

10. Сабельников В. А. Уравнения для распределений вероятностей скорости и концентрации в турбулентной и нетурбулентной областях свободных течений.— Учен. зап. ЦАГИ, 1980, т. XI, № 6.
11. Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М.: ИЛ, 1959.
12. Кузнецов В. Р. Распределение вероятностей разности скоростей в инерционном интервале спектра турбулентности.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 3.
13. Reynolds W. C. Computation of turbulent flows.— In: Annual Rev. Fluid Mech. Vol. 8. Palo Alto, 1976.
14. Конт-Белло Ж. Турбулентное течение в канале с параллельными стенками. М.: Мир, 1968.
15. Букреев В. И., Зыков В. В., Костомача В. А. Распределение вероятностей флуктуаций скорости в свободных и пристенных турбулентных течениях.— В сб.: Турбулентные течения. М.: Наука, 1977.
16. Шахов Е. М. Метод исследования движений разреженного газа. М.: Наука, 1974.
17. Srinivasan R., Giddens D. P., Bangert L. H., Wu J. S. Turbulent plane Couette flow using probability distribution functions.— Phys. Fluids, 1977, vol. 20, N 4.
18. Кислов Н. В. Краевые задачи для уравнений смешанного типа в прямоугольной области.— ДАН СССР, 1980, т. 255, № 1.
19. Сабельников В. А. Распределение вероятностей концентрации в турбулентном диффузионном факеле.— В сб.: Горение газов и натуральных топлив. Материалы VI Всесоюз. симпозиума по горению и взрыву. Черноголовка, 1980.
20. Uberoi M. S. Equipartition of energy and local isotropy in turbulent flows.— J. Appl. Phys., 1957, vol. 28, N 10.
21. Hanjalić K., Launder B. E. A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flow.— J. Fluid Mech., 1972, vol. 52, pt 4.
22. Hanjalić K., Launder B. E. Fully developed asymmetric flow in a plane channel.— J. Fluid Mech., 1972, vol. 51, pt 2.

УДК 532.526

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОБОБЩЕННОГО ПОДОБИЯ К РАСЧЕТУ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

В. В. Зябриков
(Ленинград)

1. Вывод универсального уравнения турбулентного пограничного слоя. В интегральных методах расчета турбулентного пограничного слоя используется произвольный выбор конкурирующего семейства профилей скорости или напряжения трения. Если в расчетах используется двухслойная полуэмпирическая схема, то при проведении вычислений в каждом отдельном случае необходимо осуществлять трудоемкий процесс сращивания внутреннего и внешнего решений. Метод обобщенного подобия позволяет выполнить сращивание один раз навсегда.

Уравнение Рейнольдса плоского турбулентного пограничного слоя в несжимаемой жидкости примем в виде

$$(1.1) \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - U \frac{dU}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y},$$

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow \bar{U}(x) \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u_0(y) \quad \text{при} \quad x = x_0,$$

где ψ — функция тока осредненного движения; U — скорость на внешней границе пограничного слоя; τ — напряжение суммарного (молекулярной и молярной природы) трения; x, y — соответственно продольная и поперечная координаты; $u_0(y)$ — профиль продольной скорости в каком-то, принимаемом за начальное, сечении $x = x_0$; ρ — плотность.

Выберем $U(x)$ за масштаб продольных скоростей в различных сечениях пограничного слоя, а за масштаб поперечных координат — толщину

потери импульса δ^{**} . Как следует из разложения функции $\tau(x, y)$ в ряд по координате y

$$\tau = \tau_w + \left. \frac{\partial \tau}{\partial y} \right|_{y=0} y + o(y^3) = \tau_w - \rho U \frac{dU}{dx} y + o(y^3),$$

вместо общепринятого масштаба τ_w за масштаб напряжения трения можно принять величину $\tau_w - \rho U \delta^{**} dU/dx$, которая учитывает наличие продольного градиента давления и не обращается в нуль в точке отрыва. За параметры обобщенного подобия примем те же комплексы, что и в случае ламинарного пограничного слоя [1]:

$$f_k = U^{\frac{1}{2}} \frac{d^k U}{dx^k} z^k \quad (k = 1, 2, 3 \dots),$$

где $z = \delta^{**}/(Uc)$; $c = c_f/2 - (dU/dx)\delta^{**}/U$.

Совершим над уравнением (1.1) преобразование обобщенного подобия

$$\eta = y/\delta^{**}, \quad \Phi = \psi/(U\delta^{**}) = \Phi[\eta, \text{Re}^{**}, (f_k)],$$

$$\zeta = \tau / \left(\tau_w - \rho U \frac{dU}{dx} \delta^{**} \right) = \zeta[\eta, \text{Re}^{**}, (f_k)],$$

которое в отличие от ламинарного случая содержит «локальное» реynольдово число пограничного слоя $\text{Re}^{**} = U\delta^{**}/\nu$. В дальнейшем будем считать Re^{**} параметром (возможность такого подхода показана в [2]).

Формулы для определения df_k/dx совпадают с соответствующими формулами ламинарного пограничного слоя

$$(1.2) \quad Uz \frac{df_k}{dx} = [(k-1)f_1 + kf_1] f_k + f_{k+1} \equiv \theta_k.$$

Существенным отличием является лишь более сложное выражение

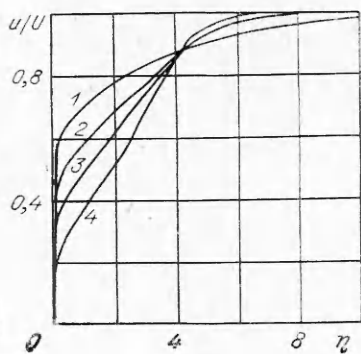
$$(1.3) \quad \bar{f}_1 = \frac{1 - (2+H)f_1 - \sum_{k=1}^{\infty} [(k-1)f_1 f_k + f_{k+1}] \frac{\partial \ln c}{\partial f_k}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} k f_k \frac{\partial \ln c}{\partial f_k}},$$

представляющее собой уравнение импульсов, записанное в переменных обобщенного подобия. Последняя формула получена при помощи перехода от дифференцирования c по x к дифференцированию по f_k . Уравнение (1.1) приводится окончательно к не содержащему явно скорости на внешней границе U универсальному виду

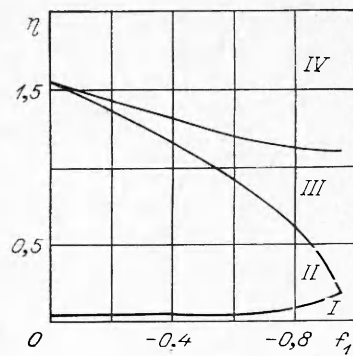
$$(1.4) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} + (1 - f_1 H) \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + f_1 \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2 \right] = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta \partial f_k} - \frac{\partial \Phi}{\partial f_k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \right).$$

2. Решение универсального уравнения (первый этап метода). Для определения приведенного напряжения трения τ используем известные полуэмпирические формулы Прандтля (с поправкой Ван-Дрифта) и Клаузера. Приведем выражения ζ в переменных обобщенного подобия для внутренней ζ_- и внешней ζ_+ областей

$$(2.1) \quad \zeta_- = \frac{1}{\text{Re}^{**} c} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{\alpha^2 \eta^2}{c} \left[1 - \exp \left(- \frac{\text{Re}^{**} \sqrt{c}}{A} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \eta \sqrt{1 + f_1 - f_2 \eta} \right) \right]^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \right)^2, \\ \zeta_+ = \alpha \frac{H}{c} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2}$$



Ф и г. 1



Ф и г. 2

где $A = 26$; $\alpha = 0,0168$. Как указывается в ряде работ, значение константы Кармана κ увеличивается от значения 0,4 на пластине приблизительно до значения 0,6 при большом положительном градиенте давления. С учетом того, что отрывное значение параметра f_1 равно -1 , в данной работе применяется следующая линейная зависимость κ от f_1 : $\kappa = 0,41 - 0,1 f_1$ (зависимость κ от рейнولدсова числа пренебрегаем).

Универсальное уравнение (1.4), в котором приведенное напряжение трения определено по формулам (2.1), проинтегрировано в локально-однопараметрическом приближении на ЭВМ методом прогонки с итерациями. В ходе решения функции c и H определялись по профилям скорости на предыдущем шаге:

$$c = \frac{1}{\text{Re}^{**} (1 + f_1)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \Big|_{\eta=0}, \quad H = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) d\eta.$$

Для сгущения расчетных точек вблизи стенки (в области, где велик наклон профиля скорости) применялось логарифмическое преобразование координаты η , предложенное в [3]. В результате решения универсального уравнения получено семейство профилей скорости, представленное на фиг. 1 ($f_1 = 0$; $-0,60$; $-0,80$; $-0,95$ — кривые 1—4 соответственно, расчеты проводились при $\text{Re}^{**} = 10^4$). При анализе полученных профилей скорости подтверждена справедливость «закона 1/2» и рассчитано положение границ между характерными областями турбулентного пограничного слоя (фиг. 2): вязким подслоем — I, логарифмической — II, областью «закона 1/2» — III и внешней областью — IV. По мере приближения к точке отрыва логарифмическая часть профиля скорости постепенно вытесняется областью «закона 1/2», а координата границы между внутренней и внешней областями стремится к постоянному значению $\eta = 1,1$.

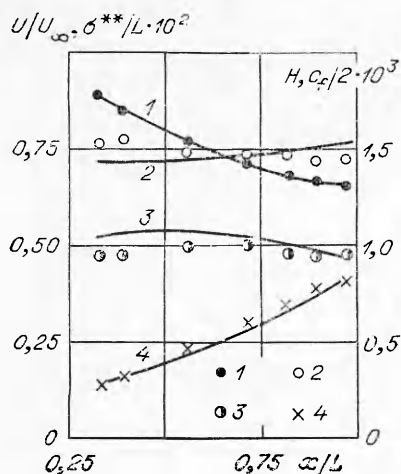
3. Решение уравнения импульсов (второй этап метода). После того как на первом этапе метода обобщенного подобия определено семейство профилей скорости и получены приближенные формулы для универсальных функций

$$c = 1,32 \cdot 10^{-3} / (1 + 0,69 f_1), \quad H = 1,30 / (1 + 0,22 f_1) \quad \text{при} \\ -0,7 \leq f_1 \leq 0,$$

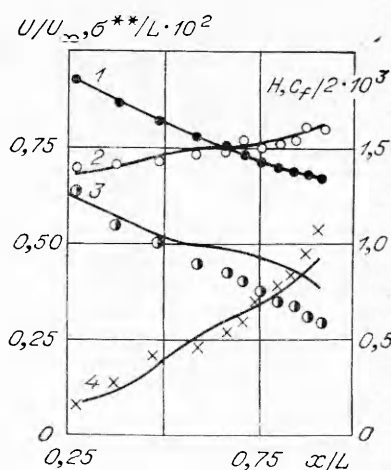
на втором этапе при рассмотрении отдельной задачи остается решить обыкновенное дифференциальное уравнение импульсов

$$\frac{df_1}{dx} = \frac{\left(\frac{dU}{dx} \right)^{-1} \frac{d^2 U}{dx^2} f_1 + U^{-1} \frac{dU}{dx} [1 - (2 + H) f_1]}{1 + f_1 \frac{\partial \ln c}{\partial f_1}},$$

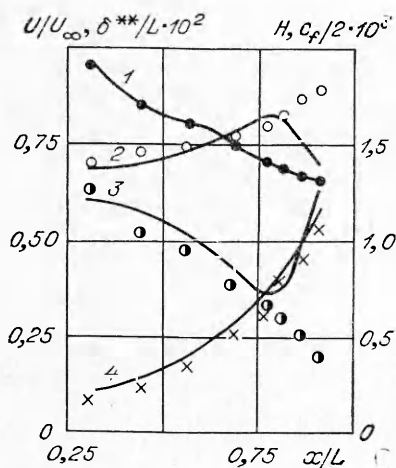
которое получается из соотношений (1.2), (1.3). Последнее уравнение проинтегрировано для ряда турбулентных пограничных слоев [4] с помощью



Ф и г. 3



Ф и г. 4



Ф и г. 5

метода Эйлера — Коши. Вместо точного задания начального профиля скорости использовалось приближенное начальное условие $f_1 = f_{10}$ при $x = x_0$ (величина δ_0^{**} частично учитывающая предысторию потока в пограничном слое, бралась из эксперимента). Результаты расчета характеристик трех турбулентных пограничных слоев с положительными градиентами давления (опыты 2200, 1100 и 1200) приведены соответственно на фиг. 3—5. Номера опытов соответствуют их значениям, принятым в материалах Стэнфордской конференции [4]. Кривые 1 на фиг. 3—5 аппроксимируют экспериментальные распределения безразмерной скорости на внешней границе пограничного слоя U/U_∞ , кривые 2—4 представляют рассчитанные распределения соответственно H , $c_f/2$, δ^{**}/L (U_∞ — скорость набегающего потока, L — длина тела). Точками на фиг. 3—5 показаны экспериментальные данные [4] (1 — U/U_∞ , 2 — H , 3 — $c_f/2$, 4 — δ^{**}/L).

Как и следовало ожидать, расчет, основанный на локально-однопараметрическом решении универсального уравнения, дает вполне удовлетворительное совпадение с опытом, но не для всего стандартного набора экспериментов. В дальнейшем предполагается провести решение универсального уравнения в полном одно- и двухпараметрическом приближении, что, как и в случае ламинарного пограничного слоя, должно существенно приблизить результаты расчета к экспериментальным данным.

Автор благодарит Л. Г. Лойцянского за руководство работой.

Поступила 15 IX 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Изд. 5-е. М.: Наука, 1978.
2. Alber I. E. Similar solution for a family of separated turbulent boundary layers. AIAA Paper, 1971, N 71—203.
3. Blottner F. G. Differential scheme with irregular network for computation of turbulent boundary layers. University of Colorado. — In: Proceedings of the Fourth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics. Univ. Colorado, 1974. Рус. пер. Механика. Сер. Новое в зарубежной науке. Вып. 14. Численное решение задач гидромеханики/Под ред. Р. Д. Рихтмайера. М.: Мир, 1977.
4. Computation of Turbulent Boundary Layer — 1968 AFOSR — IFP — Stanford Conference. Proceedings Stanford Univ., California, USA, 1969.