8. **Lane C. E.** A quasi-vortex-lattice method in thin wing theory // J. Aircraft.— 1974.— V. 11, N 9.
9. **Риман И. С., Крепс Р. Л.** Присоединенные массы тел различной формы // Тр. ЦАГИ.— 1947.— Вып. 635.

г. Омск *Поступила 23/V 1989 г.*

УДК 532.526.2:532.526.4

В. И. Васильев, С. В. Хохлов, Е. Ю. Шальман

К РАСЧЕТУ ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

В [1] продемонстрирована возможность расчета отрывных течений с помощью интегральных методов теории пограничного слоя. В [2] показано, что, решая обратную задачу для полной системы уравнений пограничного слоя и учитывая взаимодействие с внешним потоком, можно сравнительно просто рассчитать течения с тонкими отрывными зонами, не прибегая при этом к интегрированию уравнений Навье — Стокса. В настоящее время такой подход используется в основном для описания течений вокруг профилей [3, 4]. Цель данной работы — создание вычислительной методики, которая позволила бы в рамках теории взаимодействующего пограничного слоя рассчитывать несколько иной класс течений, часто встречающихся в приложениях. К ним относятся, в частности, течения в диффузорных каналах и в каналах с разделителем потоков. Рассматриваются как ламинарные, так и турбулентные течения. Предложен способ ускорения сходимости итерационного процесса.

1. Отметим, что, в принципе, имеется несколько возможностей описания сильного взаимодействия (являющегося главной особенностью отрывных течений), классифицируемых по тому признаку, какая задача (прямая или обратная) решается для внешнего потока и пограничного слоя. Первая возможность — чисто прямая задача. Здесь определяется скорость невязкого потока вдоль поверхности u_e, затем находится толщина вытеснения δ, контур поверхности подправляется на толщину вытеснения и вновь рассчитывается u_e. Процесс продолжается до установления и может быть представлен в виде схемы

$$u_e \to \delta \to u_e \to \delta \to \ldots \tag{1.1}$$

Вторая возможность — чисто обратная задача. Вначале задается толщина вытеснения. Из обратной задачи для пограничного слоя определяется скорость на внешней границе U_e, которая должна совпадать со скоростью в невязком потоке. Для того чтобы удовлетворить последнему условию, решается обратная задача для внешнего течения и находится новое распределение δ, и т. д. Схематически данную процедуру можно записать так:

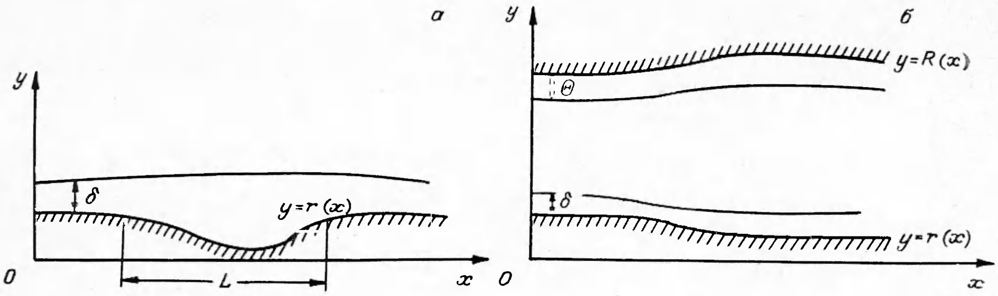
$$\delta \to U_e \to \delta \to U_e \to \ldots \tag{1.2}$$

Третья возможность — обратно-прямая задача. По заданному распределению u_e находятся две толщины вытеснения: δ — из решения прямой задачи для пограничного слоя и Δ — из решения обратной задачи для внешнего течения. По разнице этих величин корректируется u_e и процесс повторяется:

(1.3)
$$\begin{tikzcd}[sep=small] & \delta \arrow[dr] & & \delta \arrow[dr] & \\ u_e \arrow[ur] \arrow[dr, dashed] & & u_e \arrow[ur] \arrow[dr, dashed] & & \cdots \\ & \Delta \arrow[ur, dashed] & & \Delta \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Наконец, рассмотрим прямо-обратную задачу, когда по заданной толщине вытеснения находятся u_e (прямая задача) и U_e (обратная задача для пограничного слоя), а по их разнице корректируется δ:

(1.4)
$$\begin{tikzcd}[sep=small] & U_e \arrow[dr] & & U_e \arrow[dr] & \\ \delta \arrow[ur] \arrow[dr] & & \delta \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\ & u_e \arrow[ur] & & u_e \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$



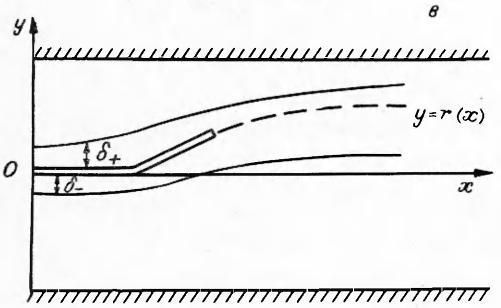


Рис. 1

Известны и другие подходы, используемые обычно в рамках трехпалубной модели [5]. Подходы, схематически изображенные формулами (1.1) и (1.3), связаны с решением прямой задачи пограничного слоя и, следовательно, с возникновением особенности Гольдштейна [5]. Поэтому для решения задач в рамках таких подходов приходится применять специальные процедуры, позволяющие избежать возникновения особенности при численном интегрировании уравнений пограничного слоя. Такие процедуры обычно не универсальны, а итерационный процесс часто не сходится. Применение подхода (1.2) связано с решением обратной задачи для невязкого потока, что в ряде случаев, например в каналах, весьма затруднительно, тогда как для решения прямой задачи в случае невязкого потока существует множество эффективных алгоритмов. В настоящее время наиболее универсальным подходом к описанию вязко-невязкого взаимодействия, по-видимому, является прямо-обратный подход (1.4). На его основе и строится вычислительная методика данной работы.

2. Схемы плоских течений несжимаемой жидкости, рассматриваемых нами, представлены на рис. 1 (*а* — обтекание свободной поверхности, контур которой описывается уравнением $y = r(x)$, *б* — течение в канале, *в* — обтекание разделителя, установленного в канале, двумя потоками с различными полными давлениями). Считается, что число Рейнольдса Re велико и характерный размер неоднородности обтекаемой поверхности порядка толщины пограничного слоя ($\Delta r = O(\delta)$), в силу чего отрывные зоны будут тонкими. Когда анализируется течение в канале, кроме того, предполагается, что имеется невязкое ядро, характерный поперечный размер которого порядка ширины канала $R - r$, и пограничные слои, причем $\delta \leqslant (R - r)$.

При выполнении таких условий пограничный слой удобно описывать в переменных

$$X = x,\ Y = y - r(x),\ U = u;\ V = v - u\ (dr/dx)$$

(x, y — декартовы координаты (см. рис. 1); u, v — составляющие вектора скорости в них). В новых переменных уравнения, однако, имеют обычный вид

$$U\partial U/\partial X + V\partial U/\partial Y = \beta + \partial((\nu + \varepsilon)\partial U/\partial Y)/\partial Y; \tag{2.1}$$

$$\partial V/\partial Y = -\partial U/\partial X. \tag{2.2}$$

Здесь также введены обозначения: $\beta = U_e dU_e/dX$, $U_e(X) = \lim\limits_{Y\to\infty} U(X, Y)$, ν — ламинарная вязкость, ε — турбулентная, которая может быть найдена с помощью полуэмпирической модели. Отметим, что в обратной задаче параметр β заранее неизвестен, для его определения необходимо задать распределение толщины вытеснения

$$\int_0^\infty (1 - U/U_e)\, dY = \delta(X). \tag{2.3}$$

Граничные условия для системы (2.1), (2.2)

$$Y = 0 \quad U = V = 0, \quad Y \to \infty \quad \partial U/\partial Y \to 0, \tag{2.4}$$

а в начальном сечении должно быть задано распределение продольной скорости

$$U(0, Y) = U_e(0) f(Y). \tag{2.5}$$

В расчетах полагалось, что начальный участок поверхности прямой $r = \mathrm{const}$, в ламинарном случае $f(Y)$ определялась из решения Блазиуса, а в турбулентном — аппроксимировался профиль скорости на пластине [6].

Задача (2.1)—(2.5) решалась численно. Соотношение (2.1) записывалось в конечно-разностную форму с помощью схемы Кранка — Никольсона и центральных разностей по переменной Y, которые на равномерной сетке обеспечивают второй порядок аппроксимации по этой координате. Поскольку уравнение (2.1) нелинейное, чтобы реализовать второй порядок аппроксимации по X, применялись локальные (в каждом сечении) итерации. При записи конвективных членов в области обратных токов ($U < 0$) использовалась аппроксимация [7] $U\partial U/\partial X = 0$, если $U < 0$. В некоторых расчетах при решении задачи взаимодействия в зоне возвратного течения $\partial U/\partial X$ аппроксимировалась разностями против потока, где недостающие значения U брались из предыдущего расчета. Результаты в обоих случаях практически одинаковы, однако первый способ [7] требует меньших вычислительных затрат. Для дискретизации (2.2) были взяты центральные разности, а при записи интеграла (2.3) — формула трапеций. Таким образом, численный метод в целом имеет второй порядок аппроксимации.

Так как в (2.1) наряду с полем U неизвестен и параметр β, конечно-разностные аналоги (2.1) и (2.3) в любом сечении необходимо решать совместно. Соответствующая система разностных соотношений имеет вид

$$a_j U_{j+1} - b_j U_j + c_j U_{j-1} = e_i \beta + d_j, \quad 2 \leqslant j \leqslant N - 1; \tag{2.6}$$

$$\sum_{j=1}^{N} w_j U_j = 0; \tag{2.7}$$

$$U_1 = 0, \quad U_N = U_{N-1}, \tag{2.8}$$

где вид коэффициентов для краткости не приводится; N — число точек сетки по Y. Соотношения (2.8) — разностная аппроксимация граничных условий (2.4). Во избежание дополнительных итераций при решении системы (2.6)—(2.8) использовали модифицированный вариант метода прогонки

$$U_{j+1} = D_j U_j + G_j + E_j \beta. \tag{2.9}$$

Применяя второе краевое условие (2.8) и соотношения (2.6), с помощью рекуррентных соотношений определяем прогоночные коэффициенты. Последовательно подставляя (2.9) в (2.7), исключаем U_j и, учитывая, что $U_1 = 0$, находим β, затем обратной прогонкой с помощью (2.9) — поле U. Несложно показать, что для модифицированного варианта прогонки достаточные условия устойчивости (условия на a_j, b_j, c_j) те же, что и в обычном случае [8].

Наряду с описанным способом решения был апробирован и другой вариант, когда вместо задачи (2.1)—(2.4) рассматривается эквивалентная ей

$$U\partial\omega/\partial X + V\partial\omega/\partial Y = \partial^2((\nu + \varepsilon)\omega)/\partial Y^2; \quad (2.10)$$

$$\partial U/\partial Y = \omega; \quad (2.11)$$

$$\partial V/\partial Y = -\partial U/\partial X; \quad (2.12)$$

$$\int_0^\infty (Y - \delta)\,\omega dY = 0; \quad (2.13)$$

$$Y = 0 \quad U = V = 0, \ Y \to \infty \quad \omega \to 0. \quad (2.14)$$

С помощью таких же разностных схем, как в первом случае, получим, что в сечении необходимо решить систему

$$a_j\omega_{j+1} - b_j\omega_j + c_j\omega_{j-1} = d_j, \quad 2 \leqslant j \leqslant N - 1; \quad (2.15)$$

$$\sum_{j=1}^{N} w_j\omega_j = 0; \quad (2.16)$$

$$\omega_N = 0. \quad (2.17)$$

Для решения системы (2.15)—(2.17) применимы обычные формулы прогонки, но поскольку вместо одного из краевых условий имеем интегральное уравнение (2.16), для нахождения ω_1 воспользуемся тем же методом исключения, что и при определении β. Данный подход обеспечивает такую же точность, но позволяет немного сэкономить память ЭВМ, так как не требуется запоминать лишний прогоночный коэффициент.

В большинстве представленных далее расчетов сетка по X была равномерной, а разбиение по Y сгущалось к стенке согласно рекомендации [9]. Отметим, что когда рассматриваются течения в каналах, соответствующую задачу необходимо решать для пограничного слоя на каждой поверхности.

3. Турбулентные течения нами описывались с помощью однопараметрической модели [10]

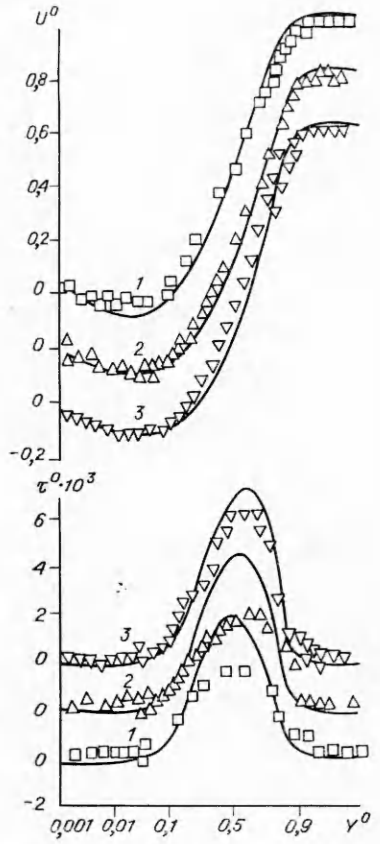
$$U\partial\varepsilon/\partial X + V\partial\varepsilon/\partial Y = \partial((\varkappa\varepsilon + \nu)\partial\varepsilon/\partial Y)/\partial Y + \alpha\varepsilon|\partial U/\partial Y| - \gamma\varepsilon(\xi\varepsilon + \nu)/Y^2, \quad (3.1)$$

где $\varkappa$, γ, ξ — коэффициенты; α — функция отношения ε/ν. Граничные условия имеют вид

$$Y = 0 \quad \varepsilon = 0, \ Y \to \infty \quad \partial\varepsilon/\partial Y \to 0.$$

В качестве начальных условий задавалось распределение турбулентной вязкости в пограничном слое на плоской пластине [6]. Для численного интегрирования (3.1) применялась та же конечно-разностная схема, что и для (2.1).

Модель [10] широко апробирована и достаточно хорошо зарекомендовала себя в расчетах безотрывных пограничных слоев, слоев смешения и струйных течений. Для того чтобы оценить точность описания отрыва, здесь рассматривалось течение, экспериментально изучавшееся в [11]. Решалась обратная задача, при этом распределение $\delta(X)$ заимствовано из [11], а сопоставление проводилось для расчетных и измеренных распределений скорости и напряжений трения. На рис. 2 скорость отнесена к скорости в данном сечении ($U^0 = U/U_e(X)$); напряжения трения τ — к скоростному напору $\left(\tau^0 = \tau/\rho U_e^2(X)\right)$; продольная координата — к величине L, равной расстоянию от входа в модель до последнего сечения, в котором проводились замеры ($L = 508$ см), ($X^0 = X/L$, $Y^0 = Y/\delta$). Точки — эксперимент, кривые — расчет: $X^0 = 0{,}694$ (*1*), 0,724 (*2*), 0,782 (*3*). Коэффициенты в соотношении (3.1) взяты из [10] и специально не корректировались, тем не менее модель удовлетворительно описывает распределение параметров в отрывной зоне.



Р и с. 2

4. Внешнее невязкое течение считается потенциальным, т. е. если ввести функцию тока Ψ, то она должна удовлетворять уравнению Лапласа:

$$\partial^2\Psi/\partial x^2 + \partial^2\Psi/\partial y^2 = 0. \tag{4.1}$$

Для решения задачи о взаимодействии пограничного слоя с внешним потоком достаточно знать распределение скорости невязкого течения (u_e) вдоль контура, подправленного на толщину вытеснения (например, при $y = r + \delta$ (см. рис. 1, *а*)). Отметим, что только при таком способе определения u_e сращивание ее с продольной скоростью в пограничном слое обеспечивает и сращивание поперечных составляющих. В задачах об обтекании свободной поверхности, используя теорию тонкого тела, можно представить u_e в виде интеграла [2]

$$u_e(x) = W(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (d/d\xi\,(U_e\delta))/(x-\xi)\,d\xi, \tag{4.2}$$

где $W(x) = u_\infty + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (dr/d\xi)/(x-\xi)\,d\xi;$

u_∞ — скорость набегающего потока. При заданной толщине вытеснения соотношение (4.2) позволяет найти $u_e(x)$. В численных расчетах интегралы берутся по конечному отрезку, вне пределов которого $dr/dx = 0$, и, кроме того, можно пренебречь вкладом $d\delta/dx$. Размер такой области следует определять из условия независимости результата от пределов интегрирования.

В канале же, чтобы вычислить $u_e(x)$, приходится решать уравнение (4.1). Здесь удобно перейти к переменным

$$\xi = x,\ \eta = [y - (r+\delta)]/[(R-\Theta) - (r+\delta)]$$

(R, r — контуры верхней и нижней стенок (см. рис. 1, *б*), Θ, δ — соответствующие толщины вытеснения). В качестве краевых условий задается распределение функции тока на входе, верхней и нижней границах. На выходе ставится условие $\partial\Psi/\partial\xi = 0$, которое дает линейное распределение v и обеспечивает сращивание в выходном сечении. Во всех расчетах, выполненных нами, поток на входе считался однородным, т. е. $\Psi = u_\infty(y - r - \delta)$ при $x = 0$, а условия непротекания при $y = r + \delta$ и $y = R - \Theta$ имеют вид $\Psi = 0$ и $\Psi = Q$ (Q — суммарный расход через канал).

Конечно-разностный аналог (4.1), записанный по схеме второго порядка аппроксимации, интегрировался итерационным методом переменных направлений [8].

5. Для сращивания решений в пограничном слое и внешнем потоке требуется удовлетворить условию $U_e(x) = u_e(x)$, которое позволяет найти толщину вытеснения. Однако U_e и u_e — это функционалы от δ, явный вид которых неизвестен, что заставляет использовать при решении прямо-обратной задачи итерационный подход (1.4). Организация итераций — очень важный элемент метода расчета, от эффективности этого алгоритма существенно зависит общий объем вычислительных затрат.

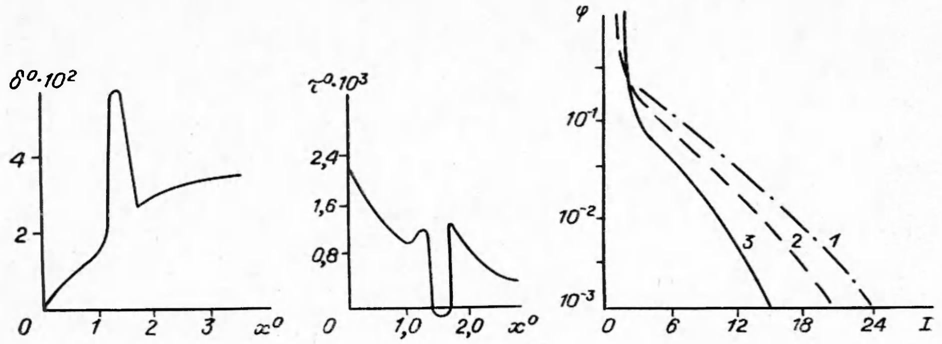


Рис. 3

Простая итерационная формула предложена Картером [2]

(5.1) $$\delta_{i+1}/\delta_i = 1 + \zeta((u_e - U_e)/U_e)_i$$

(i — номер итерации, ζ — параметр релаксации). Провести априорную оценку ζ не удается, его приемлемое значение подбирается в процессе расчетов, что снижает эффективность метода. Нами предпринята попытка сформулировать более эффективный и надежный алгоритм, дающий возможность ускорить сходимость процесса (1.4).

Интеграл в (4.2) аппроксимируется по формуле трапеций

(5.2) $$u_m = W_m + \sum_{k=1}^{M} C_{km} U_k \delta_k.$$

Здесь для сокращения записи не приводится вид коэффициентов C_{km} и опущен индекс e в обозначении скорости; k, m — номера точек сетки по x; M — общее число узлов. Анализируя интегральное уравнение импульсов для пограничного слоя, получим приближенное соотношение, справедливое в каждом сечении x:

(5.3) $$\Delta U/U = -(\Delta\delta/\delta)/(2 + H)$$

($\Delta U = U_{i+1} - U_i$, $\Delta\delta = \delta_{i+1} - \delta_i$, H — формпараметр). Потребовав, наконец, выполнения условия $U_{i+1} = U_i$, получим с помощью (5.2), (5.3) систему линейных алгебраических уравнений для нахождения поправок к толщине вытеснения

(5.4) $$(u - U)_m = \sum_{k=1}^{M} \Gamma_{mk} \Delta\delta_k.$$

Решив систему (5.4) методом исключения Гаусса с выделением главного элемента, найдем новое распределение δ:

(5.5) $$\delta_{i+1} = \delta_i + \zeta\Delta\delta.$$

Параметр ζ принимался равным 0,5 во всех случаях. Отметим, что, хотя при выводе (5.4) использовалось соотношение (4.2), справедливое для свободного течения, фактически эту итерационную формулу можно применить и для расчетов течений в каналах.

Эффективность метода проверялась на примере обтекания углубления на поверхности (см. рис. 1), форма которого описывается зависимостью $r(x)/L = 0{,}05[4(x^0 - 1{,}5)^2 - 1]^3$ при $1 \leqslant x^0 \leqslant 2$, $r(x) = 0$ при $x^0 > 2$, $x^0 < 1$, где $x^0 = x/L$, а L — длина углубления. Течение ламинарное, $\mathrm{Re} = u_\infty L/\nu = 2{,}08 \cdot 10^4$, точка начала пограничного слоя отстоит от углубления на расстоянии $\Delta x^0 = 1$. На рис. 3 представлены распределения толщины вытеснения ($\delta^0 = \delta/L$) и трения на стенке $\left(\tau^0 = \tau_w/\rho u_\infty^2\right)$. Видно, что имеется отрывная зона. Здесь же показана динамика сходимости итераций, $\varphi = |(u_e - U_e)/U_e|$; I — номер итерации; *1* — расчет

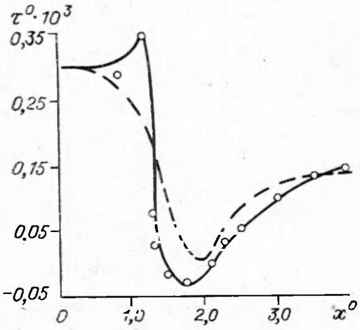


Рис. 4

по формуле (5.1), $\zeta = 0{,}5$; *2* — то же, но $\zeta = 1{,}2$; *3* — расчет по предложенной методике (5.4), (5.5). Если пользоваться (5.1), то при попытках задать ζ больше 1,2 сходимости нет, т. е. кривая *2* близка к предельной кривой сходимости. Отсюда ясно, что применение (5.4), (5.5) действительно ускоряет сходимость не менее чем на 30 %. В дальнейшем только этот подход использовался для расчета свободных течений и течений в каналах (см. рис. 1, *а*, *б*).

6. Для оценки возможностей расчета течений в канале рассматривали две ситуации. 1. Ламинарное течение в симметричном диффузорном канале ($R(x) = -r(x)$, $R(x)/L = 1 + 0{,}08(x^0-1)^2(5-2x^0)$ при $1 \leqslant x^0 \leqslant 2$; $R(x) = 1$ при $x^0 \leqslant 1$; $R(x) = 1{,}08$ при $x^0 \geqslant 2$; $x^0 = x/L$; L — длина переходного участка), которое в [12] рассчитывалось с помощью параболизованных уравнений Навье — Стокса. 2. Турбулентное течение в несимметричном диффузорном канале ($R/L = 0{,}75$; $r(x)/L = 0{,}201 - 1{,}981(x^0)^3 + 2{,}956(x^0)^4 - 1{,}176(x^0)^5$ при $0 \leqslant x^0 \leqslant 1$, $r(x)/L = 0{,}201$ при $x^0 \leqslant 0$, $r = 0$ при $x^0 > 1$), которое экспериментально исследовалось в [13].

В первом случае $\mathrm{Re} = u_\infty L/\nu = 6{,}25 \cdot 10^3$, пограничный слой развивается от точки, отстоящей на расстоянии $\Delta x^0 = 2{,}96$ от переходного участка, в расчете начальное сечение помещено на расстоянии $\Delta x^0 = 1$ от переходного участка. Распределение трения на стенке канала приведено на рис. 4 $(\tau^0 = \tau_w/\rho u_\infty^2)$: сплошная линия — настоящая работа, точки — [12]. Видно, что оба расчета хорошо согласуются друг с другом. Наряду с этими данными представлен также результат расчета в рамках параболического приближения (штриховая кривая).

В параболическом приближении уравнения пограничного слоя используются для описания всего поля течения, а давление считается постоянным поперек канала. Здесь примерно в 3 раза занижается размер отрывной зоны и, как показывают другие сопоставления, имеется погрешность до 10 % в определении перепада давления. Таким образом, при рассмотрении отрывных потоков в канале важно учитывать взаимодействие пограничного слоя с невязким ядром, и тогда погранслойное приближение позволяет хорошо описать течение.

Турбулентное течение в несимметричном диффузоре характеризуется $\mathrm{Re} = 5{,}85 \cdot 10^5$, пограничный слой развивается от точки, отстоящей на расстоянии $\Delta x^0 = 2{,}7$ от переходного участка, начальное сечение помещено на расстоянии $\Delta x^0 = 1$. На рис. 5 изображены распределения трения на деформированной стенке $(\tau^0 = \tau_w/\rho u_\infty^2)$ и давление у этой поверхности ($c_p = 2(p - p_0)/\rho u_\infty^2$, p_0 — давление в начале переходного участка): сплошная линия — расчет, точки — эксперимент [13]. Распределение трения в отрывной зоне описывается удовлетворительно, однако на участке разгона наблюдается некоторое расхождение. В свою очередь, расчетное давление в отрывной зоне несколько завышается. Все же в целом соответствие можно признать удовлетворительным, но для повышения точности необходимо усовершенствовать модель турбулентности [10]. Расчеты течений в каналах проводили на сетках, содержащих 50 узлов вдоль оси x, 60 узлов — по y в пограничном слое и 20 — в невязком ядре. Время счета на ЭВМ ЕС-1061 примерно 5 мин.

7. Наконец, еще один тип течения, который можно рассчитать в приближении взаимодействующего пограничного слоя,— обтекание разделителя, установленного в канале (см. рис. 1, *в*). Сильное взаимодействие пограничного слоя с внешним потоком у задней кромки обусловлено здесь как резким изменением граничных условий, так и возможным отрывом от поверхности разделителя. Существенным отличием данной

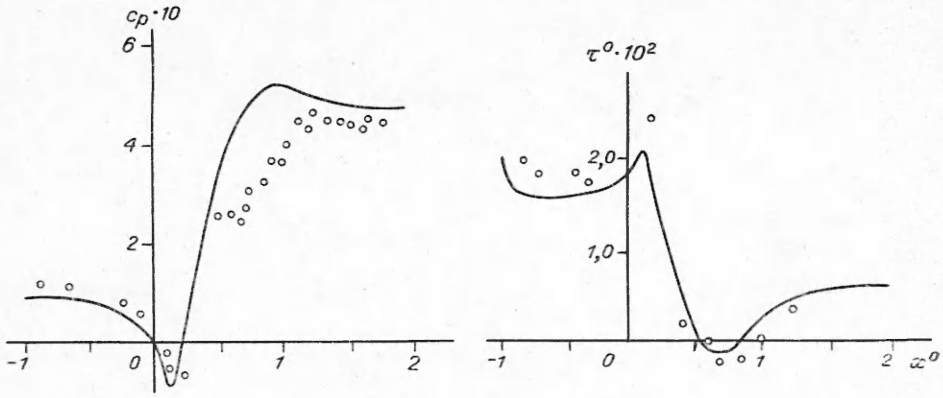


Рис. 5

задачи от задачи об обтекании задней кромки профиля [4] является то, что след развивается в канале и что полные параметры (в несжимаемой жидкости константы Бернулли) в потоках сверху и снизу от разделителя могут быть разными. В силу отмеченных обстоятельств в задаче о взаимодействии появляется еще один параметр — положение следа.

В качестве линии, характеризующей положение следа, введем разделительную линию тока ($y = r(x)$), продолжающую обтекаемую поверхность за заднюю кромку ($x = z$). Обозначим толщину вытеснения пограничного слоя и следа выше этой линии δ_+, ниже δ_-. Расчет течения осуществляется следующим образом. При заданных δ_+, δ_-, r независимо определяются невязкие течения в верхней и нижней половинах по той же методике, что и для отдельного канала. В области $x \leqslant z$ решаются две обратные задачи (2.1)—(2.5) для пограничных слоев при заданных δ_+ и δ_-. В области $x > z$ также можно решать задачи (2.1)—(2.5) для верхней и нижней частей следа, но при этом необходимо заменить граничное условие прилипания условием непрерывности поля скорости на разделительной линии тока

(7.1) $$Y = 0 \quad [U] = 0, \quad [\partial U/\partial Y] = 0, \; V = 0, \; \beta_+ = \beta_-,$$

где [...] — скачок параметра. В силу последнего из условий (7.1) в следе можно задавать только одну из величин: δ_+ или δ_- — с той стороны от разделителя, с которой происходит отрыв (т. е. в схеме на рис. 1, *в* следует задавать δ_-).

Два условия сращивания $(U_e)_+ = (u_e)_+$, $(U_e)_- = (u_e)_-$ позволяют в области $x \leqslant z$ определить δ_+ и δ_-, а в области $x > z$ δ_- и r. Соответствующий итерационный алгоритм является обобщением алгоритма Картера. Так, при $x \leqslant z$ используется (5.1), а при $x > z$

$$(\delta_-)_{i+1}/(\delta_-)_i = 1 + \zeta_1((u_- - U_-)/U_-)_i + \zeta_2((u_+ + U_+)/U_+)_i,$$
$$r_{i+1}/r_i = 1 + \chi_1((u_- - U_-)/U_-)_i + \chi_2((u_+ + U_+)/U_+)_i.$$

Сходящиеся решения получены при $\rho_1 = 1{,}0$; $\rho_2 = 0$; $\chi_1 = 0$; $\chi_2 = 0{,}1$. Обобщение алгоритма (5.4), (5.5) затруднено, поскольку отсутствует явное выражение зависимости δ_+ от δ_-.

В качестве примера рассматривалось ламинарное обтекание разделителя, форма которого описывается зависимостью $r(x)/L = 1 + \operatorname{tg} \alpha(x^0 - 0{,}9)$ при $0{,}9 \leqslant x^0 \leqslant 1{,}9$, $r(x)/L = 1$ при $x^0 \leqslant 0{,}9$, $x^0 = x/L$, L — длина отклоненной части, $\alpha = 5°$, в канале с параллельными стенками излом контура при $x^0 = 0{,}9$ сглажен радиусом скругления, равным единице. Пограничные слои на разделителе развивались от точки, отстоящей от задней кромки на расстоянии $\Delta x^0 = 3{,}01$, пограничные слои на стенках канала не учитывались, $\mathrm{Re} = 10^4$. Варьировалось отношение скоростей на входе в верхнюю и нижнюю части канала ($m = (u_\infty)_+/(u_\infty)_-$), пропорционально изменялись и Re_+ (при $m = 1$ $\mathrm{Re}_+ = \mathrm{Re}_-$). На рис. 6

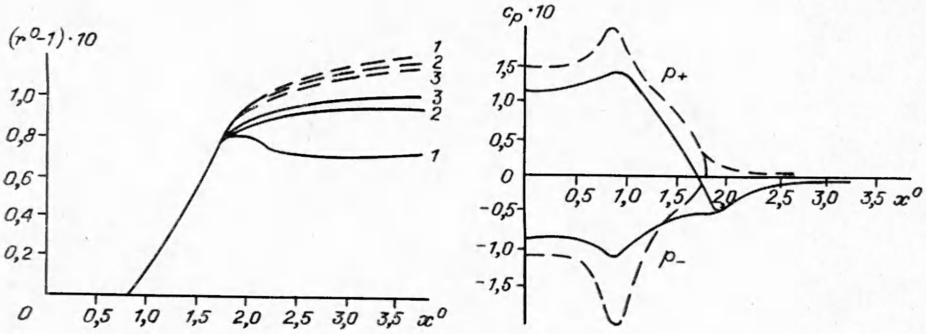


Рис. 6

показаны положения разделительных линий тока ($r^0 = r/L$) при $m = 0{,}5$ (*1*), 1,0 (*2*), 2,0 (*3*), штриховыми линиями нанесены соответствующие результаты для невязкого потока. Представлено также сопоставление распределений давления ($c_p = (p - p_0)/\rho(u_\infty)^2_+$, p_0 — давление на выходе из канала) в вязком и невязком потоках при $m = 1{,}0$. В невязком потоке положение разделительной линии слабо зависит от m. В вязком потоке у задней кромки наблюдается отрыв, интенсивность которого растет с уменьшением m, разделительная линия сильно деформируется у кромки. В вязком потоке у кромки наблюдается разрежение. Данная ситуация интересна тем, что, изменяя в одном потоке условия, можно управлять отрывом в другом.

Представленные результаты показывают, что вычислительная методика, с помощью которой интегрируются уравнения взаимодействующего пограничного слоя, позволяет эффективно рассчитывать ряд отрывных течений, интересных для практики.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гогиш Л. В., Степанов Г. Ю.** Турбулентные отрывные течения.— М.: Наука, 1979.
2. **Carter J. E.** Solutions for laminar boundary-layers with separation and reattachment.— N. Y., 1974.— (Pap./AIAA; N 583).
3. **McDonald H., Briley W. R.** A survey of recent work on interacted boundary-layer theory for flow with separation // Numerical and physical aspects of aerodynamic flows. II.— N. Y.; Berlin: Springer, 1984.
4. **Vatsa V. N., Verdon J. M.** Viscid/inviscid interaction analysis of separated trailing-edge flows // AIAA J.— 1985.— V. 23, N 4.
5. **Асимптотическая** теория отрывных течений.— М.: Наука, 1987.
6. **Хинце И. О.** Турбулентность.— М.: Физматгиз, 1963.
7. **Reyhner T. A., Flugge-Lotz I.** The interaction of a shock wave with a laminar boundary layer // Intern. J. Non-Linear Mech.— 1968.— V. 3, N 2.
8. **Самарский А. А.** Теория разностных схем.— М.: Наука, 1977.
9. **Блотнер Дж.** Разностная схема с неравномерной сеткой для расчета турбулентных пограничных слоев // Численное решение задач гидромеханики.— М.: Мир, 1977.
10. **Абрамович Г. И., Крашенинников С. Ю., Секундов А. И.** Турбулентные течения при взаимодействии объемных сил и неавтомодельности.— М.: Машиностроение, 1975.
11. **Simpson R. L., Chew Y. T., Shivaprasad B. G.** The structure of separating turbulent boundary layer. Pt I. Mean flow and Reynolds stresses // J. Fluid Mech.— 1981.— V. 113.— P. 23.
12. **Halim A., Hafez M.** Calculation of separation bubbles using boundary-layer type equations // AIAA J.— 1986.— V. 24, N 4.
13. **Serpa J. M., Lessman R. C., Hagist W. M.** Turbulent separated and reattached flows over a curved surface.— N. Y., 1986.— (Pap./AIAA; N 1064).

г. Москва

Поступила 2/XII 1988 г.,
в окончательном варианте — 10/V 1989 г.