УДК 531/539.3

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ ПОСТАНОВОК ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ

П. В. Трусов, О. В. Шишкина

Пермский государственный технический университет, 614000 Пермь
E-mails: tpv@matmod.pstu.ac.ru, shishkina@perm.ru

Проведен анализ различных постановок задачи устойчивости одноосного растяжения полосы при сверхпластических деформациях. Предложена более общая (по сравнению с известными) постановка, получены критерии неустойчивости. Рассмотрены различные способы описания поведения материалов в режиме сверхпластичности.

Ключевые слова: устойчивость, одноосное растяжение, сверхпластические деформации, способы описания движения.

Как известно, основой математической модели любого физико-механического процесса является определяющее соотношение (ОС). Для описания сверхпластичности (СП) существует большое количество эмпирически полученных ОС (см., например, [1]), однако выбор необходимого ОС из этого набора при исследовании конкретного процесса остается сложной задачей, что делает актуальной разработку процедуры аттестации ОС с точки зрения их применимости для описания режимов сверхпластического деформирования (СПД). В данной работе анализируются известные постановки и решения задачи устойчивости процесса деформирования к малым или конечным возмущениям текущей конфигурации тела [2], а также их применимость для описания процесса СП.

В настоящей работе рассматривается только процесс одноосного растяжения образца, что обусловлено его высокой чувствительностью к возмущениям свободной поверхности. Анализируется устойчивость однородного деформирования по отношению к малым возмущениям, поэтому предлагаемый подход неприменим для описания материалов, испытывающих СПД при одноосном растяжении за счет неоднородных деформаций. Из рассмотрения исключаются материалы, в которых СПД происходит при устойчивых неоднородных режимах одноосного деформирования (например, с "бегающей шейкой"). Кроме того, в данной работе рассматриваются только материалы, в которых реализуется так называемая структурная СП [1].

При исследовании СПД большое значение имеет выбор способа (лагранжева или эйлерова) описания движения. В работе [3] отмечено существование проблемы выбора способа описания движения при исследовании устойчивости течений жидкостей. Таким образом, представляется целесообразным проведение более тщательного анализа предложенных ранее подходов и полученных результатов.

Анализ постановки задачи устойчивости Е. В. Харта. Е. В. Харт одним из первых предложил рассматривать СП как режим деформирования, устойчивый по отношению к малым возмущениям геометрии образца. Используя лагранжев подход к описанию

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-08-00352а).

движения, Е. В. Харт рассмотрел неустойчивые режимы однородного деформирования и вывел критерий, согласно которому способность материалов к большим удлинениям сохраняется даже при наличии неоднородностей в геометрии образца [4]. Рассматривалось одноосное растяжение однородного образца при следующих предположениях:

1) зависимость "истинного" напряжения σ от истории нагружения и линейная зависимость его малых изменений от пластической деформации ε и скорости деформации $\xi \equiv \dot{\varepsilon}$;

2) однородность деформации, в силу чего напряжение σ в каждой точке образца полагается равным отношению растягивающего усилия F к площади поперечного сечения S в текущий момент времени: $F = \sigma S$;

3) несжимаемость материала: $SL = \mathrm{const}$ (L — длина образца в текущий момент времени).

С учетом данных предположений решалась задача деформирования геометрически неоднородного стержня в режиме СП. Рассматривался образец, малая часть которого имеет поперечное сечение. Площадь этого сечения отличается от площади остальной части на δS (так называемую "шейку"). Вследствие возникновения в процессе деформирования неоднородности напряженно-деформированного состояния предположение 2 не вполне корректно: Е. В. Харт отмечал, что оно дает ошибку того же порядка малости, что и δS [4]. Следует отметить, что данное утверждение также не вполне корректно: в [4] ничего не сказано о геометрии возмущения, которая является важной характеристикой образца и от которой зависит неоднородность распределения напряжений.

Е. В. Харт сформулировал критерий устойчивости следующим образом: деформация является устойчивой, если $(\delta\dot{S}/\delta S)_F \leqslant 0$, и неустойчивой, если $(\delta\dot{S}/\delta S)_F > 0$. Иными словами, скорость роста вариации площади поперечного сечения $\delta\dot{S}$ и возмущение площади δS должны иметь разные знаки, тогда возмущение будет затухать, в противном случае оно будет расти. Поскольку усилие F одинаково во всех точках стержня, используя предположения 1–3, можно получить следующие соотношения:

$$\delta F = \delta\sigma\, S + \sigma\,\delta S = 0, \qquad \delta\sigma = \frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}\,\delta\varepsilon + \frac{\partial\sigma}{\partial\xi}\,\delta\xi,$$

$$\delta\varepsilon = \frac{\delta L}{L} = -\frac{\delta S}{S}, \qquad \delta\xi \equiv \delta\dot{\varepsilon} = -\frac{\delta\dot{S}}{S} + \frac{\dot{S}}{S}\,\frac{\delta S}{S}.$$

Третье равенство следует из несжимаемости. Комбинируя эти соотношения и учитывая, что $\xi > 0$, можно записать критерий устойчивости в виде

$$\left(\frac{\delta\dot{S}}{\delta S}\right)_F \sim \frac{1-\gamma-m}{m} \leqslant 0. \tag{1}$$

Относительно феноменологических параметров критерий (1) может быть записан в виде $\gamma + m \geqslant 1$. Здесь $\gamma \equiv (1/\sigma)(\partial\sigma/\partial\varepsilon)$ — параметр деформационного упрочнения; $m \equiv (\xi/\sigma)(\partial\sigma/\partial\xi)$ — чувствительность материала к скорости деформации. В общем случае эти параметры являются материальными функциями. Для вязких материалов $\gamma = 0$, поэтому критерий устойчивости принимает вид $m \geqslant 1$. Е. В. Харт называет критерий устойчивости основной причиной существования сверхпластичности [1].

Хотя анализ Е. В. Харта является инженерным (например, предположение 2 является жестким допущением, так как если площадь поперечного сечения меняется по длине образца, то деформации и напряжения нельзя считать однородными), полученные им результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными.

В настоящей работе, следуя Е. В. Харту, анализируется возможность применения решений задачи устойчивости для проверки адекватности ОС СП. Рассмотренные ниже работы А. А. Ильюшина [5], А. Ю. Ишлинского [6], И. В. Кеппена и С. Ю. Родионова [7], в которых содержатся постановки и решения задачи устойчивости деформирования образцов из вязкопластического материала, на первый взгляд не имеют отношения к СП. Однако следует отметить, что до настоящего времени вязкопластические модели наиболее часто используются при описании СПД, поэтому в данной работе проанализированы результаты работ [5–7].

Анализ постановки задачи устойчивости А. А. Ильюшина. Задача устойчивости вязкопластического течения с использованием лагранжева метода описания движения среды поставлена и решена А. А. Ильюшиным [5]. Движение является неустойчивым или устойчивым в зависимости от того, увеличивается возмущение с течением времени или затухает. В отличие от [4] в работе [5] более детально изложена постановка задачи и представлен универсальный метод ее решения.

Решается задача об одноосном растяжении вязкопластического тела в виде полосы длиной $2l$ и шириной $2h$ под действием сил $\pm 2P$, приложенных к ее концам и противоположно направленных. Для удобства сравнения полученных результатов в данной работе используется постановка задачи устойчивости в единообразной форме, из которой можно получить постановку [5], выполнив несложные преобразования. Постановка включает уравнения равновесия, условие несжимаемости и ОС для линейно-вязкопластического тела:

$$\begin{gathered} \hat{\nabla} \cdot \sigma = \mathbf{0}, \qquad \hat{\nabla} \cdot \boldsymbol{V} = 0, \\ \sigma = -pI + (\tau(\xi)/\xi)D, \qquad \tau(\xi) = K + \mu\xi. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $\hat{\nabla} = \hat{\boldsymbol{e}}^i\, \partial/\partial\zeta^i$ — материальный оператор градиента в текущей конфигурации; $\hat{\boldsymbol{e}}^i$ — вектор локального лагранжева базиса в текущей конфигурации; ζ^i — лагранжевы координаты (для плоской задачи $i = 1, 2$); σ, D — тензоры напряжений Коши и скорости деформации; p — гидростатическое давление; I — единичный тензор второго ранга; $\tau = \sqrt{2\sigma' : \sigma'}$ — интенсивность сдвиговых напряжений (штрихом отмечена девиаторная часть σ); для вязкопластической среды $\tau(\xi) = K + \mu\xi$; K — коэффициент пластичности; μ — вязкость; $\xi = \sqrt{D : D/2}$ — интенсивность скорости деформации сдвига; $\boldsymbol{V}$ — вектор скорости перемещения. Все поля переменных являются функциями лагранжевых координат.

Граничные условия имеют следующий вид:

— на боковой поверхности ($x^2 = \pm h(t)$)

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \sigma = \mathbf{0} \tag{3}$$

($\hat{\boldsymbol{n}}$ — внешняя нормаль к поверхности образца в текущей конфигурации);

— на торцах образца ($x^1 = \pm l(t)$)

$$\sigma_{11} = P(t)/h, \qquad \sigma_{12} = 0. \tag{4}$$

В (3), (4) x^1, x^2 — пространственные координаты, являющиеся функциями лагранжевых координат ζ^1, ζ^2 соответственно.

Используя метод решения данной задачи, изложенный в [5], можно получить критерий неустойчивости. Уравнения (2) и граничные условия (3), (4) записываются в терминах возмущений функции напряжений и функции тока, которые раскладываются в ряд Фурье вблизи состояния полосы при однородном растяжении, в результате чего уравнения (2) сводятся к системе линейных дифференциальных уравнений относительно неизвестных возмущений. Решение этих уравнений подчиняется граничным условиям (3), (4), в том числе условиям вдоль поверхностей, на которых суммарное возмущение $\bar{\delta}$ представляется в виде ряда Фурье $\bar{\delta} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n \cos{(\pi n x^1/l)}$, и позволяет найти компоненты скорости. Неустойчивость движения зависит от того, какой знак имеют компоненты скорости $V_2(h)$ движения, возникшего на возмущенной поверхности: одинаковый или обратный знаку возмущения $\bar{\delta}$. Таким образом, исследование устойчивости течения сводится к исследованию устойчивости отдельных компонент $\delta_n \cos(\pi n x^1/l)$ возмущения $\bar{\delta}$: q-я компонента устойчива (т. е. увеличивается), а движение относительно этой компоненты неустойчиво, если имеет место неравенство $V_2(h)\cos(\pi q x^1/l)/\delta_q > 0$. Если q-я компонента является единственной устойчивой компонентой, то с течением времени она будет преобладать над всеми остальными компонентами, в итоге форма границы преобразуется в косинусоиду, образующую q волн по длине полосы. Деформация полосы будет неустойчивой, если единственная компонента возмущения является устойчивой. Решая последнее неравенство, окончательно получаем критерий устойчивости компоненты, но неустойчивости движения в виде

$$2n < 2q\,\frac{h}{l}\sqrt{\frac{\chi}{\chi+\xi_0}} < 2n+1, \qquad n, q \in \mathbb{Z}, \quad \chi = \frac{K}{\mu}, \tag{5}$$

где ξ_0 — скорость деформации в случае однородного растяжения образца; $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.

Анализ постановки задачи устойчивости А. Ю. Ишлинского. В [6] А. Ю. Ишлинский привел решение задачи устойчивости вязкопластического течения полосы с использованием эйлерова способа описания движения среды. По аналогии с изложенным выше анализом А. А. Ильюшина в данной работе предлагается использовать результаты, полученные А. Ю. Ишлинским при исследовании устойчивости течения линейно-вязкого образца для проверки адекватности ОС СП. Для удобства математическая постановка задачи записана в том же виде, что и в [5] (уравнения (2) и граничные условия (3), (4)). Отличие состоит в том, что все поля являются функциями эйлеровых координат x^i $(i=\overline{1,2})$. Исследуется течение прямоугольной полосы, края которой, перпендикулярные оси x^1, в начальный момент прямолинейны. Края, параллельные этой оси, претерпевают малое “возмущение”, описываемое уравнениями

$$x^2 = h + \delta\cos(ax^1), \qquad x^2 = -h - \delta\cos(ax^1),$$

где h — полуширина невозмущенной полосы; δ — амплитуда возмущений, малая по сравнению с h. Возмущение границы имеет синусоидальную форму, симметричную относительно оси x^1. Считается, что на длине полосы укладывается целое число полуволн возмущения $a = \pi q/l$ (q — целое число; l — длина образца). Если возмущение краев полосы, параллельных оси x^1, имеет более сложный характер, то, используя ряды Фурье, его можно представить в виде суммы простых синусоидальных возмущений.

Возмущение имеет тенденцию к росту, если компонента скорости V_2 имеет тот же знак, что и возмущение $\eta = \delta\cos(ax^1)$, т. е. если $V_2/\eta > 0$. Решая это неравенство, критерий неустойчивости можно записать в виде

$$2n < 2q\,\frac{h}{l}\sqrt{\frac{K}{K+\mu\xi_0}} < 2n+1, \qquad n, q \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Критерий (6) совпадает с критерием неустойчивости А. А. Ильюшина (5), хотя получен с помощью эйлерова подхода. Таким образом, на примере работ [5, 6] показана эквивалентность лагранжева и эйлерова подходов к решению задачи устойчивости одноосного растяжения полосы из линейно-вязкопластического материала.

Анализ постановки задачи устойчивости И. В. Кеппена и С. Ю. Родионова. Логическим продолжением исследований А. А. Ильюшина стала работа И. В. Кеппена и С. Ю. Родионова [7], в которой рассматривалось растяжение-сжатие полосы из нелинейно-вязкопластического материала. В отличие от работы А. А. Ильюшина [5], в которой предполагалась линейная зависимость между скоростью деформации ξ и интенсивностью касательных напряжений τ, в [7] использовано соотношение более общего вида

$$\tau(\xi) = K + \mu\xi_0 g(\xi/\xi_0), \tag{7}$$

где $g(\xi/\xi_0) > 0$ — некоторая функция ξ.

Аналогично работе [5] для задачи, постановка которой может быть сведена к виду (3)–(5), с учетом (7) ищется критерий неустойчивости: растяжение полосы будет неустойчивым, если

$$2n < 2q\,\frac{h}{l}\sqrt{1 - \frac{\tau'(\xi_0)\xi_0}{\tau(\xi_0)}} < 2n + 1, \qquad n, q \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

Выше проанализированы результаты теоретических работ, в которых процесс СП течения рассматривается как устойчивый процесс растяжения при наличии несовершенств боковой поверхности. Работа Е. В. Харта [4] дала толчок к развитию этого направления, но имела ряд недостатков (проводился одномерный анализ развития шейки, использовались достаточно жесткие ограничения на рассматриваемый процесс). В работе [5] детально описан универсальный метод решения задач устойчивости растяжения вязкопластического образца. С помощью этого метода в [5, 6] получены решения двумерной задачи развития шейки для линейно-вязкопластического образца с использованием разных подходов (эйлерова и лагранжева). В [7] задача А. А. Ильюшина обобщена на случай нелинейно-вязкого материала и решена с использованием лагранжева подхода.

В настоящей работе предлагается более общая постановка задач о растяжении-сжатии полосы в случае нелинейно-вязкой реологии среды. Такая постановка позволяет использовать различные типы возмущений, и из нее следуют все указанные выше постановки. Кроме того, все перечисленные выше задачи устойчивости одноосного растяжения являются геометрически линейными. В этих задачах рассматривается однородный процесс развития геометрических несовершенств образца. Однако, как показано в работе П. Дж. Врэя [8], в реальности имеет место более сложный процесс (рост и взаимодействие "шеек"), поэтому нельзя пренебрегать возмущениями конфигурации. В данной работе предложена геометрически нелинейная постановка задачи устойчивости одноосного растяжения образца из нелинейно-вязкого материала.

Задача устойчивости одноосного растяжения плоской полосы из нелинейно-вязкого материала. Рассматривается геометрически нелинейная задача устойчивости одноосного растяжения плоского прямоугольного образца с постоянной относительной скоростью его концов к малым нормальным возмущениям конфигурации в фиксированный момент времени (поэтому время не входит в число независимых переменных). Задача решается для случая плоскодеформированного состояния. Математическая постановка этой задачи включает уравнения движения, ОС общего вида и условия несжимаемости:

$$\hat\nabla \cdot \sigma = \mathbf{0}, \qquad \sigma = -pI + (\tau(\xi)/\xi)D, \qquad \hat\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0. \tag{9}$$

Здесь $\tau(\xi)$ — произвольная нелинейная функция интенсивности тензора скорости деформации ξ (приведенные выше постановки для линейно-вязкого тела могут быть получены из данной, если положить $\tau(\xi) = K + \mu\xi$).

Граничные условия имеют следующий вид:

— на боковой поверхности

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \sigma = \mathbf{0} \tag{10}$$

($\hat{\boldsymbol{n}}$ — внешняя нормаль к боковой поверхности образца в текущей конфигурации);

— на торцах образца

$$V_1\big|_{x^1=0} = 0, \quad V_1\big|_{x^1=l} = V_0 > 0, \quad \sigma_{12}\big|_{x^1=0} = \sigma_{12}\big|_{x^1=l} = 0. \tag{11}$$

Используем различные подходы к описанию движения и сравним получившиеся критерии устойчивости.

Сначала рассмотрим лагранжев подход, когда все поля переменных являются функциями лагранжевых координат. Пусть в некоторый рассматриваемый момент времени поля скоростей, давления и оператора Гамильтона (вариация конфигурации) претерпевают малые возмущения: $\boldsymbol{V}_{\text{в}} = \boldsymbol{V} + \delta\boldsymbol{V}$, $p_{\text{в}} = p + \delta p$, $\hat{\nabla}_{\text{в}} = \hat{\nabla} + \delta\,\hat{\nabla}$. Тогда постановка задачи для возмущений имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\delta\hat{\nabla}\cdot\sigma + \hat{\nabla}\cdot\delta\sigma = \mathbf{0}, \qquad \delta\hat{\nabla}\cdot\boldsymbol{V} + \hat{\nabla}\cdot\delta\boldsymbol{V} = 0,\\ \delta\sigma = -\delta pI + (\tau'/\xi - \tau/\xi^2)\delta\xi\, D + (\tau/\xi)\,\delta D;\end{gathered} \tag{12}$$

$$\delta\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\sigma + \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\delta\sigma = \mathbf{0}. \tag{13}$$

Здесь $\delta D = (\delta\hat{\nabla}\boldsymbol{V} + \hat{\nabla}\delta\boldsymbol{V} + \delta\boldsymbol{V}\,\hat{\nabla} + \boldsymbol{V}\delta\hat{\nabla})/2$; $\delta\xi = ((D_{11} - D_{22})(\delta D_{11} - \delta D_{22}) + (D_{12} - D_{21})(\delta D_{12} - \delta D_{21}))/\xi$. Отличием представленного геометрически нелинейного анализа от анализа известных постановок является возмущение конфигурации (возмущение набла-оператора). Из кинематического соотношения $\dot{\hat{\nabla}} = -L^{\text{т}}\cdot\hat{\nabla}$ найдем возмущение $\delta\hat{\nabla}$, используя вместо дифференциала вариацию $\delta\hat{\nabla} = -\delta u\, L^{\text{т}}\cdot\hat{\nabla}$; δu — вариация параметра процесса; $L = \boldsymbol{V}\hat{\nabla}$ — транспонированный градиент скорости. Используя соотношения $\dot{F} = L\cdot F$, $\hat{\nabla} = \nabla\cdot F^{-1}$ (здесь F — транспонированный градиент места) или соотношения, записанные в вариациях:

$$\delta F = \delta u\, L\cdot F \quad\Rightarrow\quad \delta u\, L = \delta F\cdot F^{-1} = (\delta\hat{\boldsymbol{r}}\,\nabla)\cdot F^{-1} = \delta\hat{\boldsymbol{r}}\,\hat{\nabla},$$

можно найти вариацию набла-оператора $\delta\hat{\nabla} = -(\hat{\nabla}\,\delta\hat{\boldsymbol{r}})\cdot\hat{\nabla}$. Тогда $\delta\hat{\nabla}\cdot\sigma = -((\hat{\nabla}\,\delta\hat{\boldsymbol{r}})\cdot\hat{\nabla})\cdot\sigma \equiv \mathbf{0}$ (так как в основном состоянии компоненты σ однородны). Подставляя это выражение в (12), (13) и учитывая первое и третье уравнения в (9), получим постановку задачи для нелинейно-вязкой среды в окончательном виде:

$$\begin{gathered}\hat{\nabla}\cdot\delta\sigma = \mathbf{0}, \qquad \delta\hat{\nabla}\cdot\boldsymbol{V} + \hat{\nabla}\cdot\delta\boldsymbol{V} = 0,\\ \delta\sigma = -\delta p\, I + (\tau'/\xi - \tau/\xi^2)\delta\xi\, D + (\tau/\xi)\,\delta D.\end{gathered} \tag{14}$$

Критерий неустойчивости определяется в соответствии с подходом, предложенным в [5]. Возьмем возмущения в форме

$$\delta r_1 = \varphi_1(ax^2)\sin(ax^1)\,\mathrm{e}^{\lambda t}, \qquad \delta r_2 = \varphi_2(ax^2)\cos(ax^1)\,\mathrm{e}^{\lambda t},$$

где $\hat{\boldsymbol{r}}(r_1, r_2)$ — радиус-вектор в текущей конфигурации; $a = \pi q/l$; q — целое число; l — длина образца; x^1, x^2 — пространственные координаты, являющиеся функциями лагранжевых координат ζ^1, ζ^2 соответственно; λ — декремент затухания. Тогда получим критерий неустойчивости в виде

$$\lambda = \xi_0\Big(-1 + \frac{2\sin(2b\sqrt{1-m}\,)}{m\sin(2b\sqrt{1-m}\,) + \sqrt{m(1-m)}\,\operatorname{sh}(2b\sqrt{m}\,)}\Big) > 0, \tag{15}$$

где ξ_0 — скорость деформации в случае однородного растяжения образца; $b = ah$; h — полуширина образца; $m \equiv \partial\ln\tau/\partial\ln\xi = \xi\tau'/\tau$.

Теперь рассмотрим эйлеров подход. По аналогии с материальной производной для функции, заданной в эйлеровых переменных ($\mathbf{0} = d\nabla/dt = \partial\nabla/\partial t + (\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\nabla$), получим вариацию оператора Гамильтона в виде $\delta\nabla = -(\delta\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\nabla$, где правая часть характеризует изменения за счет относительного движения совпадающих в данный момент материальной и пространственной точек. В этом случае постановка задачи совпадает с (13), (14), а критерий неустойчивости — с (15). Таким образом, имеет место эквивалентность двух подходов к решению задачи устойчивости растяжения нелинейно-вязкого образца в режиме сверхпластичности.

Сравнение критериев. Соотношение (15) является критерием неустойчивости образца в геометрически нелинейном случае. Если рассматривать геометрически линейную постановку (в этом случае отсутствует вариация набла-оператора), то критерий неустойчивости является частным случаем (15) и имеет вид

$$\lambda = \frac{2\sin(2b\sqrt{1-m}\,)}{m\sin(2b\sqrt{1-m}\,) + \sqrt{m(1-m)}\,\operatorname{sh}(2b\sqrt{m}\,)} > 0.$$

Решив это неравенство и введя обозначения $b = ah$, $a = \pi q/l$, $m \equiv \partial\ln\tau/\partial\ln\xi = \xi\tau'/\tau$, в результате получим критерий неустойчивости в виде

$$2n < 2q\,\frac{h}{l}\sqrt{1 - \frac{\tau'}{\tau}\,\xi} < 2n+1, \qquad n, q \in \mathbb{Z}, \tag{16}$$

который совпадает с критерием Кеппена — Родионова (8). Полагая в (16) $\tau(\xi) = K + \mu\xi$, получим критерии А. А. Ильюшина (5) и А. Ю. Ишлинского (6).

Для проверки геометрически нелинейного критерия (15) сравним его с критерием Е. В. Харта (1) при $a \to 0$ (параметр $a = \pi q/l$ характеризует число полуволн, укладывающихся на длине образца (у Е. В. Харта $q = 1$), а его стремление к нулю соответствует рассматриваемому процессу однородного деформирования). Используя правило Лопиталя и приведя подобные члены, получим

$$\lambda = \xi_0(1-m)/m,$$

т. е. устойчивость наблюдается при $\lambda < 0$, что эквивалентно неравенствам $m < 0$ и $m > 1$. Таким образом, в предельном случае $a \to 0$ полученный результат согласуется с результатом анализа Е. В. Харта [4].

Заключение. В работе проанализированы различные постановки, в которых процесс сверхпластического течения рассматривается как устойчивый процесс растяжения цилиндрического образца при наличии несовершенств боковой поверхности. Работа Е. В. Харта [4] дала толчок к развитию этого направления, но ее недостаток заключается в том, что проводился одномерный анализ развития "шейки". В работах А. А. Ильюшина [5] и А. Ю. Ишлинского [6], на первый взгляд не имеющих отношения к СП, предложен универсальный метод решения задач устойчивости. Этот метод предлагается использовать для проверки ОС СП, при которых возможно существование устойчивых режимов. В настоящей работе сопоставлены критерии А. А. Ильюшина и А. Ю. Ишлинского и показана их эквивалентность.

Все известные постановки задачи устойчивости одноосного растяжения являются геометрически линейными, однако в реальности имеет место более сложный механизм роста и взаимодействия "шеек", поэтому нельзя пренебрегать возмущениями конфигурации (геометрической нелинейностью).

В данной работе предложена постановка задачи устойчивости растяжения полосы в случае нелинейно-вязкой реологии среды, выполнен геометрически нелинейный анализ, с использованием эйлерова и лагранжева подходов получены критерии неустойчивости и показана их эквивалентность для рассмотренной задачи. Показано, что из предложенной постановки и полученного критерия (15) следуют все указанные выше постановки и критерии. Данная постановка позволяет использовать различные типы возмущений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Васин Р. А.** Введение в механику сверхпластичности / Р. А. Васин, Ф. У. Еникеев. Уфа: Гилем, 1998. Ч. 1.
2. **Шишкина О. В., Келлер И. Э., Трусов П. В.** Об устойчивости сверхпластического течения к малым возмущениям границы // Тр. 9-й Междунар. конф. “Современные проблемы механики сплошной среды”, Ростов-на-Дону, 11–15 окт. 2005 г. Ростов н/Д: Изд-во ООО “ЦВВР”, 2005. Т. 1. С. 222–227.
3. **Клюшников В. Д.** Лекции по устойчивости деформируемых систем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.
4. **Hart E. W.** Theory of the tensile test // Acta Metallurgica. 1967. V. 15. P. 351–355.
5. **Ильюшин А. А.** Труды. Т. 1 (1935–1945). М.: Физматлит, 2003. Гл. 3: Растяжение-сжатие полосы и близкие движения. С. 162–182.
6. **Ишлинский А. Ю.** Об устойчивости вязкопластического течения полосы и круглого прута // Прикл. математика и механика. 1943. Т. 7, вып. 2. С. 109–130.
7. **Кеппен И. В., Родионов С. Ю.** Растяжение-сжатие полосы из нелинейного вязкопластического материала // Упругость и неупругость. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. С. 97–105.
8. **Wray P. J.** Tensile plastic instability at an elevated temperature and its dependence upon strain rate // J. Appl. Phys. 1970. V. 41, N 8. P. 3347–3352.

Поступила в редакцию 15/VIII 2007 г.,
в окончательном варианте — 8/VIII 2008 г.