ПМТФ, № 3, 1967

НЕОДНОРОДНАЯ УПРУГАЯ СРЕДА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

И. А. Кунин

(Новосибирск)

В [1] рассматривалась макроскопически однородная упругая среда простой структуры с пространственной дисперсией. При этом предположения о существовании элементарной единицы длины и сил дальнодействия обусловили нелокальность теории, а макроскопическая однородность проявилась в инвариантности интегральных операторов относительно сдвига (разностные ядра).

В настоящей работе строится более общая модель неоднородной упругой среды простой структуры с нелокальным взаимодействием. В § 1 доказывается существование при широких предположениях симметричного тензора напряжений и записывается соответствующий операторный закон Гука. Как следствие, получается обычное выражение для плотности упругой энергии. В § 2 рассматривается случай точечных дефектов. Находится явное выражение тензора Грина для среды с точечными дефектами через тензор Грина для однородной среды. При помощи тензора Грина вычисляется собственная энергия дефекта и энергия силы взаимодействия.

1. Будем, как и в [1], предполагать, что состояние среды полностью определяется заданием поля смещения $u_\alpha(x)$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ (простая структура), где x — точка среды. Введем обозначения [1]

$$\langle u \mid f\rangle = \int \overline{u(x)}\, f(x)\, dx = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \overline{u(k)}\, f(k)\, dk = \overline{\langle f \mid u\rangle}$$

$$\langle u \mid \Phi \mid f\rangle = \iint \overline{u(x)}\, \Phi(x, x')\, f(x')\, dx\, dx' =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\iint \overline{u(k)}\, \Phi(k, k')\, f(k')\, dk\, dk' = \overline{\langle f \mid \Phi^+ \mid u\rangle} \qquad (1.1)$$

где u, f, Φ должны удовлетворять некоторым ограничениям теоретико-функционального характера для того, чтобы соответствующие функционалы имели смысл.

В этих обозначениях наиболее общая модель неоднородной линейно-упругой среды простой структуры описывается лагранжианом

$$2L = \langle u_\alpha^{\cdot} \mid \rho g^{\alpha\beta} \mid u_\beta^{\cdot}\rangle - \langle u_\alpha \mid \Phi^{\alpha\beta} \mid u_\beta\rangle + 2\langle u_\alpha \mid q^\alpha\rangle \qquad (1.2)$$

Здесь $\rho(x)$ — плотность, $g^{\alpha\beta}(x)$ — метрический тензор, $q^\alpha(x)$ — плотность внешних сил и $\Phi^{\alpha\beta}(x, x')$ — ядро оператора упругой энергии, которое можно также интерпретировать как матрицу силовых констант [1]. При этом, очевидно, должно выполняться условие эрмитовости $\Phi = \Phi^+$, или, в более подробной записи,

$$\Phi^{\alpha\beta}(x, x') = \Phi^{\beta\alpha}(x', x), \qquad \Phi^{\alpha\beta}(k, k') = \overline{\Phi^{\beta\alpha}(k', k)} \qquad (1.3)$$

---

[1] Здесь и в дальнейшем $u(k)$ обозначает фурье-образ $u(x)$, понимаемый, если нужно, в смысле обобщенных функций; $\Phi(k, k')$ — фурье-образ $\Phi(x, x')$ по x и фурье-прообраз по x'; $\Phi^+(k, k') = \overline{\Phi(k', k)}$, где черта — комплексное сопряжение.

Соответствующие уравнения движения имеют вид

$$\rho(x) g^{\alpha\beta}(x) \ddot{u}_\beta(x) - \int \Phi^{\alpha\beta}(x, x') u_\beta(x') dx' = q^\alpha(x) \qquad (1.4)$$

В [1] было показано, что в однородной среде простой структуры с нелокальным взаимодействием можно ввести симметричный тензор напряжений. Этот вывод представляется не вполне тривиальным, так как во многих работах (см., например, [2-5]) утверждалось, что если в среде простой структуры учитывать зависимость энергии не только от деформации, но и от ее градиента [1], то необходимо вводить несимметричный тензор напряжений. Аналогичный вопрос возникает в случае неоднородной среды с нелокальным взаимодействием.

Предположим сначала, что среда неоднородна лишь в конечной области. Тогда в декартовой системе координат справедливо однозначное представление

$$\Phi^{\alpha\beta}(x, x') = \Phi_0^{\alpha\beta}(x - x') + \Phi_1^{\alpha\beta}(x, x'), \qquad \rho(x) = \rho_0 + \rho_1(x) \qquad (1.5)$$

где $\Phi_0^{\alpha\beta}(x)$, ρ_0 — характеристики однородной среды, а функции $\Phi_1^{\alpha\beta}(x, x')$, $\rho_1(x)$ — финитны.

Теорема. В неоднородной среде простой структуры с нелокальным взаимодействием в предположении (1.5) можно ввести симметричный тензор напряжений, связанный с тензором деформации операторным законом Гука, и плотность энергии, причем последняя обычным образом выражается через напряжение и деформацию.

Доказательство. Из условий инвариантности энергии относительно трансляции и вращения следует представимость $\Phi_0^{\alpha\beta}(k, k')$ в виде [1]

$$\Phi_0^{\alpha\beta}(k, k') = k_\nu k_\mu c_0^{\nu\alpha\mu\beta}(k)\, \delta(k - k') \qquad (1.6)$$

где $c_0^{\nu\alpha\mu\beta}(k)$ — тензор, симметричный по первой паре индексов, а $c_0^{\nu\alpha\mu\beta}(0)$ — тензор упругих констант длинноволнового приближения, симметричный по парам $\nu\alpha$, $\mu\beta$ и по их перестановке. Покажем, что можно без ограничения общности считать, что $c_0^{\nu\alpha\mu\beta}(k)$ симметричен также по второй паре и эрмитов по перестановке пар [2].

Предположим, что это не так, и пусть

$$c_0^{\nu\alpha\mu\beta}(k) = c_0^{\nu\alpha(\mu\beta)}(k) + c_0^{\nu\alpha[\mu\beta]}(k) \qquad (1.7)$$

Здесь круглые и квадратные скобки обозначают, как обычно, симметрирование и альтернирование. Очевидно, $c_0^{\nu\alpha[\mu\beta]}(0) = 0$, и, следовательно, учитывая аналитичность $c_0^{\nu\alpha\mu\beta}(k)$

$$c_0^{\nu\alpha[\mu\beta]}(k) = k_\lambda c_0^{\nu\alpha\mu\beta\lambda}(k) \qquad (1.8)$$

где $c_0^{\nu\alpha\mu\beta\lambda}(k)$ — тензор, антисимметричный по $\mu\beta$. Соответствующее выражение для упругой энергии Φ_0 можно теперь записать в виде

$$2\Phi_0 = \langle u_\alpha | \Phi_0^{\alpha\beta} | u_\beta \rangle = \langle \varepsilon_{\nu\alpha} | c_0^{\nu\alpha(\mu\beta)} | \varepsilon_{\mu\beta} \rangle + \langle \varepsilon_{\nu\alpha} | c_0^{\nu\alpha\mu\beta\lambda} | k_\lambda \Omega_{\mu\beta} \rangle \qquad (1.9)$$

---

[1] Можно показать, что такая модель соответствует приближенному учету нелокальности (слабая пространственная дисперсия).

[2] Эта возможность осталась незамеченной в [1].

Здесь $\varepsilon_{\nu\alpha}(k) = -ik_{(\nu}u_{\alpha)}(k)$ — деформация, $\Omega_{\mu\beta}(k) = -ik_{[\mu}u_{\beta]}(k)$ — вращение. Первый член в правой части (1.9) не изменится, если $c_0^{\nu\alpha(\mu\beta)}(k)$ заменить тензором

$$a_1^{\nu\alpha\mu\beta} = \frac{1}{2}[c_0^{\nu\alpha(\mu\beta)} + \overline{c_0^{(\mu\beta)\nu\alpha}}] \tag{1.10}$$

имеющим нужную симметрию. Учитывая тождество $k_\lambda\Omega_{\mu\beta}(k) = 2k_{[\mu}\varepsilon_{\beta]\lambda}$, перепишем второй член в (1.9) в виде

$$\langle \varepsilon_{\nu\alpha} | a_2^{\nu\alpha\mu\beta} | \varepsilon_{\mu\beta} \rangle$$

где

$$a_2^{\nu\alpha\mu\beta} = \frac{1}{2} k_\lambda (c_0^{\nu\alpha\lambda\mu\beta} + c_0^{\nu\alpha\lambda\beta\mu} + \overline{c_0^{\mu\beta\lambda\nu\alpha}} + \overline{c_0^{\beta\mu\lambda\nu\alpha}}) \tag{1.11}$$

также имеет симметрию $a_1^{\nu\alpha\mu\beta}$. Наконец, объединяя оба члена, получаем требуемый результат.

Перейдем к члену $\Phi_1^{\alpha\beta}(x, x')$ в (1.5). Из предположения о его финитности следует, что $\Phi_1^{\alpha\beta}(k, k')$ — целая аналитическая функция k, k'. При помощи рассуждений, аналогичных приведенным в [1], легко показывается, что условие инвариантности энергии относительно трансляции эквивалентно требованию представимости $\Phi_1^{\alpha\beta}(k, k')$ в виде

$$\Phi_1^{\alpha\beta}(k, k') = k_\nu k_\mu' \psi^{\alpha\beta\nu\mu}(k, k') \tag{1.12}$$

Здесь $\psi^{\alpha\beta\nu\mu}(k, k')$ — целая аналитическая функция, однозначно определяемая заданием $\Phi_1^{\alpha\beta}(k, k')$ и удовлетворяющая условиям эрмитовости

$$\psi^{\alpha\beta\lambda\mu}(k, k') = \overline{\psi^{\beta\alpha\mu\lambda}(k', k)} \tag{1.13}$$

Пусть среда подвергнута действию некоторой уравновешенной системы внешних сил и пусть $u_\beta(k)$ — соответствующее смещение. Тогда из требования инвариантности энергии относительно дополнительного вращения среды как целого находится условие на $\psi^{\alpha\beta\nu\mu}$ (тензор $c_0^{\nu\alpha\mu\beta}$ этому условию удовлетворяет)

$$\mathrm{Re}\,\langle \Omega_{\nu\alpha}^* | \psi^{\alpha\beta\nu\mu} | k_\mu' u_\beta \rangle = 0 \tag{1.14}$$

Здесь $\Omega_{\nu\alpha}^*(k) = a_{\nu\alpha}\delta(k)$ — инфинитезимальное вращение, заданное антисимметричным тензором $a_{\nu\alpha}$. Из (1.14) следует, что тензор

$$\psi_1^{\alpha\beta\nu\mu}(k') = \psi^{\alpha\beta\nu\mu}(0, k') \tag{1.15}$$

симметричен по индексам $\nu\alpha$.

Запишем $\psi^{\alpha\beta\nu\mu}(k, k')$ в виде

$$\psi^{\alpha\beta\nu\mu}(k, k') = \psi_1^{\alpha\beta\nu\mu}(k') + \psi_2^{\alpha\beta\nu\mu}(k, k') \tag{1.16}$$

где, очевидно, $\psi_2^{\alpha\beta\nu\mu}(0, k') = 0$. Следовательно,

$$\psi_2^{\alpha\beta\nu\mu}(k, k') = k_\lambda \psi_2^{\alpha\beta\nu\lambda\mu}(k, k') \tag{1.17}$$

При этом для однозначного определения $\psi_2^{\alpha\beta\nu\lambda\mu}(k, k')$ по заданному $\Phi_1^{\alpha\beta}(k, k')$ необходимо потребовать симметрию по индексам $\nu\lambda$.

Определим тензор

$$c_1^{\nu\alpha\mu\beta}(k, k') = \psi_1^{\alpha\beta\nu\mu}(k') + k_\lambda [\psi_2^{\alpha\beta\nu\lambda\mu}(k, k') + \psi_2^{\nu\beta\alpha\lambda\mu}(k, k') - \psi_2^{\lambda\beta\alpha\nu\mu}(k, k')] \tag{1.18}$$

Из свойств $\psi_1{}^{\alpha\beta\nu\mu}$ и $\psi_2{}^{\alpha\beta\nu\lambda\mu}$ следует симметрия $c_1{}^{\nu\alpha\mu\beta}$ по первой паре индексов.

Непосредственно проверяется тождество

$$\Phi_1{}^{\alpha\beta}(k, k') = k_\nu k_\mu' \psi^{\alpha\beta\nu\mu}(k, k') = k_\nu k_\mu' c_1{}^{\nu\alpha\mu\beta}(k, k') \tag{1.19}$$

Выкладки, аналогичные проведенным для $c_0{}^{\nu\alpha\mu\beta}$, показывают, что $c_1{}^{\nu\alpha\mu\beta}$ в (1.19) можно заменить тензором, имеющим симметрию $c_0{}^{\nu\alpha\mu\beta}$. Сохраним для него то же обозначение $c_1{}^{\nu\alpha\mu\beta}$ и положим

$$c^{\nu\alpha\mu\beta}(x, x') = c_0{}^{\nu\alpha\mu\beta}(x - x') + c_1{}^{\nu\alpha\mu\beta}(x, x') \tag{1.20}$$

Для упругой энергии Φ теперь имеем

$$2\Phi = \langle \varepsilon_{\nu\alpha} \,|\, c^{\nu\alpha\mu\beta} \,|\, \varepsilon_{\mu\beta} \rangle \tag{1.21}$$

Отсюда следует, что уравнения движения записываются в виде

$$\rho(x)\, \delta^{\alpha\beta} \ddot{u}_\beta(x) - \partial_\nu \sigma^{\nu\alpha}(x) = q^\alpha(x) \tag{1.22}$$

где

$$\sigma^{\nu\alpha}(x) = \int c^{\nu\alpha\mu\beta}(x, x')\, \varepsilon_{\mu\beta}(x')\, dx' \tag{1.23}$$

Очевидно, симметричный тензор $\sigma^{\nu\alpha}$ может быть интерпретирован как тензор напряжений, а соотношение (1.23) — как операторный закон Гука.

Наконец, из (1.21) при учете (1.23) находим, что величина

$$\varphi(x) = {}^1\!/_2\, \sigma^{\nu\alpha}(x)\, \varepsilon_{\nu\alpha}(x) \tag{1.24}$$

инвариантная относительно вращения среды как целого, является плотностью упругой энергии. Теорема доказана.

Замечания. 1. Выражение (1.24) показывает, что тензор напряжений в данном случае, в полном соответствии с локальной теорией упругости, можно также определить как обобщенную силу, соответствующую обобщенному перемещению — тензору деформаций.

2. Из доказательства следует, что условие финитности $\Phi_1{}^{\alpha\beta}(x, x')$ не является необходимым. Его можно ослабить, предполагая лишь аналитичность $\Phi_1{}^{\alpha\beta}(k, k')$.

3. То обстоятельство, что смещение — единственная функция, определяющая состояние среды, было существенно использовано при доказательстве. Поэтому последнее не распространяется на случаи внутренних напряжений и среды сложной структуры.

2. Рассмотрим представляющую интерес для приложений модель точечных дефектов в однородной среде с пространственной дисперсией.

Предполагается существование в среде элементарной единицы длины a. Это равносильно предположению, что фурье-образы допустимых функций отличны от нуля лишь в некоторой конечной окрестности B начала координат k-пространства [1]. Так, для правильной решетки область B трехмерный тор, а для изотропной среды (дебаевская модель) — шар. Во всех случаях характерный размер области B имеет порядок a^{-1}.

Отметим одно важное следствие существования элементарной единицы длины. В классе допустимых функций роль δ-функции играет регулярная функция $\delta_B(x)$, конкретный вид которой зависит только от области B. Например, для изотропной модели ($r = |x|$, $\varkappa = \pi a^{-1}$)

$$\delta_B(x) = \frac{\varkappa}{2\pi^2 r^2} \left(\frac{\sin \varkappa r}{\varkappa r} - \cos \varkappa r \right) \tag{2.1}$$

а для правильной решетки выражение для $\delta_B(x)$ приведено в [1]. При $a \to 0$ δ-функция совпадает с обычной. В дальнейшем индекс B для δ-функции будет опускаться.

Предположим сначала, что в среде имеется единственный дефект в точке $x = x_0$, и ограничимся пока случаем статики. Тогда простейшая модель точечного дефекта может быть представлена в виде ($v = a^3$)

$$c^{\nu\alpha\mu\beta}(x, x') = c_0^{\nu\alpha\mu\beta}(x - x') + vc_1^{\nu\alpha\mu\beta}\delta(x - x_0)\delta(x' - x_0) \qquad (2.2)$$

Здесь тензор $c_1^{\nu\alpha\mu\beta}$ имеет размерность модулей упругости и характеризует изменение упругих свойств среды в окрестности дефекта. Сравнение с (1.13) показывает, что $c_1^{\nu\alpha\mu\beta}$, с точностью до множителя v, совпадает с $\psi_1^{\alpha\beta\nu\mu}(0)$, а $\psi_2^{\alpha\beta\lambda\nu\mu} = 0$. Учитывая симметрию $\psi_1^{\alpha\beta\nu\mu}$ и соотношение (1.8), заключаем, что $c_1^{\nu\alpha\mu\beta}$ симметричен по индексам первой и второй пары и по перестановке пар, т. е. имеет симметрию обычного тензора упругих констант. Отметим, что более сложная модель точечного дефекта получится, если в (2.2) добавить члены с производными δ-функции.

Считая известным тензор Грина $\overset{\circ}{G}_{\alpha\beta}(x - x')$ для однородной среды [1], построим тензор Грина $G_{\alpha\beta}(x, x')$ для среды с дефектом.

Из (1.15) при учете (2.2) и (1.16) находим уравнение для статического тензора Грина

$$\partial_\nu \int c_0^{\nu\lambda\mu\alpha}(x - y)\,\partial_\mu G_{\alpha\beta}(y, x')\,dy +$$

$$+ vc_1^{\nu\lambda\mu\alpha}\partial_\nu\delta(x - x_0)\,\partial_\mu G_{\alpha\beta}(x_0, x') = -\delta_\beta^\lambda\delta(x - x') \qquad (2.3)$$

Применение к обеим частям $\overset{\circ}{G}_{\alpha\beta}(x - x')$ дает

$$G_{\alpha\beta}(x, x') - vc_1^{\nu\mu\tau\lambda}\partial_\nu \overset{\circ}{G}_{\alpha\mu}(x - x_0)\,\partial_{(\tau}G_{\lambda)\beta}(x_0, x') = \overset{\circ}{G}_{\alpha\beta}(x - x') \qquad (2.4)$$

В это выражение входит неизвестная величина $\partial_{(\tau}G_{\lambda)\beta}(x_0, x')$. Для ее нахождения возьмем симметрированный градиент от обеих частей равенства и положим $x = x_0$. Получим алгебраическое уравнение

$$[\delta_{(\varkappa}{}^\tau\delta_{\alpha)}{}^\lambda + v\overset{\circ}{g}_{\varkappa\alpha\nu\mu}c_1^{\nu\mu\tau\lambda}]\,\partial_{(\tau}G_{\lambda)\beta}(x_0, x') = \partial_{(\varkappa}\overset{\circ}{G}_{\alpha)\beta}(x_0 - x') \qquad (2.5)$$

где

$$\overset{\circ}{g}_{\varkappa\alpha\nu\mu} = -[\partial_\varkappa\partial_\nu\overset{\circ}{G}_{\alpha\mu}(0)]_{(\varkappa\alpha)(\nu\mu)} \qquad (2.6)$$

Решая уравнение (2.5) и подставляя результат в (2.4), запишем окончательное выражение для $G_{\alpha\beta}(x, x')$ в виде

$$G_{\alpha\beta}(x, x') = \overset{\circ}{G}_{\alpha\beta}(x - x') + \partial_\nu\overset{\circ}{G}_{\alpha\mu}(x - x_0)\,P^{\nu\mu\lambda\tau}\partial_\lambda\overset{\circ}{G}_{\beta\tau}(x_0 - x') \qquad (2.7)$$

Входящий сюда постоянный тензор $P^{\nu\mu\lambda\tau}$ имеет симметрию тензора упругих констант и определяется формулой

$$P^{\nu\mu\lambda\tau} = (\overset{\circ}{g}_{\nu\mu\lambda\tau} + v^{-1}b_{\nu\mu\lambda\tau})^{-1} \qquad (2.8)$$

здесь $b_{\nu\mu\lambda\tau}$ — тензор, обратный $c_1^{\nu\mu\lambda\tau}$.

При выводе выражения для $G_{\alpha\beta}(x, x')$ было неявно использовано предположение о существовании элементарной единицы длины. В результате этого предположения $\overset{\circ}{G}_{\alpha\beta}(x)$ — целая аналитическая функция [1] и производные в нуле конечны. Из (2.7) следует, что $G_{\alpha\beta}(x, x')$ — также целая функция x, x'. В то же время $G_{\alpha\beta}(x, x')$ неаналитически зависит от пара-

[1] В случае изотропной среды и, в частности, для дебаевской модели выражение для $\overset{\circ}{G}_{\alpha\beta}(x)$ может быть записано в явном виде.

метра a. Легко показать, что $\nabla G^\circ(0) \sim a^{-2}$, $g^\circ \sim v^{-1}$ и, следовательно, $P \sim v$. При $a \to 0$ второй член в (2.7) для точек $x, x' \neq x_0$ стремится к нулю, как a^3, для точек $x = x_0$, $x' \neq x_0$ или $x \neq x_0$, $x' = x_0$, как a, и стремится к бесконечности, как a^{-1}, для точки $x = x_0$, $x' = x_0$.

Построение динамического тензора Грина для точечного дефекта может быть проведено аналогичным образом. При этом целесообразно отдельно рассмотреть два случая. Если плотность постоянна и дефект обусловлен лишь изменением упругих свойств среды, то выражение для динамического тензора Грина $G_{\alpha\beta}(x, x', \omega)$, где ω — частота, совпадает с (2.7) при замене $\overset{\circ}{G}_{\alpha\beta}(x)$ динамическим тензором Грина однородной среды $\overset{\circ}{G}_{\alpha\beta}(x,\omega)$. Соответственно P будет функцией ω, определяемой соотношением (2.8).

В другом случае, когда $c(x, x') = c_0(x - x')$, а плотность имеет вид

$$\rho(x) = \rho_0 + v\rho_1\delta(x - x_0) \tag{2.9}$$

для тензора Грина находим

$$G_{\alpha\beta}(x, x', \omega) = \overset{\circ}{G}_{\alpha\beta}(x - x', \omega) + \overset{\circ}{G}_{\alpha\nu}(x - x_0, \omega)\, P^{\nu\mu}(\omega)\, \overset{\circ}{G}_{\mu\beta}(x_0 - x', \omega) \tag{2.10}$$

где

$$P^{\nu\mu}(\omega) = [(v\rho_1\omega^2)^{-1}\delta_{\nu\mu} - \overset{\circ}{G}_{\nu\mu}(0, \omega)]^{-1} \tag{2.11}$$

Выражение для тензора Грина в общем случае, когда имеются и дефект массы и дефект упругих модулей, достаточно громоздко и поэтому здесь не приводится.

Рассмотрим теперь случай нескольких дефектов, для определенности — дефектов упругих модулей. Ограничимся также для простоты записи статическим тензором Грина. Пусть

$$c^{\nu\alpha\mu\beta}(x, x') = c_0^{\nu\alpha\mu\beta}(x - x') + v\sum_i c_i^{\nu\alpha\mu\beta}\,\delta(x - x_i)\,\delta(x' - x_i) \tag{2.12}$$

Опуская несложные, но громоздкие выкладки, приведем окончательный результат

$$G_{\alpha\beta}(x, x') = \overset{\circ}{G}_{\alpha\beta}(x - x') + \sum_{ij} \partial_\nu \overset{\circ}{G}_{\alpha\mu}(x - x_i)\, P_{ij}^{\nu\mu\lambda\tau}\, \partial_\lambda \overset{\circ}{G}_{\beta\tau}(x_j - x') \tag{2.13}$$

Здесь матрица P_{ij} обратна матрице

$$R^{ij}_{\nu\mu\lambda\tau} = \overset{\circ}{g}{}^{ij}_{\nu\mu\lambda\tau} + v^{-1}\delta^{ij} b^{j}_{\nu\mu\lambda\tau} \tag{2.14}$$

где

$$\overset{\circ}{g}{}^{ij}_{\nu\mu\lambda\tau} = -[\partial_\nu\partial_\lambda \overset{\circ}{G}_{\mu\tau}(x_i - x_j)]_{(\nu\mu)(\lambda\tau)} \tag{2.15}$$

и $b^j_{\nu\mu\lambda\tau}$ — тензоры, обратные $c_j^{\nu\mu\lambda\tau}$.

Для важного случая двух дефектов ($i, j = 1, 2$) формулы для вычисления компонент P_{ij} можно существенно упростить, представив их в виде ($i \neq j$)

$$\begin{gathered} P_{ii} = (R_{ii} - R_{ij}R_{jj}^{-1}R_{ji})^{-1} \\ P_{ij} = (R_{ji} - R_{jj}R_{ij}^{-1}R_{ii})^{-1} \end{gathered} \tag{2.16}$$

Тензор Грина для случая дефектов массы имеет аналогичную структуру.

В заключение приведем формулы для энергии и сил взаимодействия дефектов, которые явно выражаются через статический тензор Грина.

Энергию Φ произвольной системы внешних сил с плотностью $q^\alpha(x)$ можно записать в виде

$$2\Phi = \langle \varepsilon_{\nu\beta} \,|\, \sigma^{\nu\beta} \rangle = \langle u_\beta \,|\, q^\beta \rangle = \langle q^\alpha \,|\, G_{\alpha\beta} \,|\, q^\beta \rangle \tag{2.17}$$

Пусть с дефектом в точке x_0 ассоциирован силовой диполь с плотностью

$$q^\alpha(x) = -Q^{\nu\alpha} \partial_\nu\, \delta(x - x_0) \tag{2.18}$$

Здесь $Q^{\nu\alpha} = Q^{\alpha\nu}$ — момент диполя. Тогда для собственной энергии дефекта из (2.17) находим

$$2\Phi = Q^{\nu\alpha} Q^{\mu\beta} g_{\nu\alpha\mu\beta} \tag{2.19}$$

где

$$g_{\nu\alpha\mu\beta} = [\partial_\nu \partial_\mu{}' G_{\alpha\beta}(x_0, x_0)]_{(\nu\alpha)\,(\mu\beta)} \tag{2.20}$$

Из (2.19), в частности, вытекает физический смысл величины $\overset{\circ}{g}_{\nu\alpha\mu\beta}$, входящей в (2.8).

В случае системы дефектов полная энергия записывается в виде

$$2\Phi = \sum_{ij} Q_i{}^{\nu\alpha} Q_j{}^{\mu\beta} g^{ij}_{\nu\alpha\mu\beta} \tag{2.21}$$

где

$$g^{ij}_{\nu\alpha\mu\beta} = [\partial_\nu \partial_\mu{}' G_{\alpha\beta}(x_i, x_j)]_{(\nu\alpha)\,(\mu\beta)} \tag{2.22}$$

Отметим, что в сумме (2.21) члены с $i = j$ нельзя отождествить с собственной энергией дефекта, так как в этом случае тензор Грина определяется всей совокупностью дефектов.

Сила, действующая на дефект в точке $x = x_k$ со стороны остальных дефектов, определяется как

$$f_\lambda{}^k = -\frac{\partial}{\partial x_k{}^\lambda} \Phi \tag{2.23}$$

Вычисления дают

$$f_\lambda{}^k = \sum_{ij} Q_i{}^{\nu\alpha} Q_j{}^{\mu\beta} [\delta^{ki} \partial_\lambda \partial_\nu \partial_\mu{}' G_{\alpha\beta}(x_i, x_j) + G^k_{\lambda\alpha\beta}(x_i, x_j)] \tag{2.24}$$

где

$$G^k_{\lambda\alpha\beta}(x, x') = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k{}^\lambda} G_{\alpha\beta}(x, x') \tag{2.25}$$

Поступила 2 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Кунин И. А. Модель упругой среды простой структуры с пространственной дисперсией. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3, стр. 542.
2. Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В. Основные уравнения теории упругости с вращательным взаимодействием частиц. Физ. твердого тела, 1960, т. 2, № 7, стр. 1399.
3. Grioli G. Elasticita asimmetrica. Ann. mat. Pura ed Appl., Ser. IV, 1960, vol. 50, p. 382.
4. Toupin R. A. Elastic materials with couple-stresses. Arch. Rat. Mech. Anal., 1962, vol. 11, No. 5, p. 385.
5. Mindlin R. D., Tiersten H. F. Effects of couple-stresses in linear elasticity. Arch. Rat. Mech. Anal., 1962, vol. 11, No. 5, p. 415.