УДК 532.6+532.528

# ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФОРМЫ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ ПО ЗАДАННОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ СКОРОСТИ ТЕЧЕНИЯ ВДОЛЬ ЕГО ПОВЕРХНОСТИ

*Л. Г. Гузевский*

(*Новосибирск*)

Рассматривается задача о нахождении формы тела вращения по заданной на нем зависимости величины скорости течения от длины дуги образующей. Течение предполагается безвихревым, установившимся, осесимметричным, жидкость — идеальной, несжимаемой. Задача решается в точной нелинейной постановке. В отличие от предыдущих работ [1, 2] предлагаемый метод позволяет получить решение с заданной степенью точности.

В осесимметричном безвихревом течении функция тока Стокса $\Psi(x, r)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}=0,$$

где $x$, $r$ — цилиндрические координаты.

Функция тока определяется с точностью до произвольной постоянной. Значение этой постоянной выбирается из условия обращения функции $\Psi$ в нуль вдоль искомой границы тела, уравнение которой $r=\rho(s)$, $0\leqslant s\leqslant L$, где $s$ — длина дуги образующей.

Дополнительным условием для определения функции $\rho(s)$ служит заданный вид зависимости

$$v=v_\infty V(s),\ 0\leqslant s\leqslant L \tag{1}$$

величины скорости течения на теле от дуговой абсциссы, где $v_\infty$ — величина скорости невозмущенного потока.

Следует отметить, что задача разрешима не при любой зависимости $V(s)$. Необходимым условием разрешимости задачи является требование $\max v(s)> v_\infty$. Для доказательства этого факта, помимо основного течения, рассмотрим равномерный поток со скоростью $v=v_\infty$ вне цилиндрической трубы бесконечной длины, диаметр которой равен максимальному размеру тела. По построению область основного течения включает в себя область вспомогательного течения. Следовательно, для этих потоков выполнены все условия теоремы сравнения М. А. Лаврентьева [3], из которой вытекает, что в точках контакта граничных линий тока скорость основного течения больше скорости вспомогательного потока. Таким образом, на границе исходного течения найдена точка с дуговой абсциссой $s=s_*$, в которой $v(s_*) > v_\infty$.

Исходное течение представим как результат наложения равномерного потока со скоростью $v_\infty$ на систему вихревых колец погонной интенсивности $\gamma(s)$, непрерывно распределенных вдоль границы обтекаемого тела. Функция тока в этом случае имеет вид [4]

$$\Psi(x,r)=\frac{v_\infty r^2}{2}-\frac{r}{4\pi}\iint\limits_{\Omega}\frac{\gamma(s)\cos(\theta-\varphi)\,d\omega}{R}, \tag{2}$$

где $d\omega=\rho(s)dsd\varphi$ — элемент поверхности $\Omega$; $R=\sqrt{(x-\xi)^2+r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\varphi)}$.
В силу осевой симметрии положим $\theta=0$. Учитывая, что, согласно [4],

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi d\varphi}{R}=\frac{\sqrt{(x-\xi)^2+(r+\rho)^2}}{r\rho}\,[(2-\lambda^2)\,K(\lambda)-2E(\lambda)],$$

где $K(\lambda)$ и $E(\lambda)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем $\lambda=2\sqrt{r\rho\,[(x-\xi)^2+(r+\rho)^2]^{-1}}$, из (2) получим следующее представление функции тока

$$\Psi(x,r)=\frac{v_\infty r^2}{2}-\frac{1}{4\pi}\int_0^L\gamma(s)\sqrt{(x-\xi)^2+(r+\rho)^2}\,[(2-\lambda^2)\,K(\lambda)-2E(\lambda)]\,ds.$$

Принимая во внимание, что погонная интенсивность $\gamma(s)$ вихревого слоя равна величине скорости течения на поверхности тела [5], из условия $\Psi(\xi,\rho)=0$ на границе для функции $\rho(s)$ получим следующее интегро-дифференциальное уравнение

$$\rho(s)=\frac{1}{2\pi\rho(s)}\int_0^1 V(\sigma)\sqrt{[\xi(\sigma)-\xi(s)]^2+[\rho(\sigma)+\rho(s)]^2}\times[(2-\lambda^2)\,K(\lambda)-2E(\lambda)]\,d\sigma\equiv A[\rho], \tag{3}$$

где

$$\xi(s)=\int_0^s\sqrt{1-(d\rho/d\sigma)^2}\,d\sigma, \tag{4}$$

$$\lambda=\lambda(\sigma,s)=2\sqrt{\rho(\sigma)\rho(s)}/\tau(\sigma,s),$$

$$\tau(\sigma,s)=\sqrt{[\xi(\sigma)-\xi(s)]^2+[\rho(\sigma)+\rho(s)]^2}.$$

В данном уравнении осуществлен переход к безразмерным переменным. За характерный линейный размер принята полная длина $L$ образующей тела, а в качестве характерной скорости — скорость $v_\infty$ невозмущенного потока.

Искомую функцию $\rho(s)$ представим в виде сплайна третьего порядка. Коэффициенты кубических полиномов на каждом из промежутков $[s_k, s_{k+1}]$, $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ определяются из условия непрерывности функции и ее первых двух производных в узловых точках [6,7].

Интегро-дифференциальное уравнение (3) решается методом последовательных приближений. За нулевое приближение можно принять зависимость $\rho^{(0)}(s)=s(1-s)$. Значения $\rho_k^1=\rho^{(1)}(s_k)$ искомой функции в узловых точках $s_k$ на первом шаге итерационного процесса находятся из уравнения (3)

$$\rho_k^1=A\left[\rho^{(0)}\right]_{s=s_k}.$$

После нахождения параметров $\rho_k^1$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ решается задача интерполирования функции $\rho^{(1)}(s)$ при помощи кубического сплайна. Зависимость $\xi=\xi^{(1)}(s)$ также представляется в виде сплайна третьего порядка. Величины $\xi_k^1 = \xi^{(1)}(s_k)$ находятся из формулы (4).

Последующие приближения выстраиваются полностью аналогично, и итерационный процесс продолжается до тех пор, пока в пределах заданной точности $\varepsilon$ не будет выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{n-1} |\rho_k^{i+1} - \rho_k^i| < \varepsilon.$$

Контроль точности основан на решении прямой задачи об обтекании найденного тела вращения и сравнении получаемого при этом распределения скорости вдоль его границы с исходной зависимостью (1). Требуемая точность расчетов достигается за счет увеличения числа узловых точек.

При численных расчетах в уравнении (3) выделяется логарифмическая особенность подынтегральной функции при $\sigma=s$

$$\rho(s) = \frac{1}{2\pi\rho(s)}\left\{\int_0^1 V(\sigma)\,\tau(\sigma, s)\,[(2-\lambda^2)\,F(\lambda) - 2E(\lambda)]\,d\sigma - \right.$$

$$\left. - \int_0^1 V(\sigma)\,\tau(\sigma, s)\,(2-\lambda^2)\ln|\sigma - s|\,d\sigma\right\},$$

где $F(\lambda)=K(\lambda)+\ln|\sigma - s|$ — функция, не имеющая особенностей на промежутке $[0,1]$.

Неособые интегралы вычисляются по квадратурной формуле Гаусса. При интегрировании функции с логарифмической особенностью применяется квадратурная формула Гаусса с весом $g(u)=\ln u$

$$\int_0^1 f(u)\ln u\,du = -\sum_{k=1}^{10} A_k f(u_k).$$

Таблица узлов $u_k$ и коэффициентов $A_k$ приведена в [8].

Для полных эллиптических интегралов используются приближенные формулы

$$K(\lambda) = \ln 4 - \frac{1}{2}\ln p(\sigma, s) - \ln|\sigma - s| + \sum_{k=1}^{4} \eta^k (a_k - b_k \ln\eta);$$

$$E(\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{4} \eta^k (c_k - d_k \ln\eta),$$

где $$\eta = 1-\lambda^2; \quad p(\sigma, s) = \frac{1}{\tau^2(\sigma, s)}\left\{\left[\frac{\xi(\sigma)-\xi(s)}{\sigma - s}\right]^2 + \left[\frac{\rho(\sigma)-\rho(s)}{\sigma - s}\right]^2\right\},$$

а численные значения параметров $a_k$ $b_k$, $c_k$ и $d_k$ ($k$=1, 2, 3, 4) представлены в [9]. Максимальная погрешность данных представлений менее $1{,}5\times\times10^{-9}$.

В качестве примера рассмотрим задание скорости в виде

$$V(s)=\frac{3}{2}\sin s\pi.$$

| $\rho_{\text{точ}}$ | $\rho_{\text{числ}}$ | $\xi_{\text{точ}}$ | $\xi_{\text{числ}}$ |
|---|---|---|---|
| 0,09836 | 0,09841 | 0,01558 | 0,01567 |
| 0,18710 | 0,18719 | 0,06079 | 0,06070 |
| 0,25752 | 0,25756 | 0,13121 | 0,13119 |
| 0,30273 | 0,30274 | 0,21995 | 0,21994 |
| 0,31831 | 0,31830 | 0,31831 | 0,31831 |

Известно [4], что данное распределение скорости реализуется при обтекании сферы. Таким образом, точное решение задачи имеет вид

$$\rho(s)=\frac{1}{\pi}\sin s\pi,$$

$$\xi(s)=\frac{1}{\pi}(1-\cos s\pi).$$

Приближенное решение получено при $n$=10 и $\varepsilon$=0,0001. Время расчета на машине БЭСМ-6 составило менее одной минуты. В таблице проводится сравнение приближенного и точного решений в равноотстоящих точках $s_k$ ($k$=1, 2, 3, 4, 5). Следовательно, максимальное отклонение приближенного решения от точного составляет менее 0,0001 от длины образующей $L$.

*Поступила 17 IX 1974*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Киселев О. М.* Построение тела вращения по заданному на нем распределению скорости.—«Изв. вузов. Авиацион. техн.», 1959, № 2.
2. *Этерман И. И.* Определение поверхности тела вращения по заданному распределению давления.— «Докл. АН СССР», 1947, т. 56, № 4.
3. *Биркгоф Г., Сарантонелло Э.* Струи, следы и каверны. М., «Мир», 1964.
4. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М., Физматгиз, 1963.
5. *Сидоров О. П.* Решение задачи об обтекании тела вращения.—«Труды КАИ», 1958, вып. 38.
6. *Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. М., «Мир», 1972.
7. *Михалевич Ю. И., Омельченко О. К.* Процедуры кусочно-полиномиальной интерполяции функций одной и двух переменных. Новосибирск, изд. ВЦ СО АН СССР, 1970, сер. Стандартные программы и процедуры, вып. 11.
8. *Крылов В. И., Пальцев А. А.* Таблицы для численного интегрирования функций с логарифмическими и степенными особенностями. Минск, «Наука и техника», 1967.
9. *Дымарский Я. С., Лозинский Н. Н., Матушкин А. Т., Розенберг В. Я., Эрглис В. Р.* Справочник программиста. Т. 1. Л., 1963.