чистом изгибе и на $m = 10$ и $k = 20$ элементов при чистом кручении. Сходимость решения по числу конечных элементов приведена в таблице. При комбинированном нагружении моментами $M_и$ и $M_к$ устойчивость оболочки исследовалась при $m = 12$ и $k = 34$.

На рис. 4 для комбинированного нагружения приведена кривая зависимости (сплошная линия) параметров $R_t = M_{к*}/M_к^0$ и $R_в = M_{и*}/M_и^0$ ($M_{к*}$ и $M_{и*}$ — критические значения моментов при комбинированном нагружении). Для сравнения штриховой линией нанесена аналогичная зависимость, рекомендуемая [1] для оболочек средней длины.

Комбинированное действие нагрузок приводит к сложной конфигурации как исходного, так и бифуркационного прогиба w. На рис. 5 для $R_t = 0{,}84$ показана форма прогиба в исходном состоянии, которая близка к конфигурации прогиба w при чистом изгибе. При бифуркации прогибы локализуются в области осевого сжатия (рис. 6) и имеют вид косых волн с максимальной амплитудой в области наибольшего сжатия.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Григолюк Э. И., Кабанов В. В.** Устойчивость оболочек.— М.: Наука, 1978.
2. **Бадрухин Ю. И., Кабанов В. В.** Уравнения криволинейных стержней // Расчет элементов конструкций летательных аппаратов.— М.: Машиностроение, 1982.
3. **Кабанов В. В., Астрахарчик С. В.** Нелинейное деформирование и устойчивость подкрепленных цилиндрических оболочек при изгибе // Пространственные конструкции в Красноярском крае.— Красноярск: КПИ, 1985.
4. **Kodama S., Otomo K., Yamaki N.** Postbuckling behaviour of pressurized circular cylindrical shells under torsion I. Experiment // Intern. J. Non-Linear Mech. — 1981.— V. 16, N 3/4.

Поступила 10/XI 1987 г.

УДК 539.3 : 624.073.2

ИЗГИБ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ НА УПРУГОМ НЕОДНОРОДНОМ ОСНОВАНИИ ПРИ НЕПОЛНОМ КОНТАКТЕ С ОСНОВАНИЕМ

Р. И. Дудинский

(Киев)

Задачи расчета конструкций на упругом основании имеют большое практическое значение. Выбирая в качестве расчетной модели основания упругое изотропное полупространство, многие авторы строили решения задач об изгибе пластинок для широкого класса нагрузок и форм пластинок [1—6]. Однако опыт использования этих решений в инженерной практике выявил ряд недостатков модели упругого однородного полупространства, в частности завышение расчетных значений прогибов и изгибающих моментов. Одна из причин этого — неоднородность по глубине упругих свойств большинства реальных оснований (например, грунтов). Известная попытка учета этой неоднородности и корректировки результатов, получаемых по модели упругого однородного полупространства,— рассмотрение рядом авторов модели упругого полупространства с модулем упругости, являющимся степенной или экспоненциальной функцией глубины (коэффициент Пуассона при этом считается постоянным). Исчерпывающий список публикаций по этому вопросу приведен в библиографических указателях [7—9], а обзор отдельных работ можно найти в [4, 5, 10, 11].

В настоящей работе рассматривается осесимметричная задача об изгибе круглой пластины на упругом основании при неполном контакте (при условии односторонней связи). Модель основания — упругое изотропное непрерывно-неоднородное полупространство с переменным по глубине коэффициентом Пуассона и постоянным модулем сдвига. Решение задачи методом парных интегральных уравнений сведено к линейному интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

1. Рассмотрим в качестве упругого основания упругое изотропное непрерывно-неоднородное полупространство, точки которого в цилиндрической системе координат r, θ, z принадлежат области $z \geqslant 0$. Модуль сдвига μ материала основания считается постоянным, а коэффициент Пуассона $\nu = \nu(z)$ — произвольной (достаточно гладкой) функцией глубины. Предлагаемая модель может рассматриваться как модель упругого основания с переменным модулем упругости, в этом случае изменяющимся с глубиной по известной зависимости $E(z) = 2\mu[1 + \nu(z)]$.

Пусть на поверхности $z = 0$ полупространства покоится без трения круглая пластина радиуса R, ось симметрии которой совпадает с осью z. Сверху на пластину действует осесимметрично распределенная нормальная нагрузка интенсивности $q(r)$, а по контуру — окружные пары сил с изгибающим моментом M. Под пластиной в области контакта возникает реактивное (контактное) давление $p(r)$. Вне площадки контакта поверхность полупространства свободна от нагрузок. При достаточно малых значениях M пластина будет полностью соприкасаться с основанием. При увеличении M может произойти отрыв пластины от основания, т. е. радиус площадки контакта a станет меньше радиуса пластины. Предельное значение момента, при котором происходит отрыв пластины, обозначим через M_* (при этом $a = R$).

В рамках классической теории пластин, основанной на гипотезе Кирхгофа, перемещения точек срединной плоскости пластины (прогибы) $w(r)$ удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению С. Жермен [12]

$$\nabla^2\nabla^2 w(r) = [q(r) - p(r)]/D, \tag{1.1}$$

где $\nabla^2 = r^{-1}d[rd/dr]/dr$ — оператор Лапласа; D — цилиндрическая жесткость пластины. Решение уравнения (1.1) при заданных условиях нагружения пластины можно представить в виде

$$w(r) = w_0 - \frac{Mr^2}{2D(1+\nu_*)} + \frac{1}{4D}\int_0^r [q(t) - p(t)]\,[(r^2 + t^2)\ln(r/t) - (r^2 - t^2)]\,t\,dt - \tag{1.2}$$

$$- \frac{r^2}{4D}\int_0^R [q(t) - p(t)]\,[\ln(R/t) + (c/2)(1 - t^2/R^2)]\,t\,dt.$$

Здесь $w_0 = w(0)$; $c = (1 - \nu_*)/(1 + \nu_*)$; ν_* — коэффициент Пуассона материала пластины.

Для определения w_0 служит условие равновесия пластины

$$\int_0^R q(t)t\,dt = \int_0^a p(t)\,t\,dt. \tag{1.3}$$

Вертикальные перемещения точек границы полупространства $u_z(r)$ и нормальные напряжения в этих точках $\sigma_z(r)$ при отсутствии касательных напряжений на границе связаны зависимостью [13, 14]

$$u_z(r) = (2\mu)^{-1}(1 - \nu_0)rS_{-1/2,1}\{(1 + k)\psi\}(r), \tag{1.4}$$
$$\sigma_z(r) = -S_{0,0}\{\psi\}(r),$$

где $\psi(t) = S_{0,0}\{p\}(t)$; $p(r) = -\sigma_z(r)$ $(r \leqslant a)$; $S_{\alpha,\beta}\{f\}(t) = 2^\beta t^{-\beta}\int_0^\infty x^{1-\beta}f(x) \times$ $\times J_{2\alpha+\beta}(tx)\,dx$; $k(t) = [2(1 - \nu_0)t\Lambda(t)]^{-1} - 1$; $\nu_0 = \nu(0)$; $\Lambda(t) = \int_0^\infty [1 -$ $- \nu(x)]^{-1}\exp(-2tx)\,dx$; J — функция Бесселя первого рода.

Равенство прогибов пластины и вертикальных перемещений границы полупространства в точках площадки контакта и отсутствие нагрузки на поверхности полупространства вне площадки контакта приводят к следующим граничным условиям:

$$u_z(r) = w(r),\ r \leqslant a,\ \sigma_z(r) = 0,\ r > a. \tag{1.5}$$

Для определения радиуса площадки контакта служит условие обращения в нуль контактного давления на границе площадки контакта. Основной интерес при расчете пластин на упругом основании представляет определение контактного давления и прогиба пластины. Эти величины позволяют сделать полный расчет пластины, т. е. найти поперечную силу и изгибающие моменты, а следовательно, нормальные и касательные напряжения в пластине.

2. Используя интегральные представления (1.4), после удовлетворения граничным условиям (1.5) приходим к парным интегральным уравнениям относительно ψ:

$$(2.1)\qquad S_{-1/2,1}\{(1+k)\psi\}(r) = 2\mu(1-\nu_0)^{-1}r^{-1}w(r),\ r \leqslant a,$$
$$S_{0,0}\{\psi\}(r) = 0,\ r > a.$$

Парные интегральные уравнения (2.1) обычным образом приводятся к интегральному уравнению Фредгольма второго рода [14]

$$(2.2)\qquad \varphi(x) + \int_0^1 N(x,u)\,\varphi(u)\,du = H(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$N(x,u) = 2\pi^{-1}\int_0^\infty k(t/a)\cos(xt)\cos(ut)\,dt, \qquad H(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{rw(ar)\,dr}{(x^2-r^2)^{1/2}},$$

где функция φ связана с функцией ψ соотношением

$$(2.3)\qquad \psi(x) = 2\mu a\pi^{-1}(1-\nu_0)^{-1}\int_0^1 \varphi(t)\cos(axt)\,dt.$$

Правая часть интегрального уравнения (2.2), согласно (1.2), зависит от $p(r)$. Используя (1.4), (2.3), выразим $p(r)$ в правой части (2.2) через φ, после чего интегральное уравнение принимает вид

$$(2.4)\qquad \varphi(x) + \int_0^1 [N(x,u) + \lambda d^3 K(x,u)]\,\varphi(u)\,du = F(x).$$

Здесь $\lambda = 2\mu R^3[\pi D(1-\nu_0)]^{-1}$; $d = a/R$;

$$K(x,u) = \{(x+u)^2\ln[2(x+u)] + (x-u)^2\ln|2(x-u)| -$$
$$-2u^2\ln(2u) - cx^4(1-2u^2) - x^2[3 + 2c(1-d^2)u^2 - \ln d]\}/4;$$

$$F(x) = w_0 - Ma^2D^{-1}(1+\nu_*)^{-1}x^2 + \frac{a^4}{4D}\int_0^x q(at)\left\{(t^2+2x^2)\ln\left[\frac{x+(x^2-t^2)^{1/2}}{t}\right] -\right.$$
$$\left. - 3x(x^2-t^2)^{1/2}\right\} t\,dt - \frac{a^2R^2x^2}{2D}\int_0^1 q(Rt)\,[(c/2)(1-t^2) - \ln t]\,t\,dt.$$

Учитывая формулы (1.4), (2.3), получаем выражения для контактного давления и прогибов пластины:

$$(2.5)\quad p(r) = \frac{2\mu}{\pi a(1-\nu_0)}\left[\frac{\varphi(1)}{(1-\rho^2)^{1/2}} - \int_\rho^1 \frac{\varphi'(t)\,dt}{(t^2-\rho^2)^{1/2}}\right],\ w(r) = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^\rho \frac{\varphi(t)\,dt}{(\rho^2-t^2)^{1/2}} +\right.$$
$$\left. + \int_0^1 \varphi(t)\,dt\int_0^\infty k(x/a)\,J_0(\rho x)\cos(tx)\,dx\right], \quad \rho = r/a, \quad r \leqslant a.$$

При $\nu = \mathrm{const}$ функция k обращается в нуль и формулы (2.4), (2.5) дают решение задачи изгиба круглой пластины на упругом изотропном однородном полупространстве, совпадающее с найденным в [15]. Отметим, что формулу для $w(r)$ $(r \leqslant R)$ можно получить, подставив выражение для $p(r)$ (2.5) в (1.2).

Условие равновесия пластины (1.3) принимает вид

$$(2.6)\qquad \pi R^2(1-\nu_0)\int_0^1 q(Rt)\,t\,dt = 2\mu a\int_0^1 \varphi(t)\,dt.$$

Из (2.5) следует, что условие обращения в нуль $p(r)$ на границе площадки контакта эквивалентно условию

$$\varphi(1) = 0. \tag{2.7}$$

3. Процедуру нахождения радиуса площадки контакта приведем для нагружения пластины нормальной нагрузкой, равномерно распределенной по ее поверхности, т. е. при $q = \text{const}$. В этом случае правую часть интегрального уравнения (2.4) запишем как

$$F(x) = w_0 + \frac{qR^4}{4D}\left[\frac{d^4x^4}{6} - \frac{(2+c)}{4}d^2x^2\right] - \frac{Ma^2x^2}{D(1+\nu_*)},$$

а уравнение равновесия (2.6) переходит в

$$4\mu a\int_0^1 \varphi(t)\,dt = q\pi(1-\nu_0)R^2. \tag{3.1}$$

Решение интегрального уравнения (2.4) представим в виде

$$\varphi(x) = w_0\varphi_1(x) + \frac{qR^4}{4D}\varphi_2(x) - \frac{Ma^2}{D(1+\nu_*)}\varphi_3(x), \tag{3.2}$$

где $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ являются соответственно решениями интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$\varphi_i(x) + \int_0^1 [N(x, u) + \lambda d^3K(x, u)]\,\varphi_i(u)\,du = F_i(x), \tag{3.3}$$

$$F_1(x) = 1,\quad F_2(x) = \frac{d^4x^4}{6} - \frac{(2+c)}{4}d^2x^2,\quad F_3(x) = x^2.$$

Отметим, что определение a при заданном значении R равносильно определению d.

Удовлетворяя условиям (2.7), (3.1) при помощи (3.2), получаем выражение для максимальной величины прогибов пластины в зоне контакта w_0 и уравнение относительно d:

$$w_0 = \frac{qR^4}{4\lambda D(\varepsilon_1 - \varepsilon_3\varphi_{13})}[(2/d) - \lambda(\varepsilon_2 - \varepsilon_3\varphi_{23})]; \tag{3.4}$$

$$\frac{4M}{qR^2(1+\nu_*)}d^3 + \frac{\varepsilon_2\varphi_{13} - \varepsilon_1\varphi_{23}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3\varphi_{13}}d - \frac{2\varphi_{13}}{\lambda(\varepsilon_1 - \varepsilon_3\varphi_{13})} = 0 \tag{3.5}$$

$$\left(\varepsilon_i = \int_0^1 \varphi_i(t)\,dt,\ i = 1, 2, 3,\ \varphi_{j3} = \varphi_j(1)/\varphi_3(1),\ j = 1, 2\right).$$

Таким образом, радиус площадки контакта находится из совместного решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода (3.3) и уравнения (3.5). Отметим, что приведенная процедура определения радиуса площадки контакта легко обобщается на случай нагружения пластины нагрузкой интенсивности $q(r)$.

Выражение для предельного момента M_* получается из (3.5) при $d = 1$

$$M_* = qR^2(1+\nu_*)\left\{\frac{\varphi_{13}[2 - \lambda(\varepsilon_2 - \varepsilon_3\varphi_{23})]}{4\lambda(\varepsilon_1 - \varepsilon_3\varphi_{13})} + \frac{\varphi_{23}}{4}\right\}. \tag{3.6}$$

Формулу (3.2) с учетом (3.4), (3.5) можно представить в виде

$$\varphi(x) = qR^4(\lambda D)^{-1}\varphi_4(x),$$

$$\varphi_4(x) = \frac{2 - \lambda d(\varepsilon_2 - \varepsilon_3\varphi_{23})}{4d(\varepsilon_1 - \varepsilon_3\varphi_{13})}\varphi_1(x) + \frac{\lambda}{4}\varphi_2(x) - \frac{2\varphi_{13} + \lambda d(\varepsilon_1\varphi_{23} - \varepsilon_2\varphi_{13})}{4d(\varepsilon_1 - \varepsilon_3\varphi_{13})}\varphi_3(x).$$

Тогда $p(r) = -\dfrac{q}{d}\displaystyle\int_\rho^1 \frac{\varphi_4'(t)\,dt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}}$.

4. Для получения численных результатов будем полагать, что коэффициент Пуассона материала полупространства изменяется с глубиной по закону $\nu(z) = 1 - [A + B \exp(-2\gamma z)]^{-1}$, $\gamma \geqslant 0$. Учитывая, что коэффициент Пуассона реальных материалов изменяется в пределах от 0 до 0,5, устанавливаем, что областями изменения параметров A и B являются соответственно интервалы $[1, 2]$ и $[-1, 1]$.

Функция k в этом случае имеет вид $k(t/a) = c_1 c_2 [c_1 + d^{-1}(1 + c_2)t]^{-1}$ ($c_1 = \gamma R$, $c_2 = B/A$). Тогда ядро интегрального уравнения Фредгольма второго рода (а значит, и решение) зависит от безразмерных параметров c, c_1, c_2, λ. Области изменения параметров c_1, c_2 — интервалы $[0, \infty)$ и $[-0{,}5, 1]$. Параметр c_2 допускает представление $c_2 = (\nu_0 - \nu_\infty) \times (1 - \nu_0)^{-1}$ (ν_∞ — коэффициент Пуассона на бесконечно большой глубине). Отсюда следует, что $\nu(z)$ возрастает с глубиной при $c_2 < 0$ и убывает при $c_2 > 0$.

Полагая $c_1 = 0$ или $c_2 = 0$, приходим к решению задачи для однородного полупространства с коэффициентом ν_0. При $c_1 \to \infty$ решение задачи переходит в решение для однородного полупространства с коэффициентом $\nu_0(1 + c_2) - c_2$.

Для проведения численных расчетов необходимо задать значения безразмерных λ и c. Задание параметра λ при фиксированных μ, D и R однозначно определяет ν_0. Численные расчеты проводились для $\lambda = 1$ и $c = 5/7$.

Значение M_* вычислялось по формуле (3.6) после нахождения φ_i ($i = 1, 2, 3$) из (3.3) при $d = 1$. Решения интегральных уравнений (3.3) получали по методу квадратурных формул [16].

На рис. 1 представлена зависимость безразмерной величины $\alpha_1 = M_*/M_*^0 - 1$ от параметров c_1, c_2. Здесь M_*^0 — предельный изгибающий момент, при котором происходит отрыв пластины в случае задачи для однородного полупространства (при тех же λ и c). Из приведенных данных видно, что $|\alpha_1|$ увеличивается с ростом $c_1(|c_2|)$ при фиксированных значениях $c_2(c_1)$, отличных от нуля. Учитывая, что $\alpha_1 > 0$ при $c_2 > 0$ и $\alpha_1 < 0$ при $c_2 < 0$, заключаем, что $M_* > M_*^0$ при $c_2 > 0$ и $M_* < M_*^0$ при $c_2 < 0$, т. е. для упругого основания, коэффициент Пуассона материала которого убывает с глубиной, отрыв пластины имеет место при большем значении изгибающего момента, чем в случае упругого основания с постоянным коэффициентом ν_0, и при меньшем для упругого основания, коэффициент Пуассона материала которого возрастает с глубиной.

Зададимся величиной изгибающего момента $M = 1{,}8qR^2$ ($M \approx 1{,}99 M_*^0$). Как видно из рис. 1, при заданном значении изгибающего момента происходит отрыв пластины от основания при любых c_1, c_2 из интервалов их изменения.

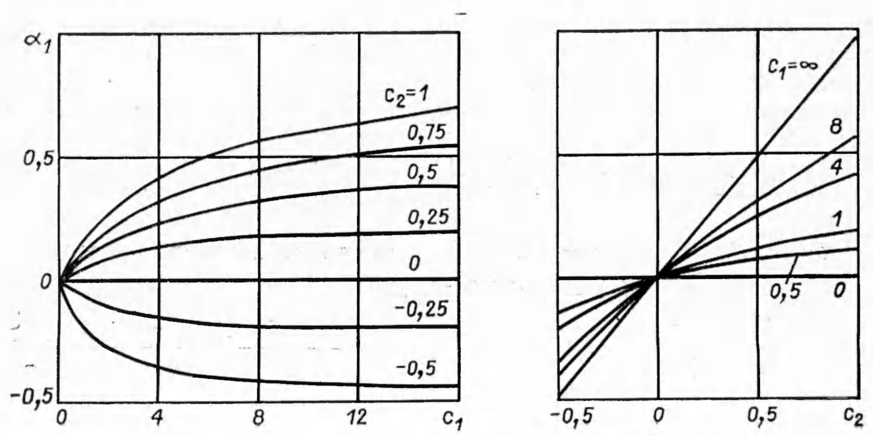

Рис. 1

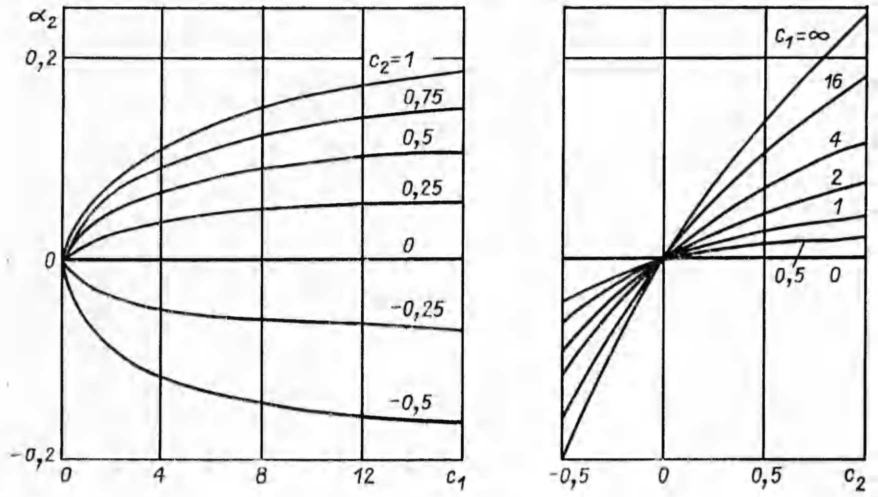

Рис. 2

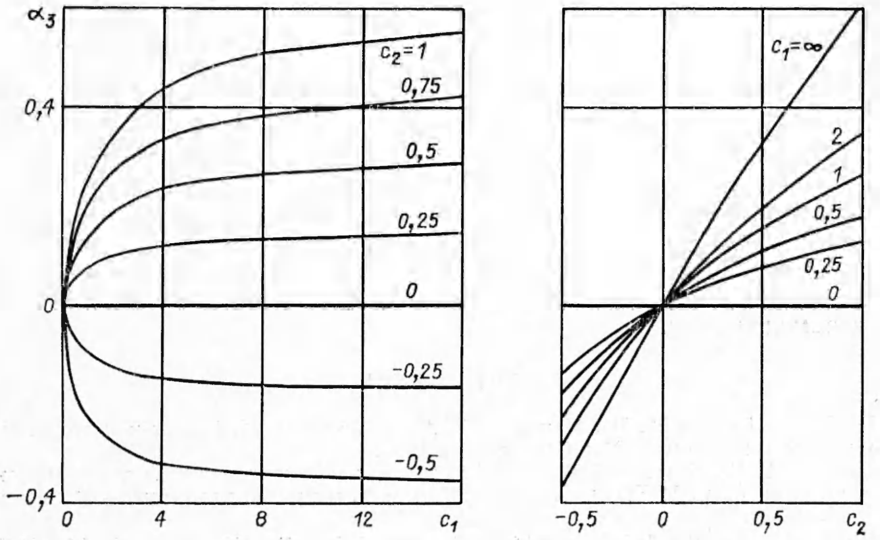

Рис. 3

Радиус площадки контакта находился (с точностью до 10^{-4}) из совместного решения уравнений (3.3), (3.5) методом последовательных приближений (за начальное приближение выбирали $a = R$).

На рис. 2—4 представлены соответственно зависимости безразмерных $\alpha_2 = a/a^0 - 1$, $\alpha_3 = w_0/w_0^0 - 1$ и $\alpha_4 = p(0)/p^0(0) - 1$ от c_1, c_2. Здесь a^0, w_0^0, $p^0(0)$ — радиус площадки контакта, максимальная величина прогибов пластины в зоне контакта и максимальная величина контактного давления в случае задачи для однородного полупространства (при тех же значениях λ и c).

Из приведенных численных результатов следует, что учет возрастания (убывания) коэффициента Пуассона материала упругого основания приводит к снижению (увеличению) расчетных значений радиуса площадки контакта и максимальной величины прогибов пластины соответственно в пределах до 19,7 (24,6) и 37,8 % (60,8 %) и увеличению (снижению) расчетных значений максимального реактивного давления в пределах до 153,8 % (59,6 %).

Случай увеличения по глубине коэффициента Пуассона отвечает модели упругого основания, модуль упругости которого возрастает по

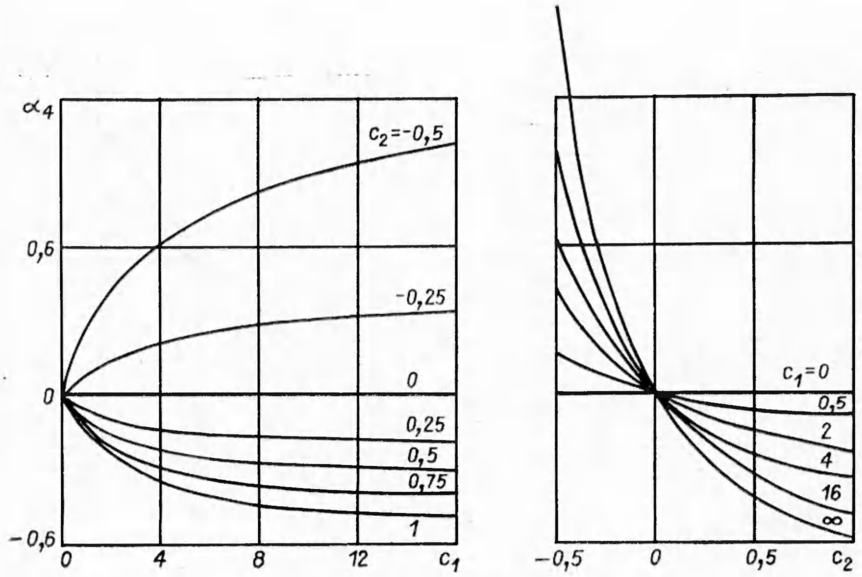

Рис. 4

глубине. Этим же свойством обладает, как правило, модуль упругости грунтов [1].

Итак, в данной работе получено решение осесимметричной задачи об изгибе круглой пластины на упругом неоднородном основании при неполном контакте, позволяющее учитывать изменение по глубине коэффициента Пуассона материала основания. Результаты численных расчетов свидетельствуют о существенном влиянии неоднородности основания на условия отрыва пластины от основания и на расчетные характеристики их взаимодействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. А., Соломин В. И.** Расчет конструкций на упругом основании.— М.: Стройиздат, 1984.
2. **Ишкова А. Г., Коренев Б. Г.** Изгиб пластинок на упругом и упругопластическом основании // Тр. II Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике.— М.: Наука, 1966.— Вып. 3.
3. **Коренев Б. Г.** Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях.— М.: Физматгиз, 1960.
4. **Попов Г. Я.** Пластинки на линейно деформируемом основании: Обзор // Прикл. механика.— 1972.— Т. 8, № 3.
5. **Развитие** теории контактных задач в СССР/Под ред. Л. А. Галина.— М.: Наука. 1976.
6. **Цейтлин А. И.** Прикладные методы решения краевых задач строительной механики.— М.: Стройиздат, 1984.
7. **Колчин Г. Б., Фаверман Э. А.** Теория упругости неоднородных тел: Библиогр. указ. отеч. и иностр. лит-ры.— Кишинев: Штиинца, 1972.
8. **Колчин Г. Б., Фаверман Э. А.** Теория упругости неоднородных тел: Библиогр. указ. отеч. и иностр. лит-ры за 1970—1973 гг.— Кишинев: Штиинца, 1977.
9. **Колчин Г. Б., Фаверман Э. А.** Теория упругости неоднородных тел: Библиогр. указ. отеч. и иностр. лит-ры за 1974—1979 гг.— Кишинев: Штиинца, 1987.
10. **Попов Г. Я.** Контактные задачи для линейно деформируемого основания.— Киев; Одесса: Вища школа, 1982.
11. **Статические** и динамические смешанные задачи теории упругости/Под. ред. И. И. Воровича.— Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1983.
12. **Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки.— М.: Физматгиз, 1963.
13. **Дудинский В. И.** Осесимметричная контактная задача для упругого полупространства с переменным коэффициентом Пуассона // Тр. X науч. конф. молодых ученых Ин-та мех. АН УССР, Киев, июнь 1984.— Ч. I.— Деп. в ВИНИТИ 30.07.84, № 5535—84.
14. **Бородачев А. Н., Дудинский В. И.** Контактная задача для упругого полупространства с переменным коэффициентом Пуассона // Изв. АН СССР. МТТ.— 1986.— № 1.

15. **Гребенщиков В. Н.** Расчет круглой плиты, загруженной равномерно распределенной нагрузкой и распределенными по контуру моментами, с учетом неполного контакта плиты с полупространством // Изв. вузов. Стр-во и архитектура.— 1972.— № 7.
16. **Верлань А. Ф., Сизиков В. С.** Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: Справочное пособие.— Киев: Наук. думка, 1986.

Поступила 19/XI 1987 г.

УДК 539.376

О ДВУОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ ТОЛСТОЙ ПЛАСТИНЫ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ ИЗ СТАРЕЮЩЕГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Ф. Б. Милявская

(*Чебоксары*)

В [1] введена модель стареющего вязкопластического материала. При этом предел текучести — интегральный оператор. В настоящей работе на основе модели [1] рассматривается развитие пластической зоны при двуосном растяжении пластины с эллиптическим отверстием из стареющего материала. Модель материала в упругоползучей зоне принята согласно [2, 3].

Методом малого параметра [4] получены два приближения для распределения напряжений, определена граница пластической зоны. Приводится численное решение задачи. Аналогичная задача для идеально упругопластического тела рассмотрена в [4].

Соотношения теории наследственно стареющего пластического тела — уравнения равновесия, условия несжимаемости и изотропии, условие наследственной пластичности — для плоской деформации имеют вид [1, 4]

$$\frac{\partial \sigma_x(t)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(t)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}(t)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(t)}{\partial y} = 0; \tag{0.1}$$

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = 0, \quad \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\sigma_x(t) - \sigma_y(t)} = \frac{\varepsilon_{xy}}{\tau_{xy}(t)}; \tag{0.2}$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\sigma_x(t) - \sigma_y(t)}{k(t)} + \int\limits_{t_0}^{t} (\sigma_x(\tau) - \sigma_y(\tau)) K^*(\tau, t)\, d\tau\right)^2 + \left(\frac{\tau_{xy}(t)}{k(t)} + \int\limits_{t_0}^{t} \tau_{xy}(\tau) K^*(\tau, t)\, d\tau\right)^2 = 1. \tag{0.3}$$

Здесь $\sigma_x(t)$, $\sigma_y(t)$, $\tau_{xy}(t)$ — компоненты напряжений, зависящие от времени; ε_x, ε_y, ε_{xy} — компоненты скорости пластической деформации; $k(t)$ — переменный во времени предел текучести; $K^*(\tau, t)$ — ядро наследственного оператора.

1. Рассмотрим бесконечную плоскость с эллиптическим отверстием с полуосями $a(1 + c)$, $a(1 - c)$, растягиваемую на бесконечности взаимно перпендикулярными усилиями $p_1(t)$ и $p_2(t)$; на контуре отверстия действует нормальное давление $p_0(t)$. Положим

$$c = d_1\delta, \quad (p_1(t) - p_2(t))/2 = d_2\delta, \tag{1.1}$$

где δ, d_1, d_2 — постоянные, принимающие значения в пределах

$$0 \leqslant \delta \leqslant 1, \quad 0 \leqslant d_i \leqslant 1 \quad (i = 1, 2). \tag{1.2}$$

Очевидно, при $d_1 = 0$, $d_2 = 1$ наблюдается двуосное растяжение толстой пластины с круговым отверстием [5], при $d_1 = 1$, $d_2 = 0$ имеет место пластина с эллиптическим отверстием под действием нормального давления.

Перейдем к безразмерным параметрам и переменным, оставив прежние обозначения. Предел текучести при $t \to \infty$ обозначим k_∞ и все величи-