УДК 534.1; 539.3

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ТРУБОПРОВОДА

М. А. Ильгамов, М. М. Шакирьянов

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского федерального исследовательского центра РАН, 450054 Уфа, Россия
E-mails: ilgamov@anrb.ru, shakmar9@mail.ru

Исследованы изгибные колебания трубопровода под действием переменного давления транспортируемой жидкости и вертикального колебательного движения опор. Рассмотрена первая форма колебаний. Изучены нелинейные вынужденные, параметрические колебания и их взаимодействие. Проведено сравнение результатов приближенного аналитического и численного решений.

Ключевые слова: трубопровод, переменное давление, вынужденные и параметрические колебания, взаимодействие.

DOI: 10.15372/PMTF20200608

Введение. Методы решения задач о взаимодействии трубопроводов и шлангов с внутренним и внешним потоками жидкости или воздуха рассмотрены в работе [1]. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ, исследованы в [2]. В [3] изучены нелинейные колебания консольного трубопровода, транспортирующего жидкость, механизм возникновения хаотических режимов. Параметрические колебания участка трубопровода изучены в [4]. Теоретическое и экспериментальное исследование вынужденных и параметрических изгибных колебаний трубы с внутренним потоком жидкости выполнено в работах [5, 6]. Внешнее и внутреннее воздействия на изгибные колебания трубы, транспортирующей жидкость со сверхкритической скоростью, изучены в [7]. В [8] представлен обзор литературы, посвященной исследованию динамических явлений в трубопроводных системах.

Постановка задачи. Рассматриваются изгибные колебания трубопровода под действием внутреннего переменного давления и вертикального движения опор. Трубопровод заполнен идеальной несжимаемой жидкостью и шарнирно закреплен на двух опорах. Одна из опор ($x = 0$) неподвижна относительно основания, а другая ($x = L$) может скользить по нему. При этом скользящая опора прикреплена к основанию с помощью линейно-упругих элементов.

В статическом состоянии труба изогнута под действием собственного веса и находится под влиянием внутреннего постоянного давления p_0 (внешнее давление принимается равным нулю). В момент времени $t = 0$ суммарное давление p в жидкости становится переменным и опоры начинают совершать вертикальные поступательные перемещения $s(t)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-01-00150_а) и с использованием средств государственного бюджета на 2019–2022 гг. (№ г.р. 0246-2019-0088).

Уравнение изгибных колебаний трубы относительно прогиба $W(x,t)$, учитывающее внутреннее давление и изменение кривизны осевой линии, окружной и продольной деформаций, имеет вид [9]

$$\Big(g-\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}-\frac{d^2 s}{dt^2}\Big)\,dm-EJ\,\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}\,dx-\Big[Fp(1-\chi)-\alpha\int\limits_0^L\Big(\frac{\partial W}{\partial x}\Big)^2dx\Big]\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\,dx=0,$$
$$J=\frac{\pi}{4}\,[(R+h)^4-R^4],\quad \chi=\frac{2\nu}{1+\lambda},\quad \lambda=\frac{Eh}{CL},\quad \alpha=\frac{\pi EhR}{(1+\lambda)L},\quad F=\pi R^2. \tag{1}$$

Здесь g — гравитационное ускорение; E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала трубы; C — коэффициент упругости элементов крепления опоры к основанию; L — длина трубы; R — ее внутренний радиус; h — толщина стенки; m — суммарная масса однородной трубы и жидкости.

Суммарное внутреннее давление в трубе, вертикальные перемещения опор и функция прогиба задаются формулами

$$p=p_0+p_a\sin\Omega_1 t,\quad s=s_0\sin\Omega_2 t,\quad W=[W_0+w(t)]\sin\beta x,\quad \beta=\pi/L, \tag{2}$$

где p_a, s_0 — амплитуды колебаний динамической части давления и перемещения основания; Ω_1, Ω_2 — круговые частоты.

Подставляя формулы (2) в уравнение (1) и интегрируя его по x в пределах от 0 до L с использованием метода Бубнова — Галеркина, получаем

$$\ddot w+\omega^2(1-2\mu\sin\Omega_1 t)(W_0+w)+\gamma(W_0+w)^3=\frac{4}{\pi}\,(g+s_0\Omega_2^2\sin\Omega_2 t),$$
$$\omega^2=\frac{\beta^2F(1-\chi)(p_*-p_0)}{m_1},\qquad \mu=\frac{p_a}{2(p_*-p_0)},\qquad \gamma=\frac{\alpha\beta^4L}{2m_1}, \tag{3}$$
$$p_*=\frac{\beta^2EJ}{F(1-\chi)},\qquad m_1=\frac{m}{L}=\pi\{\rho_0R^2+\rho[(R+h)^2-R^2]\}.$$

Нелинейная задача Коши (3) с начальными условиями $w=0$, $\dot w=0$ $(t=0)$ решается численно методом Рунге — Кутты. Затем к этому решению применяется дискретное преобразование Фурье.

Вынужденные колебания. В случае постоянного внутреннего давления ($p_a=0$) вынужденные колебания трубопровода происходят вследствие вертикального колебательного движения опор. Тогда приближенное решение (3) при установившихся вынужденных колебаниях трубы описывается функцией $w=a\sin\Omega_2 t+b\cos\Omega_2 t$. При $W_0=0$ с помощью метода гармонического баланса получаем

$$a^3+\frac{4(\omega^2-\Omega_2^2)}{3\gamma}\,a=\frac{16s_0\Omega_2^2}{3\pi\gamma},\qquad b=0.$$

При частоте линейного резонанса $\Omega_2=\omega$ амплитуда A нелинейных вынужденных колебаний вычисляется по формуле

$$A=4\Big(\frac{\pi s_0f^2}{3\gamma}\Big)^{1/3},\qquad f=\frac{\omega}{2\pi}. \tag{4}$$

Параметрические колебания. В случае переменного внутреннего давления и неподвижных опор ($s_0=0$) приближенное решение уравнения (3) в окрестности главного параметрического резонанса $\Omega_1\approx 2\omega$ записывается в виде $w=a_2\sin(\Omega_1 t/2)+b_2\cos(\Omega_1 t/2)$. С использованием метода гармонического баланса при $W_0=0$ находим

$$\Big(\omega^2-\frac{\Omega_1^2}{4}+\frac{3\gamma A^2}{4}\Big)a_2-\mu\omega^2b_2=0,\quad -\mu\omega^2a_2+\Big(\omega^2-\frac{\Omega_1^2}{4}+\frac{3\gamma A^2}{4}\Big)b_2=0,\quad A^2=a_2^2+b_2^2,$$

откуда следует

$$A = 4\pi f \sqrt{\frac{1}{3\gamma}\Big(\frac{f_1^2}{4f^2} - 1 + \mu\Big)}, \qquad f_1 = \frac{\Omega_1}{2\pi}. \tag{5}$$

Взаимодействие вынужденных и параметрических колебаний. Анализ проводится при $\Omega_1 = 2\omega$, $\Omega_2 = \omega$, когда реализуется наиболее сильное взаимодействие вынужденных и параметрических колебаний. Принимая приближенное решение (3) в прежнем виде, но с постоянными a_3, b_3 и применяя метод гармонического баланса, имеем

$$-4\mu\omega^2 a_3 + 3\gamma A^2 b_3 = (16/\pi) s_0 \omega^2, \quad 3\gamma A^2 a_3 - 4\mu\omega^2 b_3 = 0, \quad A^2 = a_3^2 + b_3^2. \tag{6}$$

Решение системы алгебраических уравнений (6) получено численно.

Расчеты проведены для стальной трубы с параметрами $L = 1{,}2$ м, $R = 0{,}01$ м, $h = 0{,}0005$ м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\rho = 7800$ кг/м^3, $\nu = 0{,}3$, $\rho_0 = 800$ кг/м^3, $g = 9{,}81$ м/с^2, $p_0 = 6{,}0$ МПа, $p_a = 0{,}3$; $0{,}6$ МПа, $C = 64{,}0$ МПа; $s_0 = 0{,}0003$; $0{,}0007$ м. При данных значениях параметров частота f находится по формулам (3), (4) и приблизительно равна $f \approx 18$ Гц, критическое внутреннее давление равно $p_* = 9{,}99$ МПа.

Численное моделирование. Сравнение результатов. На рис. 1 представлены зависимости амплитуд динамической составляющей прогиба от собственной частоты колебаний трубы. Видно, что относительные амплитуды A/R увеличиваются с ростом частоты собственных колебаний f. Кроме того, приближенное аналитическое и численное решения качественно согласуются. Увеличение амплитуды динамической составляющей давления приводит к увеличению амплитуды параметрических колебаний. Поэтому их рост при взаимодействии вынужденных и параметрических колебаний происходит за счет усиления последних. С увеличением амплитуды перемещения опор увеличиваются амплитуды вынужденных колебаний. Увеличение амплитуды при взаимодействии колебаний является следствием увеличения амлитуды перемещения опор. При одновременном увеличении амплитуд колебаний динамической составляющей давления и перемещения опор взаимодействие вынужденных и параметрических колебаний также становится более существенным.

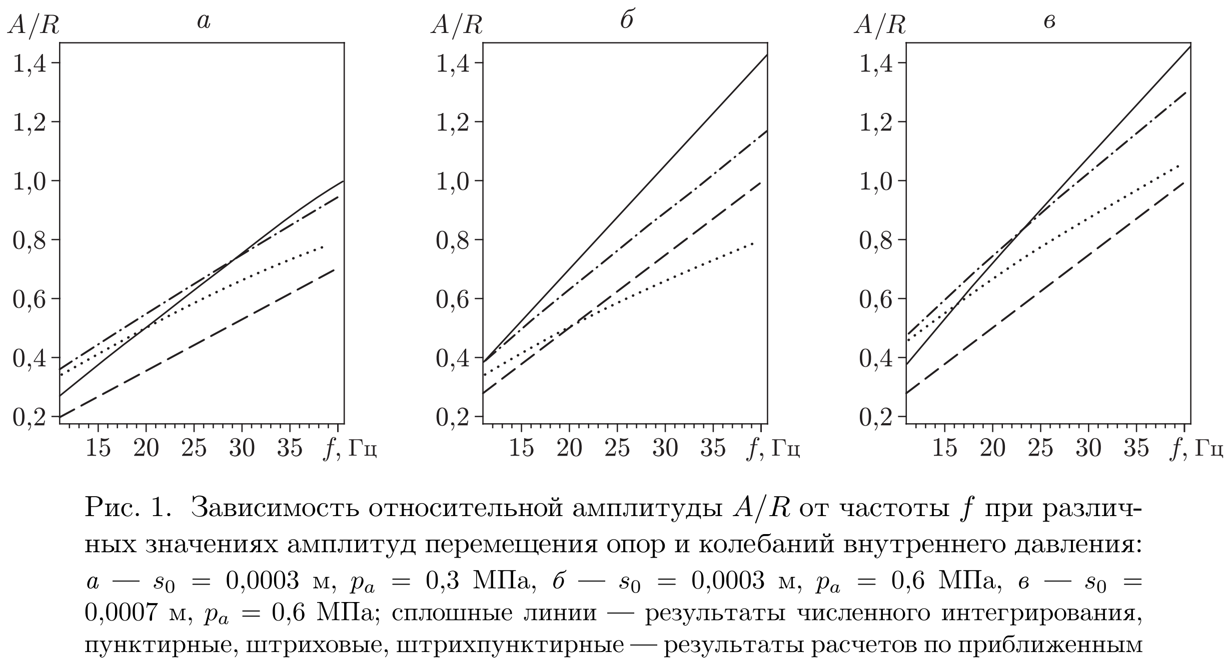

Рис. 1. Зависимость относительной амплитуды A/R от частоты f при различных значениях амплитуд перемещения опор и колебаний внутреннего давления: *а* — $s_0 = 0{,}0003$ м, $p_a = 0{,}3$ МПа, *б* — $s_0 = 0{,}0003$ м, $p_a = 0{,}6$ МПа, *в* — $s_0 = 0{,}0007$ м, $p_a = 0{,}6$ МПа; сплошные линии — результаты численного интегрирования, пунктирные, штриховые, штрихпунктирные — результаты расчетов по приближенным аналитическим формулам (4), (5), (6) соответственно

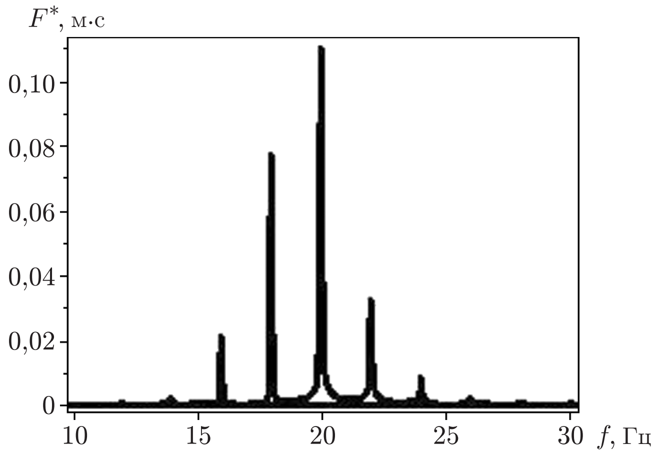

Рис. 2. Зависимость модулей F^* комплексных амплитуд от частоты f при $s_0 = 0{,}0007$ м, $p_a = 0{,}6$ МПа

Спектр частот при взаимодействии вынужденных и параметрических колебаний трубы показан на рис. 2. С помощью преобразования Фурье можно выделить колебания не только с основной частотой перемещения опор ($f = 18$ Гц), но и с дробными частотами, что является особенностью установившихся колебаний в нелинейных системах. В случае взаимодействия вынужденных и параметрических колебаний происходит существенное увеличение амплитуд колебаний с частотами $f = 16$; 20 Гц.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Светлицкий В. А.** Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982.
2. **Ильгамов М. А.** Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969.
3. **Ilgamov M. A., Tang D. M., Dowell E. H.** Flutter and forced response of a cantilevered pipe: the influence of internal pressure and nozzle discharge // J. Fluids Structures. 1994. V. 8. P. 139–156.
4. **Васина В. Н.** Параметрические колебания участка трубопровода с протекающей жидкостью // Вестн. Моск. энергет. ин-та. 2007. № 1. С. 1–11.
5. **Panda L. N., Kar R. C.** Nonlinear dynamics of a pipe conveying pulsating fluid with combination, principal parametric and internal resonances // J. Sound Vibrat. 2008. V. 309. P. 375–406.
6. **Миронов М. А., Пятаков П. А., Андреев А. А.** Вынужденные колебания трубы с потоком жидкости // Акуст. журн. 2010. Т. 56, № 5. С. 684–692.
7. **Chen L. Q., Zhang Y. L., Zhang G. C., Ding H.** Evolution of the double-jumping in pipes conveying fluid flowing at the supercritical speed // Intern. J. Non-Linear Mech. 2014. V. 58. P. 11–21.
8. **Li S., Karney B. W., Liu G.** FSI research in pipeline systems: A review of the literature // J. Fluids Structures. 2015. V. 57. P. 277–297.
9. **Ильгамов М. А.** Динамика трубопровода при действии внутреннего ударного давления // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2017. № 6. С. 83–96.

Поступила в редакцию 30/I 2020 г.,
после доработки — 13/III 2020 г.
Принята к публикации 30/III 2020 г.