

4°. $\varepsilon(u) = 1$. В этом случае к операторам (2) добавляются сразу три новых

$$X_3 = t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4 = 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - u \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = t^2 \frac{\partial}{\partial t} + tx \frac{\partial}{\partial x} + (x - ut) \frac{\partial}{\partial u}$$

5°. Если $\varepsilon = 0$, то алгебра Ли оказывается бесконечномерной: уравнение (1) допускает любой оператор вида

$$X = \psi(t, x, u) \frac{\partial}{\partial t} + [u\psi + t f(u, x - ut) + \varphi(u, x - ut)] \frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial u}$$

с произвольными функциями f, φ, ψ .

Для построения инвариантных решений на указанных группах необходимо знать оптимальные системы каждой группы, т. е. ограничиться построением лишь существенно различных решений [1]. Опуская выкладки, приводим результат — оптимальные системы каждой группы и вид решения (см. таблицу, в которой указаны операторы подгрупп и вид решения).

Л. В. Овсянниковым было отмечено, что решение задачи групповой классификации для уравнения или равносильной ему системы уравнений первого порядка может привести к различным результатам. В рассматриваемом случае классификация была выполнена двумя способами: для уравнения (1) и для равносильной системы из двух уравнений первого порядка. Результат оказался одинаковым.

Поступила 25 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1962.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ЯМЕ

Л. М. Симуни (Ленинград)

Рассматривается движение вязкой несжимаемой жидкости в плоской прямоугольной яме, вызванное движением плоскости (фиг. 1). Система уравнений Навье — Стокса введением функции тока сводится обычным образом к уравнению

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + R \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} \right) = \Delta (\Delta \psi) \quad \left(u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (1)$$

Здесь u, v — безразмерные составляющие скорости, x, y, t — безразмерные аргументы, R — число Рейнольдса.

Предположим, что плоскость AH движется по закону

$$u = 1 - e^{-k_1 t} \quad (k_1 = \text{const})$$

Размерные скорости v_{ξ}, v_{η} и аргументы τ, ξ, η связаны с безразмерными равенствами

$$u = \frac{v_{\xi}}{U}, \quad v = \frac{v_{\eta}}{U}, \quad y = \frac{\eta}{h}, \quad x = \frac{\xi}{h}, \quad t = \frac{\tau v}{h^2} \quad (U = \text{const})$$

Уравнение (1) решаем с граничными и начальными условиями

$$\begin{aligned} \psi &= 1/2 (1 - e^{-k_1 t}) \quad \text{на } BCDEFG \\ \partial \psi / \partial y &= 0 \quad \text{на } BC, DE \text{ и } FG \quad \partial \psi / \partial x = 0 \quad \text{на } AB, CD, EF \text{ и } GI \\ \psi &= 1/2 (1 - e^{-k_1 t}) y^2 \quad \text{на } AB \text{ и } GH \quad \psi = 0, \partial \psi / \partial y = 1 - e^{-k_1 t} \quad \text{на } AH \\ \psi &= 0 \quad \text{при } t = 0 \end{aligned}$$

Таким образом, предполагаем, что

$$u = (1 - e^{-k_1 t}) y, \quad v = 0 \quad \text{на линиях } AB \text{ и } GH$$

Уравнение (1) сводим к системе

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + R \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \Delta \varphi, \quad \Delta \psi = \varphi \quad (2)$$

Заменим производные в системе (2) конечно-разностными отношениями. Вводим производственно-временную сетку (t_n, x_i, y_k) , где $t_n = n \Delta t$, $x_i = i \Delta x$, $y_k = k \Delta y$ ($n = 0, 1, 2, \dots, i = 0, 1, 2, \dots, I; k = 0, 1, 2, \dots, K$).

Получаем разностную систему

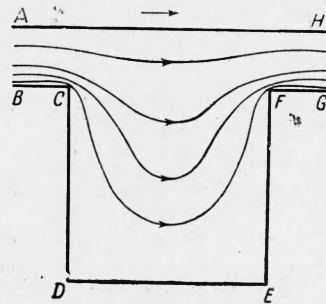
$$\begin{aligned} \varphi_{i,k}^{n+1} = \varphi_{i,k}^n + \Delta t \left\{ \frac{\varphi_{i,k+1}^n + \varphi_{i,k-1}^n}{(\Delta y)^2} + \frac{\varphi_{i+1,k}^n + \varphi_{i-1,k}^n}{(\Delta x)^2} - \frac{2[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] \varphi_{i,k}^n}{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2} - \right. \\ \left. - R \left(\frac{\psi_{i,k+1}^n - \psi_{i,k-1}^n}{2\Delta y} \frac{\varphi_{i+1,k}^n - \varphi_{i-1,k}^n}{2\Delta x} - \frac{\psi_{i-1,k}^n - \psi_{i-1,k}^n}{2\Delta x} \frac{\varphi_{i,k+1}^n - \varphi_{i,k-1}^n}{2\Delta y} \right) \right\} \quad (3) \\ (\psi_{i+1,k}^{n+1} + \psi_{i-1,k}^{n+1}) (\Delta y)^2 + (\psi_{i,k+1}^{n+1} + \psi_{i,k-1}^{n+1}) (\Delta x)^2 - \\ - 2[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] \psi_{i,k}^{n+1} = \varphi_{i,k}^{n+1} (\Delta x)^2 (\Delta y)^2 \end{aligned}$$

Предположим, что в некоторый момент t_n во всех точках сеточной области известны значения величин $\varphi_{i,k}^n$ и $\psi_{i,k}^n$. По формуле (3) определяем значения величин $\varphi_{i,k}^{n+1}$ во внутренних точках области. Далее определяем значения величины $\psi_{i,k}^{n+1}$, решая разностный аналог (4) уравнения Пуассона. Граничные значения величин $\varphi_{i,k}^{n+1}$ определяем по формулам, полученным впервые А. Томом [1]. Для стенки $y = 0$ эта формула имеет вид

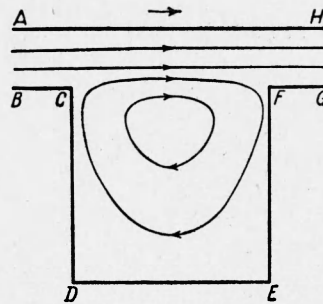
$$\varphi_{i,0}^{n+1} = \frac{2[\psi_{i,1}^{n+1} - (1 - e^{-k_1 t_{n+1}}) \Delta y]}{(\Delta y)^2}$$

Аналогичные формулы получаются для других границ. Получены они разложением величины $\psi_{i,k}^{n+1}$ в приграничной точке в ряд Тейлора и использованием второго уравнения системы (2) на границе. Вычисления проводились для следующих случаев (все размеры отнесены к ширине канала AB).

1. Движение жидкости в квадратной каверне $AB = 1, BC = FG = 1, CD = DE = 3^{1/3}$ (фиг. 1). а) Число $R = 0$ (без учета инерционных членов). Во все моменты времени наблюдается симметричная, относительно линии симметрии каверны, картина течения, существенно меняющаяся при изменении времени. Линии тока, соответствующие течению в различные моменты времени, изображены на фиг. 1—2.



Фиг. 1. $R = 0; h_1 = 2; t = 0.2$



Фиг. 2. $R = 0; h_1 = 2; t = 2$

Видно, что в начальные моменты времени линии тока не замкнуты и существует обмен жидкости всего объема каверны с внешним потоком (фиг. 1). С увеличением времени в пристеночной области каверны появляется область возвратного течения, которая и захватывает постепенно всю каверну (фиг. 2).

б) Число $R = 100$. Движение в начальные моменты при $R = 100$ схоже с движением при $R = 0$, однако зарождение обратных токов происходит, в первую очередь, у левой стенки при движении подвижной плоскости вправо. Развитие течения происходит несимметрично, и ядро вторичного потока смещено вправо.

с) Число $R = 500$. Картина течения качественно мало отличается от картины течения при $R = 100$. В установившемся течении заметен угловой вихрь (фиг. 3).

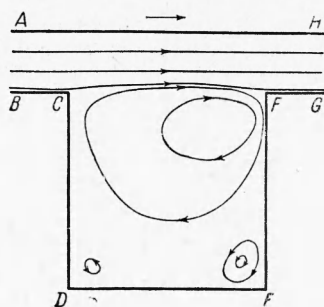
2. Движение жидкости в глубокой каверне $AB = 1, BC = FG = 1, CD = 6^{2/3}, DE = 3^{1/3}$. а) Число $R = 100$. В начальные моменты (до $t = 0.2$ при $k = 2$) происходит движение всей жидкости в одну сторону (как на фиг. 1 — для квадратной каверны).

Постепенно происходит развитие двух областей возвратного течения, переходящее в стационарную картину (фиг. 4).

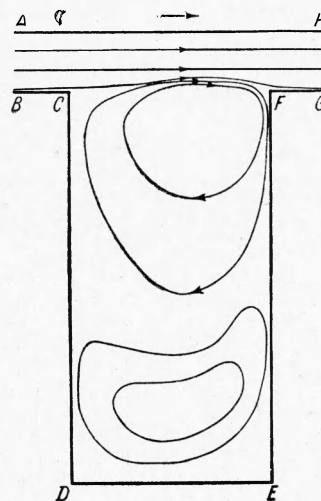
б) Число $R = 500$. Течение развивается аналогично тому, как оно развивается при $R = 100$, однако асимметрия его увеличивается. Область придонного течения для $R = 500$ больше, чем для $R = 100$.

3. Движение жидкости в мелкой каверне $AB = 1$, $BC = FC = 1$, $CD = 1\frac{2}{3}$, $DE = 3\frac{1}{3}$. а) Число $R = 100$. Картина течения сходна с картиной, получающейся в квадратной каверне. Ядро вторичного течения сдвинуто в направлении движения подвижной плоскости.

б) Число $R = 500$. Ядро вторичного течения смещается еще больше, а в противоположном углу появляется еще одна область замкнутого течения. Скорости течения у стенки CD весьма малы и движение близко к застойному (фиг. 5).



Фиг. 3. $R = 500$; $k_1 = 2$; $t = 1.5$



Фиг. 4. $R = 100$; $k_1 = 2$; $t = 2$

Для решения во всех рассмотренных случаях характерны некоторые общие с гидродинамической точки зрения черты. Вторичные течения возникают раньше для больших чисел Рейнольдса (по безразмерному времени). Безразмерная скорость на линии CF при увеличении числа Рейнольдса уменьшается: так, максимальные значения u_* скорости $u = \partial\psi / \partial y$ на прямой линии, соединяющей точки C и F , для различных значений числа Рейнольдса (в квадратной каверне) соответственно будут при $R = 0, 100, 500$, $u_* = 0.20, 0.17, 0.13$.

Такой же характер изменения скорости сохраняется и для других случаев.

Вычисления проводились с $\Delta x = 0.1$, $\Delta y = 0.1$; $\Delta x = 0.1$, $\Delta y = 0.05$ и $\Delta x = 0.05$, $\Delta y = 0.05$. Картина течения при этом не менялась, лишь вторичный вихрь в углу CDE на фиг. 3 удалось обнаружить только в мелкой сетке. Шаг по времени Δt менялся в процессе счета для сохранения устойчивости при возрастании скоростей. Окончательно выбиралось для квадратной каверны

$$\begin{aligned} \Delta t &= 0.25 \cdot 10^{-2} \text{ при } R = 0 \\ \Delta t &= 0.625 \cdot 10^{-3} \text{ при } R = 100 \\ \Delta t &= 0.625 \cdot 10^{-4} \text{ при } R = 500 \end{aligned}$$

Результаты показывают, что при помощи численных методов можно обнаружить интересные особенности вязких течений. Все расчеты выполнены на машине БЭСМ-2 Вычислительного центра Ленинградского отделения Математического института АН СССР.

Поступила 27 VII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Том А., Эйплт К. Д. Числовые расчеты полей в технике и физике. Изд. «Энергия», 1964.
2. Kawaguti M. Numerical solution of the Navier-Stokes equation for the flow in a two-dimensional cavity. J. Phys. Soc. Japan, 1964, vol. 16, No. 3.
3. Симони Л. М. Численное решение некоторых задач движения вязкой жидкости. Инж. ж., 1964, т. 14, № 3.