

чественно отличается от прямой тем, что ее вихревое поле имеет пространственную структуру.

В свете полученных нами результатов усиление наклонных волн может быть объяснено уже в рамках линейной теории гидродинамической устойчивости: нарастающие трехмерные возмущения, обнаруженные в эксперименте, являются наклонными волнами Толлмина — Шлихтинга, неустойчивыми с точки зрения линейной теории, возбуждаемая же волна находится в области частот, для которых прямая волна более неустойчива, чем наклонная.

Таким образом, показано, что в отличие от общепринятого представления в плоском дозвуковом пограничном слое наклонные волны играют гораздо большую роль в процессах перехода к турбулентному режиму течения. Они могут иметь меньшие значения чисел Рейнольдса потери устойчивости, более высокие инкременты нарастания и послужить причиной возникновения турбулентности. Причем важно отметить, что эта причина заключается не только в том, что для наклонных волн критическое число Рейнольдса перехода может быть значительно ниже, но и в том, что они имеют трехмерную структуру уже в рамках линейной теории.

Авторы выражают благодарность В. Я. Левченко за полезное обсуждение, а также за указание на существование работы [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974.
2. Линь Ц. Ц. Теория гидродинамической устойчивости. — М.: ИЛ, 1958.
3. Squire H. B. On the stability of the three-dimensional disturbances of viscous flow between parallel walls // Proc. Roy. Soc. London. — 1933. — Ser. A. — V. 142.
4. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое. — Новосибирск: Наука, 1982.
5. Жигулев В. Н., Тумин А. М. Возникновение турбулентности. — Новосибирск: Наука, 1987.
6. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных дифференциальных уравнений // УМН. — 1961. — Т. 16, вып. 3.
7. Лебедев Ю. Б., Фомичев В. М. Влияние неравномерного распределения температуры поверхности на устойчивость ламинарного пограничного слоя // ПМТФ. — 1987. — № 2.
8. Robey H. F. The nature of oblique instability waves in boundary layer transition // IUTAM Symp. Turbulence Menag. Relaminar., Bangalore, India, 1987. — Berlin: Springer, 1988.

г. Реутов

Поступила 23/IV 1991 г.

УДК 532.517.2 + 534.232

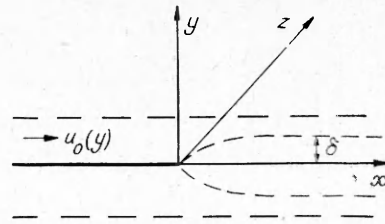
Л. Б. Айзин

ПОРОЖДЕНИЕ ЗВУКА ВОЛНОЙ ТОЛЛМИНА — ШЛИХТИНГА НА КОНЦЕ ПЛАСТИНЫ, ОБТЕКАЕМОЙ ПОТОКОМ

Одно из важных явлений гидродинамики — переход ламинарной формы течения в турбулентную. Установлено, что при низком уровне возмущений в набегающем потоке переход в пограничном слое на пластине вызван неустойчивостью ламинарного течения. В настоящее время хорошо развита конвективная (квазилокальная) теория гидродинамической устойчивости, описывающая распространение и рост вниз по потоку волн Толлмина — Шлихтинга (Т — Ш), которые и приводят к переходу.

Но «до настоящего времени не разработан теоретически вопрос об устойчивости стационарного обтекания тел конечного размера. Такое математическое исследование, однако, крайне сложно» [1]. В связи с указанной сложностью задачи естественно делать ее поэтапно. Один из таких этапов — отыскание и расчет каналов передачи возмущений вверх

по потоку. Известно, что для абсолютно твердой пластины передача возмущений вверх по потоку возможна только звуком (имеется в виду и псевдозвук). Цель данной работы — расчет порождения звука волной Т — Ш на конце пластины, т. е. получение амплитуды и структуры порожденной звуковой волны.



Р и с. 1

1. При малых числах Маха M длина волны Т — Ш $\lambda_1 = 2\pi/\alpha_1$ (α_1 — x -компонента волнового вектора волны Т — Ш, рис. 1) много меньше длины звуковой волны той же частоты. Поэтому рассматриваемую задачу можно делать в два этапа [1]: сначала решить в приближении несжимаемости задачу о падении волны Т — Ш на конец пластины, затем полученное решение на расстояниях от конца пластины, много больших λ_1 , сравнить со звуковой волной. При больших числах Рейнольдса R длина волны Т — Ш много меньше размера пластины [2], поэтому характерным размером в x -направлении будет λ_1 . Здесь и ниже в качестве масштабов берутся скорость набегающего на пластину потока и толщина пограничного слоя на конце пластины.

Стационарный профиль скорости представляет собой пограничные слои единичной толщины, которые смыкаются за концом пластины, где образуется внутренний пограничный слой с толщиной порядка [3] $\delta \sim (x/R)^{1/3}$. Штриховыми линиями на рис. 1 схематично указаны границы верхнего, нижнего и внутреннего пограничных слоев. Пограничный слой над пластиной меняется на размере пластины, поэтому в силу сказанного его изменением по x можно пренебречь. Масштаб волны Т — Ш по y — y_c ($u_0(y_c) = \omega/\alpha_1$, ω — частота) на верхней ветви нейтральной кривой имеет порядок [2] $y_c \sim R^{-1/10}$, а толщина внутреннего пограничного слоя при $x \sim \lambda_1$ — порядок [2] $\delta \sim (\alpha_1 R)^{-1/3} \sim R^{-3/10}$. Отсюда при $x \sim \lambda_1$ $\delta/y_c \sim R^{-1/5}$. В такой ситуации при больших R естественно заменить внутренний пограничный слой поверхностью разрыва, где следует поставить условия сшивки, а стационарный профиль скорости считать не зависящим от координаты x . В качестве условий сшивки надо взять непрерывность скорости, давления и производной по нормали к поверхности разрыва тангенциальной составляющей скорости.

Вектор скорости запишем в виде суммы $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$, где $\mathbf{v}_1$ — малое возмущение, а стационарная скорость потока

$$(1.1) \quad \mathbf{v}_0 = (u_0(y), 0, 0).$$

В этих обозначениях, согласно приведенным рассуждениям, первый этап задачи сформулируем следующим образом: для уравнений

$$(1.2) \quad \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x} + u'_0 (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{j}) \mathbf{i} = -\text{grad } p + \frac{1}{R} \Delta \mathbf{v}_1, \text{div } \mathbf{v}_1 = 0$$

найти решение

$$(1.3) \quad \mathbf{v}_1 = \begin{cases} \exp[-i(\omega t - \beta z)] (\mathbf{v}_{\text{Т-Ш}}(y) \exp(i\alpha_1 x) + \mathbf{v}_-), & x < 0, \\ \exp[-i(\omega t - \beta z)] \mathbf{v}_+, & x > 0, \end{cases}$$

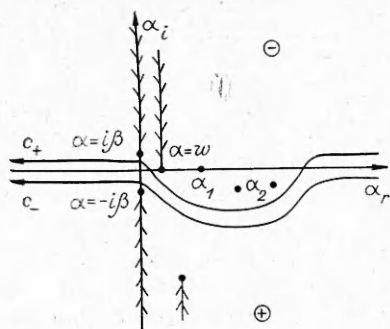
удовлетворяющее условиям сшивки

$$(1.4) \quad [\mathbf{v}_1] = \left[\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial y} \right] = [p] = 0, \quad [f] = f(x, +0) - f(x, -0), \quad x > 0$$

и краевым условиям

$$(1.5) \quad \mathbf{v}_1 = 0, \quad y = 0, \quad x < 0; \quad \mathbf{v}_1 \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \pm \infty$$

($\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — единичные векторы вдоль осей x и y , а i — мнимая единица). В (1.3) $\mathbf{v}_{\text{Т-Ш}}(y) \exp(i\alpha_1 x + i\beta z)$ — волна Т — Ш заданной амплитуды, набегающая па конец пластины при $y \geq 0$; $\mathbf{v}_-$ — линейная комбинация волн, распространяющихся влево от $x = 0$; $\mathbf{v}_+$ — комбинация волн, рас-



пространяющихся вправо от $x = 0$ (смысл деления волн на две группы пояснен в [4]); β — z -компонента волнового вектора волны Т — III, является малой:

$$(1.6) \quad \beta < M\omega,$$

потому что в противном случае порожденная звуковая волна не существует.

Так как уравнение (1.2) и условия (1.4), (1.5) симметричны относительно $y = 0$, $\mathbf{v}_1$ можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного решений. Причем эти решения ищутся независимо.

2. Антисимметричное решение представим как сумму

$$(2.1) \quad \mathbf{v}_1 = \exp[-i(\omega t - \beta z)] \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}_{\text{T-III}} \exp(i\alpha_1 x) + \mathbf{v}_2 \right), \mathbf{v}_2 = (u, v, w).$$

Исключая из уравнения (1.2) время и z -координату с помощью (2.1), применив затем обобщенное преобразование Фурье по x [5], получим для образа Фурье V [2] соотношения

$$(2.2) \quad L^2 V = i\alpha R [(u_0 - c) L - u_0'] V, L = \frac{d^2}{dy^2} - \gamma^2; \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2, c = \frac{\omega}{\alpha};$$

$$(2.3) \quad V_- = V'_- = V'_+ = V''_+ + i\alpha R u'_0 V_+ + i v'''_{T-III} / (2 \sqrt{2\pi} (\alpha - \alpha_1)) = 0, \quad y = 0; \\ V \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \pm \infty,$$

где

$$(2.4) \quad V = V_- + V_+, V_- = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 v \exp(-i\alpha x) dx,$$

$$V_{+} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} v \exp(-i\alpha x) dx.$$

Условия (2.3) получаются следующим образом: $V_-(0) = 0$ вытекает из формулы (2.4) и условия (1.5), $V'_-(0) = 0$ — из (2.4), (1.5) и уравнения неразрывности, $V'_+(0) = 0$ — из (2.4) и симметрии искомого решения, а последнее из равенств (2.3) — следствие разрыва u'_0 при $y = 0$, условий (1.4) и симметрии решения.

Задача (2.2)–(2.4) решается методом Винера–Хопфа [6]. Области аналитичности V_- и V_+ и их особенности изображены схематично на рис. 2, причем область аналитичности V_- лежит выше контура c_- , а V_+ — ниже контура c_+ . Особенности V_- и V_+ определяются видом возмущений, распространяющихся влево и вправо от $x = 0$. Это четыре точки ветвления, определяемые равенствами $\gamma = 0$, $\alpha - \omega - i\gamma^2/R = 0$, и изолированные особые точки, определяемые как соответствующая часть дискретного спектра оператора Орра — Зоммерфельда (2.2), (2.3). При отыскании спектра в формулах (2.3) при $y = 0$ надо брать либо два первых, либо два последних условия. На рис. 2 α_r — действительная часть α , а α_i — мнимая. Затухающее при $y \rightarrow \infty$ решение (2.2) запишем в виде

$$(2.5) \quad V = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2$$

(φ_1 — затухающее невязкое решение, а φ_2 — затухающее вязкое [2]). Применяя процедуру, описанную в [6] (исключая из равенств (2.3)–(2.5) c_1 и c_2), получим

$$(2.6) \quad V_-''' - \frac{a}{\alpha - \alpha_*} = V_+ F, a = i\gamma^2(\alpha_1) \text{Rp}_{\text{T-III}} / (2 \sqrt{2\pi}),$$

$$F = \left[i\alpha R u'_0 + \frac{\varphi_1''' \varphi_2' - \varphi_2''' \varphi_1'}{\varphi_1 \varphi_2' - \varphi_1' \varphi_2} \right]_{y=0}$$

(p_{T-III} — давление в волне Т—III на конце пластины при $y = 0$). Используя поведение φ_1, φ_2 , находим

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pm \infty} (F/(2\gamma^3)) = 1.$$

Поэтому F можно факторизовать, следуя [6], в форме

$$(2.7) \quad F = 2\gamma_-^3 \gamma_+^3 K_+/K_-, \gamma_- = \sqrt{\alpha + i\beta}, \gamma_+ = \sqrt{\alpha - i\beta}, \\ K_- = \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{c_-} \frac{\ln(F/2\gamma^3)}{t - \alpha} dt \right), K_+ = \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{c_+} \frac{\ln(F/2\gamma^3)}{t - \alpha} dt \right).$$

Повторяя процедуру [6], уравнение (2.6) приведем к виду

$$(2.8) \quad \frac{V_-''' K_-}{\gamma_-^3} - \frac{a}{\alpha - \alpha_1} \left(\frac{K_-}{\gamma_-^3} - \frac{K_-(\alpha_1)}{\gamma_-^3(\alpha_1)} \right) = 2\gamma_+^3 K_+ V_+ + \frac{a}{\alpha - \alpha_1} \frac{K_-(\alpha_1)}{\gamma_-^3(\alpha_1)} = J(\alpha).$$

Левая часть этого равенства аналитична выше c_- (рис. 2), а правая — ниже c_+ . Таким образом, выражение (2.8) представляет функцию $J(\alpha)$, аналитическую во всей плоскости. В [7] показано, что на малых расстояниях от конца пластины функция тока ведет себя как

$$(2.9) \quad \Psi \sim r^{3/2} \left(\cos \frac{3\theta}{2} + 3 \cos \frac{\theta}{2} \right), r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = 2 \arctg \frac{y}{r-x}.$$

Отсюда $v(x, 0) \sim \sqrt{x}$ при $x > 0$. Тогда $V_+(0) \sim \alpha^{-3/2}$ при $\alpha \rightarrow \infty, \alpha_i < 0$ [8]; K_- и K_+ стремятся к единице при $\alpha \rightarrow \infty$ в областях своей аналитичности. Из приведенной оценки и формулы (2.8) вытекает, что $J(\alpha)$ ограничена в полуплоскости $\alpha_i < 0$. Нетрудно найти оценку для $J(\alpha)$ при $\alpha_i > 0$. Давление p в силу (2.9) допускает при $r \ll 1$ оценку $p(x, 0) \sim |x|^{-1/2}, x < 0$. Отсюда, используя симметрию задачи, для фурье-образа давления получим

$$P(0) = P_-(0) \sim \alpha^{-1/2}, \alpha \rightarrow \infty, \alpha_i > 0.$$

Выразив далее $V'(0)$ и $P(0)$ через φ_1, φ_2 с помощью формулы (2.5) и используя условия (2.3), можно оценить в той же области $\alpha_i > 0$ поведение постоянных, входящих в (2.5). Записав теперь $V'''(0)$ в виде (2.5) и применив условие (2.3), имеем

$$V_-'''(0) \sim \alpha^{3/2}, \alpha \rightarrow \infty, \alpha_i > 0.$$

Отсюда и из (2.8) следует, что $J(\alpha)$ ограничена при $\alpha_i > 0$. Таким образом, $J(\alpha)$ ограничена во всей плоскости и, значит, равна постоянной. Выразив $V_-'''(0)$ из (2.8) и упростив полученное выражение, найдем

$$(2.10) \quad V_-''' = \frac{a}{\alpha - \alpha_1} - b, b = \frac{a\gamma_-}{\gamma_-(\alpha_1)} \exp \left[\frac{\alpha - \alpha_1}{2\pi i} I(\alpha) \right] \left(\frac{1}{\alpha - \alpha_1} - \text{const} \right), \\ I(\alpha) = \int_{c_-} \frac{\ln(F/\gamma)}{(t - \alpha_1)(t - \alpha)} dt.$$

Записывая $V', V''' + i\alpha R u'_0 V$ при $y = 0$ в форме (2.5) и применяя условия (2.3), получим

$$c_1 \varphi_1' + c_2 \varphi_2' = 0, c_1 (\varphi_1''' + i\alpha R u'_0 \varphi_1) + c_2 (\varphi_2''' + i\alpha R u'_0 \varphi_2) = -b.$$

Из этой системы находятся c_1, c_2 и для фурье-образа потенциала

$$\Phi = \int_{-\infty}^y V dy$$

было получено

$$(2.11) \quad \Phi = \frac{b \exp(-\gamma y)}{\gamma} \left[\frac{\Phi_2'}{\Phi_2'(\Phi_1''' + i\alpha R u_0' \Phi_1) - \Phi_1'(\Phi_2''' + i\alpha R u_0' \Phi_2)} \right]_{y=0}, \quad y > 1.$$

Потенциал возмущений, задающих звуковую волну, на больших расстояниях ($r \gg \lambda_1$) определяется поведением Φ в окрестности $\gamma = 0$. Поэтому следует рассмотреть поведение сомножителей, входящих в (2.11) при $\gamma \rightarrow 0$. Выражение для F , используя уравнение (2.2) и условия затухания для Φ_1, Φ_2 , запишем в виде

$$(2.12) \quad F = \gamma^2 R \left[\frac{\int_0^\infty \left(i\alpha u_0 - i\omega + \frac{\gamma^2}{R} \right) \Phi_1 dy \Phi_2' - \int_0^\infty \left(i\alpha u_0 - i\omega + \frac{\gamma^2}{R} \right) \Phi_2 dy \Phi_1'}{\Phi_1 \Phi_2' - \Phi_1' \Phi_2} \right]_{y=0}.$$

Числитель в (2.12) при $\gamma \rightarrow 0$ пропорционален γ , знаменатель в нуль не обращается, что легко проверить прямой подстановкой Φ_1, Φ_2 [2]. Таким образом, F/γ имеет при $\gamma \rightarrow 0$ конечный ненулевой предел и, значит, $I(-i\beta)$ в (2.10) существует. Знаменатель в (2.11) с точностью до множителя совпадает с числителем в (2.12), который легко вычисляется при $\gamma \rightarrow 0$. Проведя вычисления для Φ в окрестности $\gamma = 0$, получим

$$(2.13) \quad \Phi \approx \frac{ia \left(\frac{1}{\alpha - \alpha_1} - \text{const} \right)}{\omega R \gamma_+^2 \gamma_- \gamma_- (\alpha_1)} \exp \left[\frac{\alpha_1 + i\beta}{2\pi i} I(-i\beta) - \gamma y \right], \quad y > 1, \quad \gamma \rightarrow 0.$$

Постоянная, входящая в (2.13), выбирается при $\beta = 0$. Чтобы потенциал при $\beta \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$ затухал, константа должна быть равна $-1/\alpha_1$. При $\beta \neq 0$ ее значение отличается от $1/\alpha_1$ малым слагаемым порядка β ($\beta < M\omega$). Тогда

$$(2.14) \quad \Phi \approx \frac{a_1}{\gamma_-} \exp \left[\frac{\alpha_1 + i\beta}{2\pi i} I(-i\beta) - \gamma y \right], \quad a_1 = -ia/(\omega R \alpha_1^{5/2}), \quad y > 1, \quad \gamma \rightarrow 0.$$

3. Вычислим предел

$$(3.1) \quad \frac{\alpha_1 + i\beta}{2\pi i} I(-i\beta)$$

при стремлении к бесконечности по верхней ветви нейтральной кривой [2]:

$$(3.2) \quad R \rightarrow \infty, \omega \sim R^{-1/5}, \alpha_1 \approx \sqrt{u_0' \omega}.$$

Предварительно преобразуем $I(-i\beta)$. Используя выражение для F (2.12) и асимптотические представления для Φ_1, Φ_2 [2], имеем

$$(3.3) \quad F/\gamma = i\omega R f'(0) \Pi/(\gamma f(0)), \quad \Pi = 1 + O(1/\sqrt{\omega R}),$$

$$f = 1 - \gamma(1-c)^2 \int_1^y (u_0 - c)^{-2} dy + \gamma^2 \int_1^y (u_0 - c)^{-2} \int_1^y (u_0 - c)^2 dy dy - \dots$$

Асимптотические разложения для Φ_1, Φ_2 , приведенные в [2], можно использовать на c_- , так как c_- лежит при $\alpha_i < 0$ и $c_i = \text{Im}(\omega/\alpha) > 0$. Что же касается малой окрестности точки $\alpha = \omega$, где применяемые асимптотические разложения непригодны, то в процессе предельного перехода (3.2) контур интегрирования будем держать вдали от этой точки. Введем D с помощью равенства

$$(3.4) \quad \frac{F}{\gamma} = - \frac{iR(\alpha - \omega)^2 \Pi(-i\beta) D}{\omega},$$

Нетрудно проверить, что $D(-i\beta) = 1$. При подстановке F/γ в виде (3.4) в выражение для I (2.10) I распадется на сумму двух слагаемых, причем

для первого контур (рис. 3, а) замкнем через нижнюю полуплоскость, поэтому оно равно нулю. Что касается слагаемого, содержащего $\ln D$, то здесь с контура c_- перейдем на контур c'_- (рис. 3, а). При этом интеграл по c_- равен сумме интеграла по c'_- и вычета в точке $t = \alpha$. При $\alpha \rightarrow -i\beta$ вычет стремится к нулю ($D(-i\beta) = 1$) и выражение (3.1) принимает вид

$$(3.5) \quad \frac{1 + i\beta/\alpha_1}{2\pi i} \int_{c_-} \frac{\ln D(t') dt'}{(t' - 1)(t' + i\beta/\alpha_1)}, \quad t = \alpha_1 t'.$$

Рассмотрев поведение $D(t')$ с помощью формул (3.3), (3.4) при $R \rightarrow \infty$ (3.2), можно убедиться, что $D(t')$ равномерно стремится к предельной функции на любой конечной дуге, выходящей из начала координат, не содержащей $t' = 0$ и лежащей при $t'_i \leq 0$:

$$D(t') \rightarrow 1 - \gamma t', \quad \gamma = \sqrt{t'_+} \sqrt{t'_-}.$$

Разрезы $\sqrt{t'_+}$, $\sqrt{t'_-}$ представлены на рис. 3, б. Нетрудно также показать, что интеграл (3.5) сходится равномерно по R при $R \rightarrow \infty$ (3.2). Из сказанного следует, что предел (3.1) при $R \rightarrow \infty$ (3.2) равен интегралу от предельной функции:

$$(3.6) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\alpha_1 + i\beta}{2\pi i} I(-i\beta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_-} \frac{\ln(1 - \gamma t') dt'}{(1 - t') t'}.$$

Контур c_- будем деформировать в контур Γ (рис. 3, б), и интеграл (3.6) приводится к табличным [8]:

$$(3.7) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{c_-} \frac{\ln(1 - \gamma t')}{(1 - t') t'} dt' = \frac{1}{2\pi i} \left[i \int_0^\infty \frac{\ln(1 + x^2)}{1 + x^2} dx + \int_0^\infty \frac{\ln(1 + x^2)}{x} \left(\frac{1}{1 + x} - \frac{1}{1 + x^2} \right) dx \right] = \ln \sqrt{2} + \frac{i\pi}{8}.$$

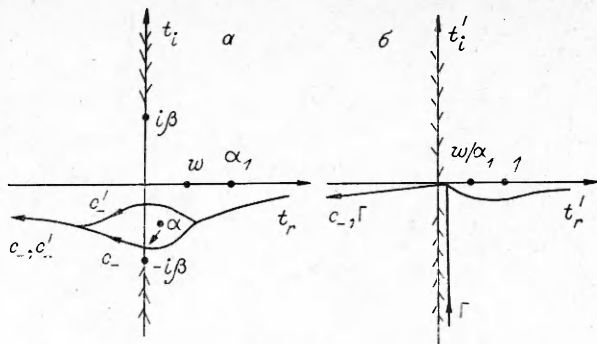
Подставляя теперь (3.7) в (2.14) и учитывая (2.6), для фурье-образа потенциала при $R \rightarrow \infty$ в окрестности $\gamma \rightarrow 0$ получим

$$(3.8) \quad \Phi \approx \frac{P_{T-III}}{2\omega \sqrt{\pi\alpha_1(\alpha + i\omega)}} \exp\left(\frac{i\pi}{8} - \gamma y\right), \quad y > 1.$$

Для потенциала на больших расстояниях $((M\omega)^{-1} \gg r \gg 1)$ находим [8] (3.9)

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi \exp(i\alpha x) dx = \frac{P_{T-III} \exp\left(-\frac{i\pi}{8}\right)}{\omega \pi \sqrt{2\alpha_1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ty) \cos\left(tx + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{t}} dt = \\ &= \frac{P_{T-III} \exp\left(-\frac{i\pi}{8}\right) \sin(\theta/2)}{\omega \sqrt{2\pi\alpha_1}} \frac{1}{\sqrt{r}}, \quad y > 1 \end{aligned}$$

(θ и r определяются формулами (2.9)).



Р и с. 3

4. Рассмотрим поведение потенциала звука при $r \gg 1$, он ищется в виде

$$(4.1) \quad \varphi = \exp[-i(\omega t - \beta z)] \sin(\theta/2) g(r).$$

Подставляя (4.1) в уравнение распространения звука

$$(4.2) \quad \Delta \varphi = M^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

имеем

$$(4.3) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dg}{dr} \right) + \left(k^2 - \frac{1}{4r^2} \right) g = 0, \quad k^2 = M^2 \omega^2 - \beta^2.$$

Решение (4.3), представляющее уходящую от начала координат волну, запишем как

$$(4.4) \quad g = C \frac{\exp(ikr)}{\sqrt{r}}.$$

Сравнивая (4.4) и (3.9) в интервале $(M\omega)^{-1} \gg r \gg 1$, для $r \gg 1$ находим

$$(4.5) \quad \varphi_1 = \frac{p_{T-III}}{\omega \sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\theta/2)}{\sqrt{r\alpha_1}} \exp \left[-i \left(\omega t - \beta z - kr + \frac{\pi}{8} \right) \right].$$

Давление в звуковой волне $p = -\partial \varphi / \partial t$ примет вид

$$p = -\frac{p_{T-III}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\theta/2)}{\sqrt{r\alpha_1}} \exp \left[-i \left(\omega t - \beta z - kr + \frac{5\pi}{8} \right) \right].$$

Пусть L — длина пластины. Потенциал (4.5) представляет порожденную звуковую волну при $Lk \gg 1$. Действительно, амплитуда пришедшей с конца пластины звуковой волны на носике имеет относительный порядок

$$\frac{1}{\sqrt{L\alpha_1}} \sim \frac{1}{\sqrt{Lk}} \sqrt{\frac{k}{\alpha_1}}.$$

За начало условно взята точка $r\alpha_1 = 1$. Поэтому порожденный на носике звук не может существенно изменить акустическое поле (4.5). При

$$(4.6) \quad Lk \ll 1$$

носик пластины находится в зоне

$$(4.7) \quad k^{-1} \gg r \gg 1$$

и использовать потенциал (3.9) для сращивания со звуковой волной нельзя. Потенциал в области (4.7) при условии (4.6) надо искать как решение следующей задачи: найти решение уравнений Лапласа, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} \varphi = 0, \quad y = 0, \quad x < -L; \quad \partial \varphi / \partial y = 0, \quad y = 0, \quad -L < x < 0; \\ \varphi = 0, \quad y = 0, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Вблизи $r = 0$ φ имеет особенность вида (3.9) и ограничена в остальной области. Решение этой задачи единственно [9] и имеет вид

$$\varphi = -\frac{p_{T-III} \exp\left(-\frac{i\pi}{8}\right)}{\omega \sqrt{2\pi\alpha_1 L}} \operatorname{Im} \left(\sqrt{\frac{W+L}{W}} \right), \quad W = x + iy.$$

При $r \gg L$

$$(4.8) \quad \varphi \approx \frac{p_{T-III} \exp\left(-\frac{i\pi}{8}\right)}{2\omega \sqrt{2\pi\alpha_1 L}} \frac{\sin(\theta)}{r}.$$

Потенциал звуковой волны, переходящий в (4.8) при $k^{-1} \gg r \gg L$, на расстояниях $kr \gg 1$ запишем как [1]

$$(4.9) \quad \varphi = \frac{p_{T-III}}{4\omega} \frac{\sqrt{kL}}{\sqrt{r\alpha_1}} \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{r\alpha_1}} \exp\left[-i\left(\omega t - \beta z - kr + \frac{3\pi}{8}\right)\right],$$

а соответствующее давление

$$p = -p_{T-III} \frac{\sqrt{kL}}{4} \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{r\alpha_1}} \exp\left[-i\left(\omega t - \beta z - kr + \frac{7\pi}{8}\right)\right].$$

5. Результаты, приведенные в пп. 2—4, являются решением антисимметричной задачи. Для симметричного по u решения амплитуда падающей волны Т—Ш такая же, как и для антисимметричного, а условия при $y = 0$ имеют вид

$$(5.1) \quad v = \partial v / \partial y = 0, \quad x = 0; \quad v = \partial^2 v / \partial y^2 = 0, \quad x > 0.$$

Повторяя выкладки п. 2, для фурье-образа потенциала при $\gamma \rightarrow 0$ получим

$$(5.2) \quad \Phi \approx \frac{p_{T-III} c}{2\omega\gamma \sqrt{-i2\pi\omega R}} \exp\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{c_-} \frac{\ln(F(t\alpha_1)/F(0)) dt}{(t-1)t} - \gamma y\right], \quad y > 1, \quad \beta = 0,$$

$$F(\alpha) = \left[\frac{\varphi_1 \varphi_2'' - \varphi_2 \varphi_1''}{\varphi_1 \varphi_2' - \varphi_2 \varphi_1'} \right]_{y=0}.$$

При $R \rightarrow \infty$ интеграл, входящий в выражение (5.2), стремится к нулю, так как $F(t\alpha_1)/F(0) \rightarrow 1$ на любой конечной части c_- (рис. 3, б). Убедиться в этом можно, используя асимптотические разложения φ_1, φ_2 [2]. Выражение (5.2) при $\gamma \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ запишем как

$$(5.3) \quad \Phi \approx \frac{p_{T-III} c}{2\omega\gamma \sqrt{-i2\pi\omega R}} \exp(-\gamma y), \quad y > 1, \quad \beta = 0.$$

Из сравнения выражений (3.8) и (5.3) вытекает, что вкладом симметричного решения в порождение акустической волны можно пренебречь.

Действительно, в невязком пределе краевые условия (5.1) для симметричного решения перейдут в следующие:

$$v = 0, \quad y = 0, \quad x < 0; \quad v = 0, \quad y = 0, \quad x > 0.$$

А при таком условии волна Т—Ш не рассеивается.

Автор благодарен В. В. Пухначеву за интерес к работе и полезный совет.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лившиц В. М. Гидродинамика. — М.: Наука, 1988.
2. Линь Ц. Ц. Теория гидродинамической устойчивости. — М.: ИЛ, 1958.
3. Гольдштейн С. Современное состояние гидродинамики вязкой жидкости. — М.: ИЛ, 1948. — Т. 2.
4. Куликовский Л. Г. Об устойчивости однородных состояний // ПММ. — 1968. — Т. 30, № 1.
5. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. — М.: Гостехиздат, 1948.
6. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. — М.: ИЛ, 1962.
7. Кондратьев В. А. Асимптотика решения уравнения Навье — Стокса в окрестности угловой точки границы // ПММ. — 1967. — Т. 31, № 1.
8. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963.
9. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973.

г. Новосибирск

Поступила 11/XI 1990 г.,
в окончательном варианте — 27/V 1991 г.