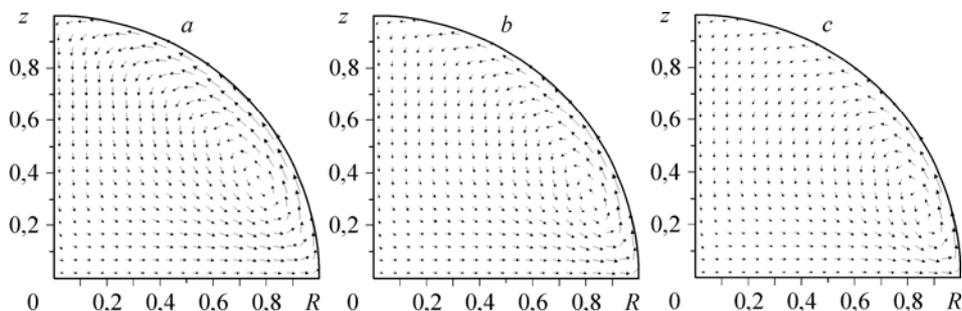


Рис. 4. Поле скорости с ростом числа Био;  $Ma = 1662,81$ ,  $Ra = 4,11$ ,  $Pr = 6,7$ .  $Bi = 0,5$  (а),  $1,5$  (б),  $3,0$  (с).

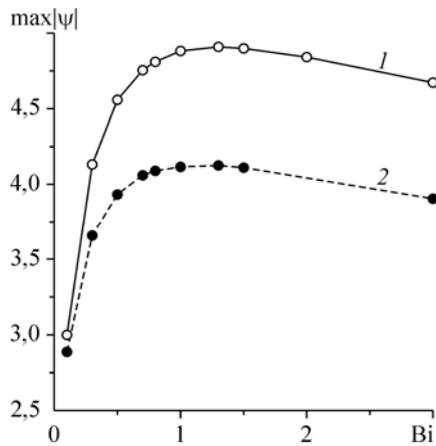


Рис. 5. Интенсивность конвекции при росте теплоотдачи от поверхности капли.

1 —  $Ma = 1687,0$ ,  $Ra = 41,05$ ,  $Pr = 16,1$  ( $g = g_0$ ,  $\Delta T = 10$  °C,  $R = 0,5$  мм); 2 —  $Ma = 1662,8$ ,  $Ra = 4,11$ ,  $Pr = 6,7$  ( $g = g_0$ ,  $\Delta T = 2,5$  °C,  $R = 0,5$  мм).

Вклад термогравитационных сил и, соответственно, развитие возвратного термогравитационного вихря наблюдается для  $Ma = 421,74$ ,  $Pr = 16,1$  ( $\Delta T = 2,5$  °C,  $R = 0,5$  мм, спирт) только при достаточно больших числах Рэлея  $Ra = 10,26 \cdot 10^4$  (рис. 6) или же при фиксированных числах  $Ra = 41,0$ ,  $Pr = 16,1$  ( $\Delta T = 10$  °C,  $R = 0,5$  мм, спирт), но при малом  $Ma = 0,843$  (рис. 7). Механизм смещения термокапиллярного вихря в угловую область на рис. 6, 7 такой же, как и на рис. 4, а именно: рост поверхностного градиента температуры вблизи подложки с ростом числа Био, смещение центра термокапиллярного вихря в угловую область и последующее снижение интенсивности термокапиллярной конвекции (рис. 8, а) вследствие сокращения области данной конвекции. При этом наблюдается постепенное расширение области, охваченной термогравитационным вихрем.

На рис. 8 представлена зависимость интенсивности конвекции от интенсивности теплоотдачи с поверхности капли. Наличие перегиба изображенных кривых на рис. 8, а, б объясняется сменой доминирующего конвективного механизма, вытес-

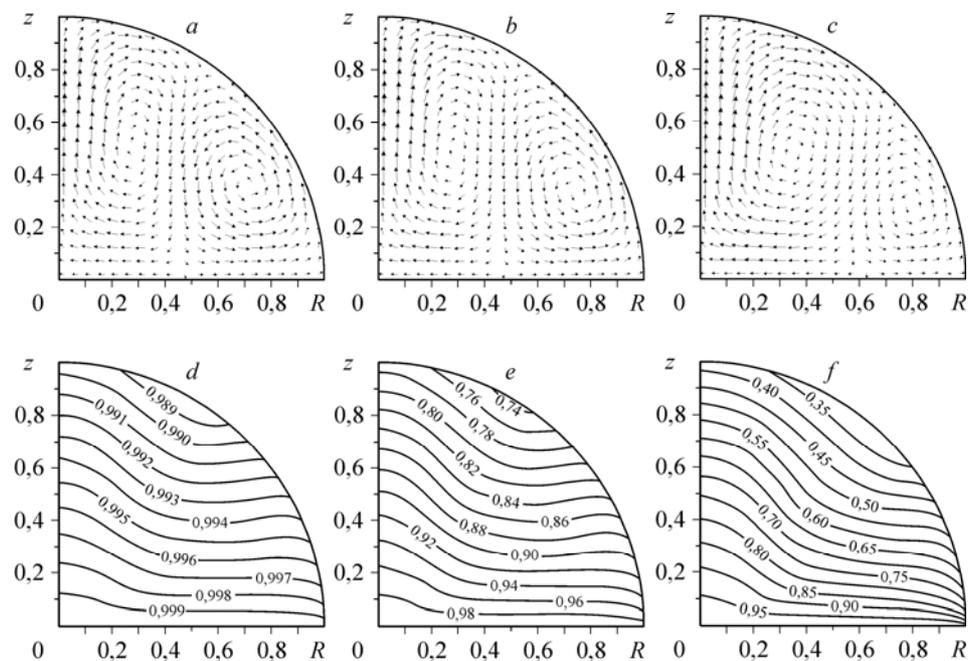


Рис. 6. Поле скорости (а-с) и поле температуры (d-f) при  $Ma = 421,74$ ,  $Ra = 10,26 \cdot 10^4$ ,  $Pr = 16,1$ ;  $Bi = 0,01$  (а, d);  $Bi = 0,3$  (b, e);  $Bi = 2$  (c, f).

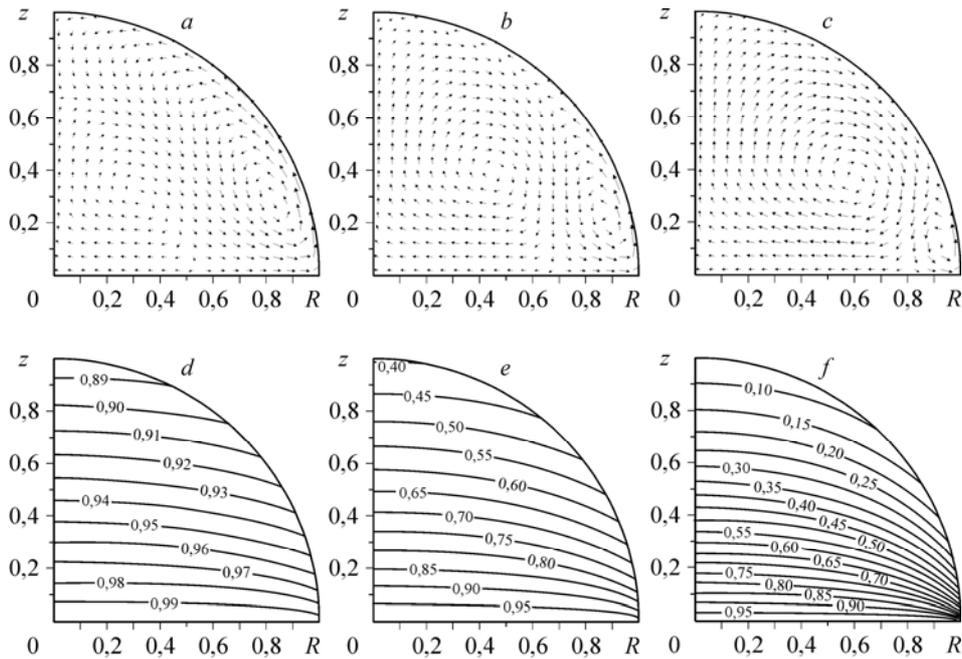


Рис. 7. Поле скорости (a–c) и поле температуры (d–f) при  $Ra = 41,053$ ,  $Ma = 0,843$ ,  $Pr = 16,1$ ;  $Bi = 0,1$  (a, d),  $Bi = 1$  (b, e),  $Bi = 6$  (c, f).

нением термокапиллярного вихря термогравитационным. То есть при  $Bi < 1,3$  (рис. 8, a) и  $Bi < 2$  (рис. 8, b) максимум  $|\psi|$  находится в центре термокапиллярного вихря, а при  $Bi \geq 1,3$  и  $Bi \geq 2$  (рис. 8, a и b, соответственно) — в центре термогравитационного.

### Заключение

Проведено исследование процесса тепловой капиллярно-гравитационной конвекции в профиле лежащей капли. Выполнен сравнительный анализ структуры конвективного течения с ростом теплоотдачи от поверхности.

Обнаружен максимум зависимости интенсивности течения от интенсив-

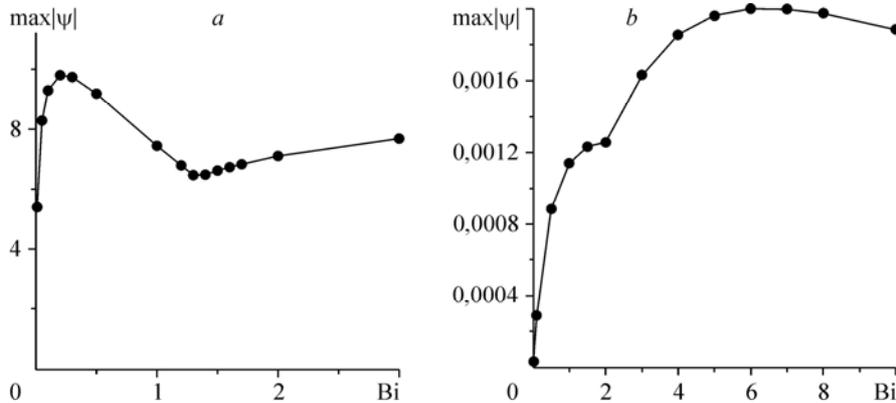


Рис. 8. Интенсивность конвекции при росте теплоотдачи от поверхности капли.  
 a —  $Ma = 421,74$ ,  $Ra = 10,26 \cdot 10^4$ ,  $Pr = 16,1$ ; b —  $Ma = 0,843$ ,  $Ra = 41,0$ ,  $Pr = 16,1$ .

ности теплоотдачи с поверхности капли. Доминирующим в структуре течения может быть как термокапиллярный, так и термогравитационный вихри. Двухвихревая структура в неподвижном полусферическом профиле возможна при сравнимых значениях поверхностных термокапиллярных и объемных термогравитационных сил.

### Список литературы

1. Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Юпцов А.Д. Гидромеханика невесомости / под ред. Мышкиса А.Д. М.: Физматлит, 1976. 504 с.
2. Hu H., Larson R.G. Analysis of the microfluid flow in an evaporating sessile droplet // *Langmuir*, 2005, Vol. 21, No. 9. P. 3963–3971.
3. Ruiz O.E., Black W.Z. Evaporation of water droplets placed on heated horizontal surface // *J. Heat Transfer*. 2002. Vol. 124. P. 855–863.
4. Girard F., Antoni M., Faure S., Steinchen A. Evaporation and Marangoni driven convection in small heated water droplets // *Langmuir*. 2006. Vol. 22, No. 26. P. 11085–11091.
5. Deegan R.D., Bakajin O., Dupont T.F., Huber G., Nagel S.R., Witten T.A. Contact line deposits in an evaporating drop // *Phys. Rev. E*. 2000. Vol. 62. P. 756–765.
6. Brutin D., Zhu Z.Q., Rahli O., Xie J.C., Liu Q.S., Tadrist L. Sessile drop in microgravity: creation, contact angle and interface // *Microgravity sci. technol.* 2009. Vol. 21 (Suppl. 1). P. 67–76.
7. Гончарова О.Н., Кабов О.А. Гравитационно-термокапиллярная конвекция жидкости в горизонтальном слое при спутном потоке газа // *ДАН*. 2009. Т. 426, № 2. С. 183–188.
8. Goncharova O.N., Kabov O.A. Gas flow and thermocapillary effects on fluid flow dynamics in a horizontal layer // *Microgravity Sci. Technol.* 2009. Vol. 21 (Suppl. 1). P. 129–137.
9. Goncharova O.N., Kabov O.A. Deformation of a viscous heat conducting free liquid layer by the thermocapillary forces and tangential stresses: Analytical and numerical modeling // *Microgravity Sci. Technol.* 2010. Vol. 22, No. 3. P. 407–414.
10. Goncharova O.N., Kabov O.A. Mathematical and numerical modeling of convection in a horizontal layer under co-current gas flow // *Int. J. of Heat and Mass Transfer*. 2010. Vol. 53, Is. 13-14. P. 2795–2807.
11. Ajaev V.S. Spreading of thin volatile liquid droplets on uniformly heated surfaces // *J. Fluid Mech.* 2005. Vol. 528. P. 279–296.
12. Bartashevich M.V., Kuznetsov V.V., Kabov O.A. Gravity effect on the axisymmetric drop spreading // *Microgravity Sci. Technol.* 2010. Vol. 22, No. 1. P. 107–114.
13. Barash L.Yu., Bigioni T.P., Vinokur V.M., Shchur L.N. Evaporation and fluid dynamics of a sessile drop of capillary size // *Phys. Rev.* 2009. E 79, P. 046301-16.
14. Терехов В.И., Терехов В.В., Шишкин Н.Е., Би К.Ч. Экспериментальное и численное исследование нестационарного испарения капель жидкости // *ИФЖ*. 2010. Т. 83, № 5. С. 829–836.
15. Жен П.Ж. Смачивание: статика и динамика // *УФН*. 1987. Т. 151, № 4. С. 619–681.
16. Kabeya-Mukeba L., Vandewalle N., Dorbolo S. The evaporation of sessile droplets onto solid surfaces: experiments and simulations of the contact line pinning- depinning // *Sensors and Actuators*. 1997. Vol. 60. P. 202–207.
17. Yoshitake Y., Yasumatsu S., Kaneda M., Nakaso K. Fukai J. Structure of circulation flows in polymer solution droplets receding on flat surfaces // *Langmuir*. 2010. Vol. 26, No. 6. P. 3923–3928.
18. Mollaret, R., Sefiane, K., Christy, J.R.E., Veyret, D. Experimental and numerical investigation of the evaporation into air of a drop on a heated surface // *Chemical Engng Res. Design*. 2004. Vol. 82, Is. 4. P. 471–480.
19. Kabov O.A., Cheverda V., Biondi F., Zaytsev D., Chikov S., Queeckers P., Marengo M., Araneo L., Rioboo R., de Coninck J., Glushchuk A., Bartashevich M.V., Bykovskaya E.F., Bourdon B., Memoli M. Rivulet / droplet dynamics and boiling incipience in microgravity: Results of ESA Parabolic Flights Experiments // *Fifth Inter. Topical Team Workshop on Two-Phase Systems for Ground and Space Applications*, Kyoto, Japan, September 26-29, 2010. Book of Abstracts, P. 61.
20. Андреев В.К., Гапоненко Ю.А., Гончарова О.Н., Пухначев В.В. Современные математические модели конвекции. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 368 с.
21. Берковский Б.М., Полевиков В.К. Вычислительный эксперимент в конвекции, Минск: Университетское, 1988. 167 с.
22. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 552 с.
23. Роч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 618 с.
24. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. 2 изд., доп. и перераб. М.: Наука, 1972. 720 с.
25. Стабников В.Н., Ройтер Т.М., Протсюк Т.В. Этиловый спирт. М.: Пищевая пром., 1976. 272 с.

*Статья поступила в редакцию 28 декабря 2010 г.*