7. **Ветлуцкий В. Н., Поплавская Т. В.** К расчету ламинарного сжимаемого пограничного слоя на треугольном профилированном крыле со сверхзвуковыми передними кромками // Моделирование в механике.— 1989.— Т. 3(20), № 6.
8. **Шевелев Ю. Д.** Трехмерные задачи теории ламинарного пограничного слоя.— М.: Наука, 1977.
9. **Воскресенский Г. П., Ильина А. С., Татаренчик В. С.** Сверхзвуковое обтекание крыльев.— М., 1976.— (Препр./АН СССР, Ин-т прикл. математики; № 104 — 76).
10. **Воскресенский Г. П., Ильина А. С., Татаренчик В. С.** Сверхзвуковое обтекание крыльев с присоединенной ударной волной // Тр. ЦАГИ.— 1974.— Вып. 1590.
11. **Ветлуцкая Л. М., Ветлуцкий В. Н.** К расчету трехмерного несжимаемого ламинарного пограничного слоя на плоской пластине с препятствием // ЧММСС.— 1980.— Т. 11, № 4.
12. **Ветлуцкий В. Н., Поплавская Т. В.** Расчет ламинарного пограничного слоя на подветренной стороне треугольной пластины со сверхзвуковыми передними кромками // ПМТФ.— 1989.— № 1.

г. Новосибирск *Поступила 3/II 1992 г., в окончательном варианте — 1/X 1992 г.*

УДК 518:517.94

С. М. Аульченко

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАСЧЕТА ОБТЕКАНИЯ СКОРОСТНОГО ДОЗВУКОВОГО ПРОФИЛЯ

Широкие возможности ЭВМ привели к созданию различных численных методов расчета характеристик профилей, в большинстве из них используется конечно-разностное представление определяющих уравнений в частных производных. Принципиально иным является метод дискретного распределения особенностей для расчета несжимаемого потенциального течения, изложенный в [1]. В [2] показано, что этот метод может быть распространен также на решение двумерного уравнения Пуассона с распределением особенностей не только по границе, но и внутри поля течения, тем самым он дает возможность рассматривать трансзвуковое безударное обтекание профилей.

Метод граничных элементов (МГЭ) позволяет снизить на единицу размерность задачи и значительно уменьшить время расчета, он базируется на предположении, что плотности величин, входящих в интегралы, постоянны в малых ячейках области и в каждом малом элементе границы. С учетом того что процедура МГЭ автоматически удовлетворяет допустимым граничным условиям на бесконечности, необходимо проводить дискретизацию только границы как контура проектируемого тела. Дискретизация области не увеличивает порядка окончательной системы алгебраических уравнений, в которую включено также условие Кутта — Жуковского, записанное через конечные разности. Само граничное интегральное уравнение является формулировкой задачи, ведущей к точному ее решению. Если численное интегрирование проводится с учетом криволинейности границы, то привносимые погрешности можно сделать очень малыми. Кроме того, численное интегрирование — всегда более устойчивый и точный процесс, чем численное дифференцирование.

Дифференциальные уравнения потенциального безвихревого невязкого течения после использования соотношений

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v}{\partial s} + v\frac{\partial \theta}{\partial n}, \qquad \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{v}{M^2 - 1}\frac{\partial \theta}{\partial n}, \qquad \frac{\partial v}{\partial n} = v\frac{\partial \theta}{\partial s}$$

можно записать в виде

$$\text{(2)} \qquad \nabla \mathbf{v} = M^2 \partial v/\partial s.$$

Здесь s — направление по касательной к линии тока; n — перпендикуляр к ней; θ — угол наклона вектора скорости; M — локальное число Маха. Поскольку течение безвихревое, то после введения потенциала возмущения φ такого, что $\mathbf{v} = \nabla\Phi + \nabla\varphi$, с учетом (1), (2) имеем

$$\Delta\varphi = \mathrm{M}^2 \frac{\partial v}{\partial s} = Q(\mathrm{M}, v) \tag{3}$$

($\mathbf{v}_0 = \nabla\Phi$ — скорость невозмущенного потока). Условие непротекания на контуре профиля накладывает на φ требование

$$\varphi_n' = -\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}. \tag{4}$$

Численная реализация условия Кутта — Жуковского для профиля с нулевым углом задней кромки заключается в требовании равенства тангенциальных скоростей в точках ξ^- и ξ^- на верхней и нижней поверхностях профиля соответственно, если выполнено условие

$$h_t = |\xi^+ - \xi_k| = |\xi^- - \xi_k| \sim \varepsilon \tag{5}$$

($\varepsilon \ll 1$, ξ_k отвечает концевой точке профиля).

С учетом конечных разностей для производных (5) представим в виде

$$\varphi(\xi^+) - \varphi(\xi^-) = h_t\,[\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{t}(\xi^+) - \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{t}(\xi^-)] \tag{6}$$

($\mathbf{t}$ — вектор касательной к профилю в точке ξ). Используя теорему Грина, потенциал φ можно записать как

$$\varphi(\xi) = \int_C [\varphi(x) F(x, \xi) - v_n(x) G(x, \xi)]\, dl + \int_\Omega Q(x) G(x, \xi)\, d\Omega, \tag{7}$$

$$G(x, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \ln r,\ r = \sqrt{(x_1(x) - x_1(\xi))^2 + (x_2(x) - x_2(\xi))^2},$$

$$F(x, \xi) = n_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} G(x, \xi) = n_i(x)(x_i(x) - x_i(\xi))/2\pi r^2$$

(v_n — производная от φ по нормали к границе).

Численное решение краевой задачи осуществляется методом дискретного распределения особенностей, оно основано на предположении, что плотности Q, φ, v постоянны в малых ячейках области Ω и в каждом малом элементе границы, представленном отрезком прямой.

Как уже отмечалось, процедура МГЭ автоматически удовлетворяет допустимым граничным условиям на бесконечности, поэтому необходимо проводить дискретизацию только контура профиля. Пусть он разбит на $(N-1)$ элементов, параметры на которых считаются постоянными. На практике область, в которой Q отличен от нуля, ограничена линиями тока выше и ниже профиля, она разбивается на K ячеек. Тогда (7) преобразуется:

$$\frac{1}{2}\varphi(\xi_0^p) = \sum_{q=1}^{N-1} \varphi(x^q) \int_{\Delta C_q} F(x^q, \xi_0^p)\, dl(x^p) - \tag{8}$$

$$- \sum_{q=1}^{N-1} v_n(x^q) \int_{\Delta C_q} G(x^q, \xi_0^p)\, dl(x^p) + \sum_{k=1}^{K} Q(x^k) \int_{\Delta\Omega_k} G(x^k, \xi_0^p)\, d\Omega(x^k)$$

(ξ_0^p принадлежит элементу границы с номером p, q — номер элемента границы, $v_n(x) \equiv \varphi_n'$). Опираясь на (8), удовлетворяя (4) в конечном $(N-1)$ числе точек коллокации и требуя выполнения (6) в точке ξ_N, получаем систему нелинейных уравнений, где неизвестными являются плотности φ на граничных элементах:

$$F^c \boldsymbol{\varphi} = G^c \mathbf{v}_n + G^\Omega \mathbf{Q}. \tag{9}$$

Размерности величин, входящих в (9):

$$\dim \|F^c\| = (N \times N), \quad \dim \|G^c\| = (N \times N),$$

$$\dim \|G^\Omega\| = (N \times K), \quad \dim \boldsymbol{\varphi} = N, \quad \dim \mathbf{v}_n = N, \quad \dim \mathbf{Q} = K.$$

Здесь $F_{qp} = \begin{cases} \overline{F}_{qp}, & q \neq p,\ q = \overline{1, N}, \\ 1/2 - \overline{F}_{qp}, & p = \overline{1, N-1}, \end{cases}$ $\quad \overline{F}_{qp} = \int\limits_{\Delta C_q} F(x^q, \xi^p)\, dl_q,$

$$G^c_{qp} = \int\limits_{\Delta C_q} G(x^q, \xi^p)\, dl_q, \quad p = \overline{1, N-1}, \quad q = \overline{1, N};$$

$$G^{\Omega}_{l,p} = \int\limits_{\Delta\Omega_{lp}} G(x, \xi^{lp})\, d\omega_{lp}, \quad l = \overline{1, K}, \quad p = \overline{1, N-1}, \quad \xi^{lp} \in \Omega.$$

Последнее уравнение в (9) при $p = N$ соответствует условию (6).

Для определения Q как функции M и v в центре ячеек ΔQ используется конечно-разностная схема с участием значений φ в ΔQ, вычисляемых по формуле

$$\varphi(\xi_0^p) = \sum_{q=1}^{N-1} \varphi(x^q) \int\limits_{\Delta C_q} F(x^q, \xi_0^p)\, dl(x^p) -$$
$$- \sum_{q=1}^{N-1} v_n(x^q) \int\limits_{\Delta C_q} G(x^q, \xi_0^p)\, dl(x^p) + \sum_{k=1}^{K} Q(x^k) \int\limits_{\Delta\Omega_k} G(x^k, \xi_0^p)\, d\Omega(x^k),$$

где ξ_0^p принадлежит ΔQ_p; $\varphi(x^q)$ — значение, полученное на последней i-й итерации, а $Q(x^k)$ — на $(i-1)$-й итерации. Итерационный процесс организован по формуле

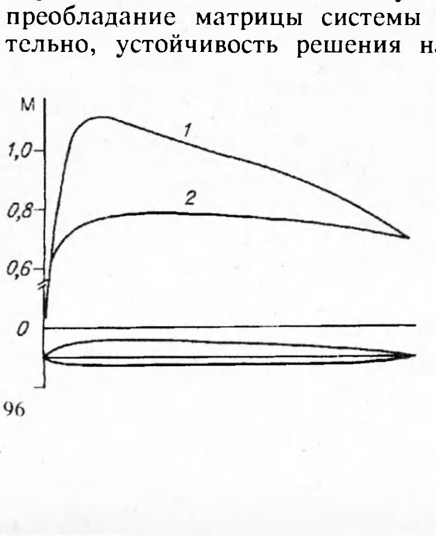
$$\varphi^{(i)} = \varphi^{(i-1)} - \lambda H(\varphi^{(i-1)})$$
$$(H(\varphi^{(i-1)}) = F^c\varphi^{(i-1)} - G^c v_n - G^{\Omega} Q^{(i-1)}).$$

Для его сходимости всегда можно подобрать соответствующее значение λ при условии, что производные от H по φ ограничены константой K_0 [3]. Для двух первых слагаемых это очевидно. Так как нелинейную часть можно представить в виде

$$Q = \frac{(v/v_0)^2 M_0^2}{1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2 [1 - (v/v_0)^2]} \frac{\partial v}{\partial s},$$

а входящие в это выражение v и $\partial v/\partial s$ вычисляются через конечные разности от $\varphi(\xi_0^p)$, то для любой триангуляции области производные от Q по φ ограничены. С учетом хорошего начального приближения φ_0, отвечающего решению уравнения (3) с нулевой правой частью, т. е. несжимаемой жидкости, процесс сходится за шесть—восемь итераций. Время расчета ~20 с на PC/AT 386. Все сказанное справедливо и для трансзвуковой области, но только до возникновения скачка, приводящего к росту K_0 на нем, к ухудшению и затем к отсутствию сходимости.

Интегралы, содержащие $\ln r$, являются «слабосингулярными» и вычисляются обычным образом вдоль граничного элемента, проходящего через особую точку $x^i = \xi^i$, причем особенность у этой функции после интегрирования пропадает. Интегралы с $F(x, \xi)$, содержащие особенность порядка $1/r$, являются «сингулярными» и обеспечивают диагональное преобладание матрицы системы алгебраических уравнений и, следовательно, устойчивость решения на каждой итерации [4].



Для примера выбран профиль, спроектированный для использования в трансзвуковом безударном режиме полета. На рисунке представлено распределение числа Маха для условий $M_0 = 0,75$, $\alpha = 0$ (линии *1*, *2* соответствуют верхнему и нижнему контурам профиля). Экспериментальные и расчетные интегральные характеристики профиля:

$$C_y^{э} = 0,129, \quad C_y^{р} = 0,130,$$
$$m_z^{э} = -0,046, \quad m_z^{р} = -0,049.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.** Методы граничных элементов.— М.: Мир, 1987.
2. **Luu T. S., Coulmy G.** Method of calculating the compressible flow round an aerofoil on a cascade up to the shockfree transonic range // Comput. and Fluids.— 1977.— V. 5.— P. 261.
3. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1972.
4. **Бенерджи П., Баттерфилд Р.** Методы граничных элементов в прикладных науках.— М.: Мир, 1984.

г. Новосибирск *Поступила 22/VI 1992 г., в окончательном варианте — 29/X 1992 г.*

УДК 532.08

В. Ш. Шагапов

О ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

В [1] обнаружены резкое увеличение (примерно в 2—3 раза) расхода жидкости, насыщенной газом (н-гексан с углекислым газом) при фильтрации через пористую среду, при снижении давления на выходе из пористой среды до близкого к давлению газовыделения и уменьшение расхода при дальнейшем снижении давления на выходе. В данной работе для объяснения этого эффекта (резкого увеличения расхода жидкости) предложена схема «газового подшипника». В рамках такой схемы получены выражения для коэффициентов относительной фазовой проницаемости. На основе системы уравнений построены стационарные и автомодельные решения. Проведены сопоставление и анализ найденных решений с экспериментальными данными.

1. Основные уравнения. Рассмотрим течение жидкости в пористой среде при наличии газовыделения. Параметры, относящиеся к жидкой и газовой фазам, отмечены нижними индексами 1 и 2. Уравнения сохранения масс при двухфазной фильтрации имеют вид [2—4]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_1^0 m S_1) + \nabla\cdot(\rho_1^0 m S_1 \mathbf{v}_1) = -I, \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\rho_2^0 m S_2) + \nabla\cdot(\rho_2^0 m S_2 \mathbf{v}_2) = I, \tag{1.1}$$

где ρ_i^0, S_i, $\mathbf{v}_i$, m, I — плотность, насыщенность, скорость, пористость и интенсивность газовыделения, отнесенная к единице объема пористой среды. Учитывая, что в процессе массообмена между фазами участвует только растворенный газ, уравнение неразрывности для растворенного газа запишем как

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_1^0 g m S_1) + \nabla\cdot(\rho_1^0 g m S_1 \mathbf{v}_1) = -I \tag{1.2}$$

(g — массовая концентрация растворенного газа). Уравнения импульсов для фаз примем в виде обобщенных законов Дарси

$$m S_i \mathbf{v}_i = -\frac{kK_i}{\mu_i}\nabla p \qquad (i = 1,\ 2). \tag{1.3}$$

Здесь k, K_i, μ_i — абсолютная проницаемость пористой среды, относительная проницаемость и динамическая вязкость.

Для зависимости концентрации растворенного газа от давления в области газовыделения примем закон Генри и будем полагать, что газовая фаза удовлетворяет уравнению Клапейрона — Менделеева:

$$g = Gp, \qquad p = \rho_2^0 RT. \tag{1.4}$$

Кроме того, будем пренебрегать зависимостью параметров G, R, m и μ_i от давления и полагать процесс изотермическим ($T = T_0 = \text{const}$).