УДК 519.24

Новый непараметрический статистический критерий для задач с тремя выборками, частный случай которого эквивалентен критерию Уитни*

Г.И. Салов

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, г. Новосибирск, 630090
E-mail: sgi@ooi.sscc.ru

Салов Г.И. Новый непараметрический статистический критерий для задач с тремя выборками, частный случай которого эквивалентен критерию Уитни // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2014. — Т. 17, № 4. — С. 389–397.

Предлагается новый непараметрический статистический критерий (тест) для проверки гипотезы однородности трех выборок против альтернативной гипотезы, состоящей в том, что случайные величины одной из этих выборок имеют тенденцию быть стохастически больше случайных величин каждой из двух других выборок по отдельности. Известный критерий Уитни эквиалентен частному случаю нового критерия. Сравниваются мощности этих критериев в случаях с экспоненциальными и равномерными распределениями.

Ключевые слова: *три выборки, критерий однородности, непараметрический статистический критерий.*

Salov G.I. A new three-sample non-parametric statistical test with its special case equivalent to the Whitney test // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2014. — Vol. 17, № 4. — P. 389–397.

In this paper, we propose a new non-parametric statistical test for the problem of homogeneity of three samples. We consider an alternative for which one sample values tend to be stochastically larger than every one from the two other samples values. The Whitney test is equivalent to special (linear) case of this test. Some comparisons are made for the cases with samples from exponential and uniform distributions.

Key words: *three samples, homogeneity test, nonparametric statistical test.*

Введение

Настоящая работа является развитием работ автора [1, 2], но может читаться и независимо от них.

Пусть даны три независимые выборки: $X_1, \ldots, X_m$, $Y_1, \ldots, Y_{n_1}$, $Z_1, \ldots, Z_{n_2}$, элементы которых имеют неизвестные для наблюдателя непрерывные функции распределения F_X, F_Y, F_Z соответственно. И пусть требуется проверить гипотезу H_0 об однородности выборок $F_X = F_Y = F_Z = F$ против альтернативной гипотезы H_1: $F_X = G$, $G \le F_Y$, $G \not\equiv F_Y$, $G \le F_Z$, $G \not\equiv F_Z$, т. е. величины $X_1, \ldots, X_m$ стохастически больше как величин $Y_1, \ldots, Y_{n_1}$, так и $Z_1, \ldots, Z_{n_2}$ по отдельности.

Еще в 1951 г. Уитни [3] предложил широко применимый непараметрический статистический тест (критерий) для проверки упомянутой гипотезы. Цель настоящей работы — предложить новый одинаково широко применимый непараметрический статистический

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №13-07-00068).

критерий, нередко более мощный (отклоняющий гипотезу H_0 с бóльшей вероятностью, когда верна гипотеза H_1), чем критерий Уитни.

1. Новый критерий

Критерий Уитни (для краткости обозначим его через Wh) основан на статистиках U_1 и U_2 двух двухвыборочных критериев Манна–Уитни (MW) [4] и отклоняет гипотезу H_0 в пользу H_1, когда одновременно

$$U_1 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_1}\mathbf{I}\{X_j > Y_i\} > C_1 \quad \text{и} \quad U_2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_2}\mathbf{I}\{X_j > Z_j\} > C_2, \tag{1}$$

здесь и далее $\mathbf{I}\{A\}$ обозначает функцию-индикатор события A, равную 1, если событие A произошло, и 0 в противном случае, числа C_1 и C_2 подбираются по заданному уровню значимости критерия (вероятности отклонить гипотезу H_0, когда она на самом деле верна).

В [1] для задач с двумя выборками были введены новые статистики и основанный на них новый непараметрический критерий, обозначенный там через S_E. Результаты исследований в [1] и [2] показывают, что S_E-критерий может быть более мощным, чем MW-критерий, в широком ряде случаев. Последнее приводит к мысли попробовать заменить в критерии Уитни два MW-критерия на два S_E-критерия, чтобы получить более мощный критерий для рассматриваемой задачи с тремя выборками.

С этой целью возьмем $n_1 = 2\nu_1$ и $n_2 = 2\nu_2$ четными и введем следующие события:

$$E^+_{ij1} = \{X_i > \max(Y_j, Y_{\nu_1+j})\}, \quad E^-_{ij1} = \{X_i < \min(Y_j, Y_{\nu_1+j})\}, \quad E^0_{ij1} = \bar{E}^+_{ij1} \cap \bar{E}^-_{ij1},$$

$$E^+_{ij2} = \{X_i > \max(Z_j, Z_{\nu+j})\}, \quad E^-_{ij2} = \{X_i < \min(Z_j, Z_{\nu_2+j})\}, \quad E^0_{ij2} = \bar{E}^+_{ij2} \cap \bar{E}^-_{ij2},$$

а также считающие их количества статистики:

$$S^+_{Eq} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu_q}\mathbf{I}\{E^+_{ijq}\}, \qquad S^-_{Eq} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu_q}\mathbf{I}\{E^-_{ijq}\}, \qquad S^0_{Eq} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu_q}\mathbf{I}\{E^0_{ijq}\}, \tag{2}$$

принимающие значения от 0 до $m\nu_q$ с суммой $S^+_{Eq} + S^-_{Eq} + S^0_{Eq} = m\nu_q$, $q = 1, 2$.

Введем теперь в рассмотрение новый критерий, основанный на статистиках (2) и отклоняющий гипотезу H_0 (в пользу H_1), если

$$S^+_{Eq} > h_q(S^0_{Eq}), \qquad q = 1, 2. \tag{3}$$

Для краткости обозначим его через $\mathbf{S}_E$.

Лемма. *Критерий Уитни эквивалентен частному случаю* $\mathbf{S}_E$*-критерия* (3), *когда* $h_q(z)$ *— линейная убывающая функция вида* $2h_q(z) \equiv C_q - z$, $z = 0, 1, \ldots, m\nu_q$, *и критерию, отклоняющему гипотезу* H_0, *когда* $S^+_{Eq} - S^-_{Eq} > C_q - m\nu_q$, $q = 1, 2$, *где* C_q *— числа, входящие в критерий Уитни* (1).

Доказательство непосредственно следует из равенств (эквивалентности) событий

$$\{S^+_{Eq} > (C_q - S^0_{Eq})/2\} = \{2S^+_{Eq} + S^0_{Eq} > C_q\} = \{U_q > C_q\}.$$

Ясно, что при редукции пары статистик (S^+_{Eq}, S^-_{Eq}) к простой разности $S^+_{Eq} - S^-_{Eq}$ возможна потеря некоторой информации о выборках.

2. Характеристики критериев Уитни и $\mathbf{S}_E$

Предположим для простоты, что $n_1 = n_2 = n = 2\nu$. Для вычисления уровня значимости критерия Уитни можно воспользоваться, например, предложением 1.

Обозначим через $\mathfrak{P}(u)$ множество всех упорядоченных $(m+1)$-разбиений $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(n) = (n_0, n_1, \ldots, n_m)$ числа n (т. е. $n = n_0 + n_1 + \cdots + n_m$, где каждое целое число $n_i \geq 0$ и порядок следования чисел n_i существен), для которых

$$\sum_{i=0}^{m} (m-i) n_i = u.$$

Пусть $\mathfrak{p}' = (n'_0, n'_1, \ldots, n'_m) \in \mathfrak{P}(u_1)$ и $\mathfrak{p}'' = (n''_0, n''_1, \ldots, n''_m) \in \mathfrak{P}(u_2)$ — два таких $(m+1)$-разбиения числа n.

Удобно положить $0! = 1$.

Предложение 1 [5]. *Пусть U_1 и U_2 — статистики из* (1). *Тогда при гипотезе H_0*:

$$\mathbf{P}\{U_1 = u_1, U_2 = u_2 \mid H_0\} = \frac{m!(n!)^2}{(m+2n)!} \sum_{\mathfrak{p}' \in \mathfrak{P}(u_1)} \sum_{\mathfrak{p}'' \in \mathfrak{P}(u_2)} \prod_{i=0}^{m} \binom{n'_i + n''_i}{n'_i}.$$

В связи с поставленной задачей и в связи с тем, что и критерий Уитни, и предлагаемый здесь новый критерий наиболее чувствительны к сдвигам распределений, интересно сравнить их для семейств распределений, отличающихся в основном лишь сдвигами. К сожалению, найти в явном виде точные формулы для вычисления мощности критериев, как правило, не представляется возможным. Существует лишь несколько отдельных случаев, когда их удается получить. Наиболее просто это сделать в случаях с экспоненциальными и прямоугольными распределениями. Пусть для определенности и простоты

$$H_0 : F_X(x) = F_Y(x) = F_Z(x) = F(x) = 1 - e^{-x} \quad \text{при } x \geq 0, \tag{4}$$

$$H_1 : F_X(x) = G(x) = 1 - e^{-(x-\theta)} \quad \text{при } \theta > 0,\ x \geq \theta, \tag{5}$$

и

$$H_0 : F_X(x) = F_Y(x) = F_Z(x) = F(x) = x \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1, \tag{6}$$

$$H_1 : F_X(x) = G(x) = \frac{x-\theta}{1-\theta} \quad \text{при } 0 < \theta < 1,\ \theta \leq x \leq 1. \tag{7}$$

Для этих распределений справедливо соотношение

$$F(x) = b_0 + b_1 G(x), \quad x \geq \theta, \tag{8}$$

где в случае (4), (5) $b_0 = 1 - \exp(-\theta)$, а в случае (6), (7) $b_0 = \theta$, при этом в обоих случаях $b_1 = 1 - b_0$.

Для вычисление мощности критерия Уитни, т. е. вероятности отклонения гипотезы H_0, когда верна H_1, может служить следующее предложение.

Предложение 2. *Пусть в случае* H_1 *каждая из величин* Y_j *и* Z_j *имеет распределение* (4) (*или* (6)), *а каждая из случайных величин* X_i — *распределение* (5) (*или соответственно* (7)). *Тогда вероятность* $\mathbf{P}\{U_1 = u, U_2 = u_2 \mid H_1\}$ *с учетом* (8) *может быть записана в виде*

$$m!(n!)^2 \sum_{\mathfrak{p}'\in\mathfrak{P}(u_1)} \sum_{\mathfrak{p}''\in\mathfrak{P}(u_2)} \prod_{i=0}^{m} \binom{n_i' + n_i''}{n_i'} \sum_{r=0}^{n_0'+n_0''} \frac{b_0^r b_1^{2n-r}}{(m+2n-r)!r!}. \tag{9}$$

Доказательство. Поскольку функции F и G (по предположению) непрерывны, без потери общности можно считать, что величины $X_1, \ldots, X_m$ имеют различные значения. Обозначим через $X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(m)}$ эти величины, расположенные в порядке возрастания.

Пусть $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$. Введем в рассмотрение $m + 1$ открытых промежутков $I_0 = (-\infty, x_1)$, $I_h = (x_h, x_{h+1})$, $h = 1, 2, \ldots, m-1$, $I_m = (x_m, \infty)$. В соответствии с предположениями для вероятности p_h попадания случайной величины Y_j (или Z_j) в промежуток I_h, $h = 0, 1, \ldots, m$, имеем следующие очевидные равенства:

$$p_0 = F(x_1), \quad p_h = F(x_{h+1}) - F(x_h), \quad h = 1, 2, \ldots, m-1, \quad p_m = 1 - F(x_m).$$

Следовательно, в силу предположения о независимости наблюдений, вероятность того, что среди всех n наблюдений Y_j ровно n_0' наблюдений, а среди всех n наблюдений Z_j ровно n_0'' наблюдений будут меньше x_1, ровно n_1' и соответственно n_1'' наблюдений будут заключены между x_1 и x_2 и т. д., равна произведению двух полиномиальных распределений:

$$\frac{(n!)^2}{n_0'!n_1'!\ldots n_m'!n_0''!n_1''!\ldots n_m''!} p_0^{n_0'} p_1^{n_1'} \ldots p_m^{n_m'} p_0^{n_0''} p_1^{n_1''} \ldots p_m^{n_m''}.$$

Если при этом $X_{(1)} = x_1, X_{(2)} = x_2, \ldots, X_{(m)} = x_m$, то согласно (1) будем иметь

$$U_1 = \sum_{i=0}^{m} (m-i)n_i', \qquad U_2 = \sum_{i=0}^{m} (m-i)n_i''.$$

Отсюда ($n_i = n_i' + n_i''$, $i = 0, 1, \ldots, m$):

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{U_1 = u_1, U_2 = u_2 \mid X_{(1)} = x_1, \ldots, X_{(m)} = x_m; H_1\} \\
&\qquad = (n!)^2 \sum_{\mathfrak{p}'\in\mathfrak{P}(u_1)} \sum_{\mathfrak{p}''\in\mathfrak{P}(u_2)} \Bigl(\prod_{k=0}^{m} n_k'!n_k''!\Bigr)^{-1} p_0^{n_0} p_1^{n_1} \ldots p_m^{n_m} \\
&\qquad = (n!)^2 \sum_{\mathfrak{p}'\in\mathfrak{P}(u_1)} \sum_{\mathfrak{p}''\in\mathfrak{P}(u_2)} \Bigl(\prod_{k=0}^{m} n_h'!n_h''!\Bigr)^{-1} [F(x_1)]^{n_0} [F(x_2) - F(x_1)]^{n_1} \times \\
&\qquad\quad [F(x_3) - F(x_2)]^{n_2} \ldots [F(x_m) - F(x_{m-1})]^{n_{m-1}} [1 - F(x_m)]^{n_m}.
\end{aligned}$$

Чтобы получить вероятность $\mathbf{P}\{U_1 = u_1, U_2 = u_2 \mid H_1\}$, надо проинтегрировать последнее выражение по распределению порядковых статистик $X_{(1)}, \ldots, X_{(m)}$ при H_1. Элемент этого распределения равен $m!dG(x_1)\ldots dG(x_m)$ внутри области, где $\theta < x_1 < x_2 < \cdots < x_m < \infty$, и 0 вне ее (см., напр., [6]). Следовательно, в соответствии с (5) (или (7)) и (8) имеем

$$\mathbf{P}\{U_1 = u_1, U_2 = u_2 \mid H_1\} = m!(n!)^2 \sum_{\mathfrak{p}' \in \mathfrak{P}(u_1)} \sum_{\mathfrak{p}'' \in \mathfrak{P}(u_2)} \Big(\prod_{k=0}^{m} n'_k! n''_k!\Big)^{-1} b_1^{2n-n_0} \times$$

$$\int_\theta^\infty [1 - G(x_m)]^{n_m} dG(x_m) \int_\theta^{x_m} [G(x_m) - G(x_{m-1})]^{n_{m-1}} \, dG(x_{m-1}) \times$$

$$\int_\theta^{x_{m-1}} [G(x_{m-1}) - G(x_{m-2})]^{n_{m-2}} \, dG(x_{m-2}) \ldots \int_\theta^{x_3} [G(x_3) - G(x_{m-2})]^{n_2} \, dG(x_2) \times$$

$$\int_\theta^{x_2} [G(x_2) - G(x_1)]^{n_1} [b_0 + b_1 G(x_1)]^{n_0} \, dG(x_1).$$

Используя формулу бинома Ньютона и переходя последовательно к новым переменным $y_1, \ldots, y_m$, полагая $y_i = G(x_i)$, $i = 1, \ldots, m$, последнее соотношение сведем к виду

$$\mathbf{P}\{U_1 = u_1, U_2 = u_2 \mid H_1\} = m!(n!)^2 \sum_{\mathfrak{p}' \in \mathfrak{P}(u_1)} \sum_{\mathfrak{p}'' \in \mathfrak{P}(u_2)} \Big(\prod_{k=0}^{m} n'_k! n''_k!\Big)^{-1} \sum_{r=0}^{n_0} \binom{n_0}{r} b_0^r b_1^{2n-r} \times$$

$$\int_0^1 [1 - y_m]^{n_m} dy_m \int_0^{y_m} [y_m - y_{m-1}]^{n_{m-1}} \, dy_{m-1} \int_0^{y_{m-1}} [y_{m-1} - y_{m-2}]^{n_{m-2}} \, dy_{m-2} \times \cdots \times$$

$$\int_0^{y_3} [y_3 - y_2]^{n_2} \, dy_2 \int_0^{y_2} [y_2 - y_1]^{n_1} y_1^{n_0 - r} \, dy_1. \tag{10}$$

Для вычисления многократного интеграла вспомним, что (см. также, напр., [7, п. 855.51])

$$\int_0^{y_2} [y_2 - y_1]^{n_1} y_1^{n_0 - r} \, dy_1 = \frac{(n_0 - r)! n_1!}{(n_0 - r + n_1 + 1)!}.$$

Интегрируя теперь поочередно или используя метод математической индукции, легко убедиться, что интеграл в (10) равен

$$\frac{(n_0 - r)! n_1! \cdots n_m!}{(n_0 - r + n_1 + n_2 + \cdots + n_m + m)!} = \frac{(n_0 - r)! n_1! \cdots n_m!}{(m + 2n - r)!}. \tag{11}$$

Подставляя (11) в (10), приходим к представлению (9). Предложение 2 доказано. □

Перейдем теперь к получению характеристик нового $\mathbf{S}_E$-критерия (3). Введем сначала необходимые обозначения.

Обозначим через $\mathfrak{P}$ множество тех упорядоченных $(m+1)^2$-разбиений $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(\nu)$ числа ν вида

$$\mathfrak{p}(\nu) = (\nu_{00}, \nu_{01}, \ldots, \nu_{0m}, \nu_{10}, \nu_{11}, \ldots, \nu_{1m}, \ldots, \nu_{m(m-1)}, \nu_{mm}),$$

для которых имеет место неравенство $u > h(m\nu - u - v)$, где

$$u = \sum_{h=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} (m - \max(h,k)) \nu_{hk}, \quad v = \sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \min(h,k) \nu_{hk}. \tag{12}$$

Пусть

$$\mathfrak{p}'(\nu) = (\nu'_{00}, \nu'_{01}, \dots, \nu'_{0m}, \nu'_{10}, \nu'_{11}, \dots, \nu'_{1m}, \dots, \nu'_{m(m-1)}, \nu'_{mm}) \in \mathfrak{P},$$

$$\mathfrak{p}''(\nu) = (\nu''_{00}, \nu''_{01}, \dots, \nu''_{0m}, \nu''_{10}, \nu''_{11}, \dots, \nu''_{1m}, \dots, \nu''_{m(m-1)}, \nu''_{mm}) \in \mathfrak{P}$$

суть два подобных $(m+1)^2$-разбиения числа ν.

Предложение 3. *Уровень значимости $\mathbf{S}_E$-критерия дается формулой*

$$\mathbf{P}\{S^+_{Eq} > h(S^0_{Eq}),\ q = 1,2 \mid H_0\} = \frac{m!(\nu!)^2}{(m+2n)!} \sum_{\mathfrak{p}' \in \mathfrak{P}} \sum_{\mathfrak{p}'' \in \mathfrak{P}} \left(\prod_{k=0}^{m} s_k!\right) \left(\prod_{h,k=0}^{m} \nu'_{hk}! \nu''_{hk}!\right)^{-1},$$

где

$$s_k = \sum_{h=0}^{m} (\nu'_{kh} + \nu'_{hk} + \nu''_{kh} + \nu''_{hk}). \tag{13}$$

Доказательство. Пусть, как и прежде, $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ и вместе с $m+1$ открытыми промежутками $I_0 = (-\infty, x_1)$, $I_k = (x_k, x_{k+1})$, $k = 1, 2, \dots, m-1$, $I_m = (x_m, \infty)$ введем в рассмотрение $(m+1)^2$ открытых прямоугольников вида $I_{hk} = I_h \times I_k$, $h, k = 0, 1, \dots, m$. Так как в силу предположений для вероятности p_h попадания случайной величины Y_j (или Z_j) в промежуток I_h, $h = 0, 1, \dots, m$, имеем

$$p_0 = F(x_1), \qquad p_h = F(x_{h+1}) - F(x_h), \quad h = 1, 2, \dots, m-1, \qquad p_m = 1 - F(x_m),$$

то вероятность попадания пары $(Y_j, Y_{\nu+j})$ (или $(Z_j, Z_{\nu+j})$) в прямоугольник I_{hk} равна $p_{hk} = p_h p_k$. Отсюда вероятность того, что из всех ν пар $(Y_j, Y_{\nu+j})$ ровно ν'_{00}, а среди всех ν пар $(Z_j, Z_{\nu+j})$ ровно ν''_{00} пар попадут в прямоугольник I_{00}, а также соответственно ровно ν'_{hk} и ν''_{hk} пар попадут в прямоугольник I_{hk} $(h, k = 0, 1, \dots, m)$, определяется произведением двух полиномиальных распределений и равна $(\nu_{hk} = \nu'_{hk} + \nu''_{hk},\ h, k = 0, 1, \dots, m)$:

$$\frac{\nu!}{\nu'_{00}!\nu'_{01}! \cdots \nu'_{0m}!\nu'_{10}!\nu'_{11}! \cdots \nu'_{m(m-1)}!\nu'_{mm}!} p_{00}^{\nu'_{00}} p_{01}^{\nu'_{01}} \cdots p_{0m}^{\nu'_{0m}} p_{10}^{\nu'_{10}} p_{11}^{\nu'_{11}} \cdots p_{m(m-1)}^{\nu'_{m(m-1)}} p_{mm}^{\nu'_{mm}} \times$$

$$\frac{\nu!}{\nu''_{00}!\nu''_{01}! \cdots \nu''_{0m}!\nu''_{10}!\nu''_{11}! \cdots \nu''_{m(m-1)}!\nu''_{mm}!} p_{00}^{\nu''_{00}} p_{01}^{\nu''_{01}} \cdots p_{0m}^{\nu''_{0m}} p_{10}^{\nu''_{10}} p_{11}^{\nu''_{11}} \cdots p_{m(m-1)}^{\nu''_{m(m-1)}} p_{mm}^{\nu''_{mm}}$$

$$= (\nu!)^2 \left(\prod_{h,k=0}^{m} \nu'_{hk}! \nu''_{hk}!\right)^{-1} p_{00}^{\nu_{00}} p_{01}^{\nu_{01}} \cdots p_{0m}^{\nu_{0m}} p_{10}^{\nu_{10}} p_{11}^{\nu_{11}} \cdots p_{m(m-1)}^{\nu_{m(m-1)}} p_{mm}^{\nu_{mm}}. \tag{14}$$

Если при этом $X_{(1)} = x_1, X_{(2)} = x_2, \dots, X_{(m)} = x_m$, то согласно (2) будем иметь

$$S_1^+ = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{h,k=0}^{i} \nu'_{hk}, \quad S_1^- = \sum_{i=1}^{m} \sum_{h,k=i}^{m} \nu'_{hk}, \quad S_2^+ = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{h,k=0}^{i} \nu''_{hk}, \quad S_2^- = \sum_{i=1}^{m} \sum_{h,k=i}^{m} \nu''_{hk}.$$

Из этих представлений с помощью индукции по m следуют представления (2), более простые с точки зрения вычислений.

Стало быть, наряду с (14), мы можем записать, что

$$\mathbf{P}\ \{S_q^+ > h(S_q^0),\ q=1,2 \mid X_{(1)}=x_1,\dots,X_{(m)}=x_m; H_0\}$$

$$= (\nu!)^2 \sum_{\mathfrak{p}'\in\mathfrak{P}} \sum_{\mathfrak{p}''\in\mathfrak{P}} \left(\prod_{h,k=0}^{m} \nu'_{hk}!\nu''_{hk}!\right)^{-1} [F(x_1)F(x_1)]^{\nu_{00}} \cdots [F(x_1)(1-F(x_m))]^{\nu_{0m}} \times$$

$$[(F(x_2)-F(x_1))F(x_1)]^{\nu_{10}} \cdots [(F(x_2)-F(x_1))(1-F(x_m))]^{\nu_{1m}} \times$$

$$[(1-F(x_m))F(x_1)]^{\nu_{m0}} \cdots [(1-F(x_m))(1-F(x_m))]^{\nu_{mm}}$$

$$= (\nu!)^2 \sum_{\mathfrak{p}'\in\mathfrak{P}} \sum_{\mathfrak{p}''\in\mathfrak{P}} \left(\prod_{h,k=0}^{m} \nu'_{hk}!\nu''_{hk}!\right)^{-1} [F(x_1)]^{s_0}[F(x_2)-F(x_1)]^{s_1} \times$$

$$[F(x_3)-F(x_2)]^{s_2} \dots [F(x_m)-F(x_{m-1})]^{s_{m-1}}[1-F(x_m)]^{s_m}. \tag{15}$$

Чтобы получить вероятность $\mathbf{P}\{S_q^+ > h(S_q^0),\ q=1,2 \mid H_0\}$, надо проинтегрировать выражение (15) по распределению величин $X_{(1)},\dots,X_{(m)}$. При H_0 элемент этого распределения равен $m!dF(x_1)\cdots dF(x_m)$ внутри области, где $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m < \infty$, и 0 вне нее. Поэтому, используя снова последовательный переход к новым переменным $y_1,\dots,y_m$ по формуле $y_i = F(x_i)$, $i=1,\dots,m$, а также правую часть (10) и левую часть (11), находим, что

$$\mathbf{P}\ \{S_q^+ > h(S_q^0),\ q=1,2 \mid H_0\} = m!(\nu!)^2 \sum_{\mathfrak{p}'\in\mathfrak{P}} \sum_{\mathfrak{p}''\in\mathfrak{P}} \left(\prod_{h,k=0}^{m} \nu'_{hk}!\nu''_{hk}!\right)^{-1} \times$$

$$\int_0^\infty [1-F(x_m)]^{s_m}\, dF(x_m) \int_0^{x_m} [F(x_m)-F(x_{m-1})]^{s_{m-1}}\, dF(x_{m-1}) \times \cdots \times$$

$$\int_0^{x_3} [F(x_3)-F(x_2)]^{s_2}\, dF(x_2) \int_0^{x_2} [F(x_2)-F(x_1)]^{s_1} F(x_1)^{s_0}\, dF(x_1)$$

$$= m!(\nu!)^2 \sum_{\mathfrak{p}'\in\mathfrak{P}} \sum_{\mathfrak{p}''\in\mathfrak{P}} \left(\prod_{h,k=0}^{m} \nu'_{hk}!\nu''_{hk}!\right)^{-1} \times$$

$$\int_0^1 [1-y_m]^{s_m}\, dy_m \int_0^{y_m} [y_m-y_{m-1}]^{s_{m-1}}\, y_{m-1} \cdots \int_0^{y_3} [y_3-y_2]^{s_2}\, dy_2 \int_0^{y_2} [y_2-y_1]^{s_1} y_1^{s_0}\, dy_1$$

$$= m!(\nu!)^2 \sum_{\mathfrak{p}'\in\mathfrak{P}} \sum_{\mathfrak{p}''\in\mathfrak{P}} \left(\prod_{h,k=0}^{m} \nu'_{hk}!\nu''_{hk}!\right)^{-1} \frac{s_0!s_1!\dots s_m!}{(s_0+s_1+\cdots+s_m+m)!}.$$

Наконец, поскольку в соответствии с (13):

$$\sum_{k=0}^{m} s_k = \sum_{k=0}^{m}\sum_{h=0}^{m} (\nu'_{hk}+\nu'_{kh}+\nu''_{hk}+\nu''_{kh}) = 4\nu = 2n,$$

то предложение 3 доказано. □

Обратимся к вопросу о мощности $\mathbf{S}_E$-критерия.

Предложение 4. *Пусть выполнены условия предложения 2. Тогда с учетом* (8):

$$\mathbf{P}\,\{S_q^+ > h(S_q^0),\ q=1,2 \mid H_1\}$$
$$= m!(\nu!)^2 \sum_{\mathfrak{p}'(\nu)\in\mathfrak{P}} \sum_{\mathfrak{p}''(\nu)\in\mathfrak{P}} \left(\prod_{k=1}^{m} s_k!\right) \left(\prod_{h,k=0}^{m} \nu'_{hk}!\nu''_{hk}!\right)^{-1} \sum_{r=0}^{s_0} \binom{s_0}{r} \frac{(s_0-r)!b_0^r b_1^{n-r}}{(m+2n-r)!},$$

где s_k, $k=0,1,\dots,m$, *как и прежде, определяются формулой* (13).

Доказательство вполне аналогично доказательству предложений 2 и 3, поэтому для экономии места мы его опускаем.

3. Сравнение характеристик критериев. Числовые примеры

Приведем теперь некоторые числовые результаты, которые в какой-то мере характеризуют рассматриваемые критерии при малых выборках.

Случай с $m=5$, $n=2\nu=4$, $C=15$. В [2], используя концепцию близких альтернативных гипотез, были получены критические значения $h(z)$, $z=0,1,\dots,10$, двухвыборочного S_E-критерия (без всякой связи с распределениями (4), (5) и (6), (7)). Они даны в табл. 1.

Таблица 1. Значения $h(z)$, $z=0,1,\dots,10$, S_E-критерия, $m=5$, $n=4$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h	8	7	7	6	5	4	4	3	2	1	0

Чтобы при сравнении критериев уровень значимости $\mathbf{S}_E$-критерия был не больше уровня значимости критерия Уитни, была сделана замена $h(0)=9$.

Результаты вычислений мощности критериев Уитни и $\mathbf{S}_E$ для различных значений θ в (5) и (7) приводятся в табл. 2 и 3 с точностью, достаточной для сравнения. Нижний ряд в этих таблицах принадлежит $\mathbf{S}_E$-критерию. Столбец с $\theta=0.0$ содержит уровни значимости критериев.

Таблица 2. Мощности критериев Wh и $\mathbf{S}_E$ при $m=5$, $n=4$ в случае (4), (5)

θ	0.0	0.01	0.1	0.2	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0
Wh	0.0257	0.0270	0.0404	0.061	0.166	0.41	0.64	0.79	0.87	0.92	0.974
$\mathbf{S}_E$	0.0250	0.0263	0.0410	0.065	0.199	0.52	0.77	0.90	0.96	0.98	0.997

Таблица 3. Мощности критериев Wh и $\mathbf{S}_E$ при $m=5$, $n=4$ в случае (6), (7)

θ	0.0	0.01	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	0.8	0.9	0.95
Wh	0.0257	0.0270	0.0413	0.067	0.108	0.25	0.51	0.68	0.849	0.928
$\mathbf{S}_E$	0.0250	0.0263	0.0421	0.072	0.124	0.32	0.64	0.81	0.945	0.985

Случай с $m=7$, $n=2\nu=4$. При $C=21$ уровень значимости MW-критерия равен $0.0(81)$, а Wh-критерия — $0.01(770673)$. Подобно предыдущему случаю (без всякой связи с распределениями (4), (5) и (6), (7)) были получены критические значения S_E-критерия, приведенные в табл. 4, с которыми его уровень значимости оказался равным уровню значимости MW-критерия.

Чтобы при сравнения критериев уровень значимости $\mathbf{S}_E$-критерия был не больше уровня значимости Wh-критерия, была сделана замена $h(0)=12$.

Таблица 4. Значения $h(z)$, $z = 0, 1, \ldots, 14$, S_E-критерия, $m = 7$, $n = 4$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
h	11	11	10	9	8	8	7	6	5	5	4	3	2	1	0

Таблица 5. Мощности критериев Wh и $\mathbf{S}_E$ при $m = 7$, $n = 4$ в случае (4), (5)

θ	0.0	0.01	0.1	0.2	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0
Wh	0.01770	0.0188	0.031	0.053	0.16	0.44	0.67	0.81	0.89	0.94	0.980
$\mathbf{S}_E$	0.01768	0.0189	0.034	0.063	0.21	0.55	0.79	0.91	0.96	0.98	0.998

В табл. 5 и 6 сравниваются мощности критериев для различных значений θ в этом случае. Как и выше, нижний ряд в этих таблицах принадлежит $\mathbf{S}_E$-критерию.

Таблица 6. Мощности критериев Wh и $\mathbf{S}_E$ при $m = 7$, $n = 4$ в случае (6), (7)

θ	0.0	0.01	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	0.8	0.9	0.95
Wh	0.01770	0.01882	0.032	0.059	0.103	0.26	0.54	0.71	0.87	0.942
$\mathbf{S}_E$	0.01768	0.01897	0.036	0.072	0.133	0.35	0.67	0.83	0.95	0.987

Из сравнения в таблицах достаточно хорошо видно преимущество нового $\mathbf{S}_E$-критерия в мощности. Так как непараметрические критерии сравнительно мало подвержены влиянию отклонений от использованных при их построении конкретных альтернативных распределений, то можно надеяться, что очевидное преимущество в мощности нового критерия будет иметь место в более широком ряде случаев, а не только в проверенных с экспоненциальными и равномерными распределениями. Это чрезвычайно важно для многих приложений, где найти в явном виде точные выражения для вычисления мощности критериев довольно затруднительно или просто невозможно.

Литература

1. **Салов Г.И.** Новый статистический критерий для задач с двумя и тремя выборками, более мощный, чем критерии Вилкоксона и Уитни // Автометрия. — 2011. — Т. 47, № 4. — С. 58–70.
2. **Салов Г.И.** О мощности одного нового статистического критерия и двухвыборочного критерия Вилкоксона // Автометрия. — 2014. — Т. 50, № 1. — С. 44–59.
3. **Whitney D.R.** A bivariate extension of the U statistic // Annals of Mathematical Statistic. — 1951. — T. 22. — P. 274–282.
4. **Mann H.B., Whitney D.R.** On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other // Annals of Mathematical Statistic. — 1947. — Vol. 18. — P. 50–60.
5. **Салов Г.И.** О мощности непараметрических критериев для обнаружения протяженных объектов на случайном фоне // Автометрия. — 1997. — № 3. — С. 60–75.
6. **Wilks S.S.** Order statistics // Bull. Amer. Math. Soc. — 1948. — Vol. 54. — P. 5–50.
7. **Двайт Г.Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию 15 апреля 2014 г.