

**НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ
УПРУГО-ЗАТВЕРДЕВАЮЩЕЙ ПЛАСТИНЫ
ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ТЕПЛООБМЕНА
НА ОХЛАЖДАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

*А. Л. Голованов, В. А. Журавлев,
А. Д. Клипов, В. И. Колодкин, А. Ю. Стоянов*

(Горький)

Вопрос о механическом состоянии сред, претерпевающих фазовые превращения, имеет большое практическое значение. Интерес к нему известен давно и восходит еще к первым наблюдениям разрывов почвы при ее промерзании и высыхании, к описанию растрескивания металлических, стеклянных и керамических изделий в процессе их формирования и т. д. Уже в первых качественных исследованиях содержалось разделение напряжений на фазовые, связанные с изменением плотности среды в процессе превращения, и термические, обусловленные существованием неравномерного температурного поля и теплового эффекта превращения. Последующие количественные решения опирались на известные физические модели отвердевания сред. Так, в 30-х годах Хироне [1,2] была предпринята попытка аналитического расчета температурных напряжений в затвердевающем металле на основе модели послойного наращивания упругого тела.

В дальнейших исследованиях обращалось внимание на построение физических моделей явления, учитывалось описание термопластического течения кристаллических материалов, определение условий выращивания бездислокационных кристаллов, описание процесса зарождения и роста трещин, формулировка физических условий прочности затвердевающих тел и т. д. Основополагающий вклад в постановку и решение многих из этих вопросов был сделан в работах Инденбома [3-8]. Параллельно развивались методы расчета температурных напряжений в отвердевающих телах в рамках механики сплошной среды и расширялся класс физических моделей, описывающих процесс фазового превращения. Краткий обзор работ по этому разделу приведен в [9]. Соответствующий анализ фазовых напряжений развит Косевичем и Танатаровым [10].

В данной работе рассмотрена одномерная симметричная задача об упруго-напряженном состоянии затвердевающей бесконечной пластины в предположении, что отвердевший слой предохранен от изгиба и свободен от внешних сил. В отличие от предыдущих в данной работе анализируется влияние на распределение возникающих напряжений различных условий теплообмена на охлаждаемой поверхности пластины. Получены оценочные результаты.

1. Рассмотрим полубесконечную область, распространяющуюся в направлении оси x и занятую жидкостью при температуре затвердевания T_h . В начальный момент времени на поверхности $x=0$ реализуется одно из условий теплообмена, соответствующее наличию постоянной, линейно убывающей во времени, убывающей по экспоненциальному закону, а также периодически изменяющейся температуры; наличию постоянного и линейно изменяющегося во времени теплового потока и теплообмена по закону Ньютона.

Будем считать, что отвердевший слой удовлетворяет модели упругого тела, а теплофизические и механические характеристики среды не зависят от температуры. Такие предположения соответствуют модели «мгновенного затвердевания» Хироне—Инденбома—Ридера. Для упрощения за-

дачи примем условия закрепления, при которых растущий слой предохранен от изгиба, что реализуется, в частности, при симметричном затвердевании тела либо при наращивании его на жесткой подложке. Используя эту модель, сформулируем далее рассматриваемую задачу в рамках теории несвязанной термоупругости, учитывая, что единственными отличными от нуля компонентами тензора напряжений, удовлетворяющими уравнениям равновесия, совместности и граничным условиям, являются $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma(x, t)$ и отличные от нуля компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon(t)$; $\varepsilon_{xx} = \varepsilon(x, t)$.

Имеем

$$(1.1) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \xi;$$

$$(1.2) \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \rho Q \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad T(\xi, t) = T_h, \quad x = \xi;$$

$$(1.3) \quad T(x, 0) = T_h, \quad 0 \leq x < \infty;$$

$$(1.4) \quad T(0, t) = T_0 = \text{const} < T_h;$$

$$(1.5) \quad T(0, t) = T_0 - kt;$$

$$(1.6) \quad T(0, t) = T_0 - \Delta T \cos(wt);$$

$$(1.7) \quad T(0, t) = T_h - \frac{Q}{C} [\exp(am^2t) - 1];$$

$$(1.8) \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q_0 = \text{const}, \quad x = 0;$$

$$(1.9) \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q_0 - kt, \quad x = 0;$$

$$(1.10) \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_T [T(0, t) - T_c], \quad x = 0;$$

$$(1.11) \quad \sigma_{xx} = 0, \quad 0 \leq x \leq \xi, \quad t > 0,$$

$$(1.12) \quad \sigma(x, t) = E \int_{\tau}^t \{\dot{\varepsilon} - \alpha \dot{T}(x, t)\} dt, \quad 0 \leq x \leq \xi;$$

$$(1.13) \quad \int_0^{\xi} \sigma(x, t) dx = 0, \quad 0 \leq x \leq \xi.$$

Здесь T — температура, a — температуропроводность, λ — теплопроводность, C — теплоемкость, Q — теплота фазового перехода, ρ — плотность, T_h — температура затвердевания, T_0 — температура на охлаждаемой поверхности, k , m , q_0 , w — постоянные, α_T — коэффициент теплообмена, t — время, ΔT — амплитуда колебаний температуры, x — текущая координата, ξ — координата фазовой границы, τ — момент присоединения точки жидкости к фазовой границе, E — модуль упругости, α — коэффициент линейного расширения.

Упругая задача (1.11)–(1.13) решается в квазистатической постановке, использующей как нагрузочную функцию в каждом частном случае теплообмена на охлаждаемой поверхности независимо полученное температурное поле.

2. Приближенное решение тепловой задачи, соответствующей случаю периодически изменяющейся температуры (1.1)–(1.3), (1.6), находим, следуя методу, изложенному в [11]. Так, температурное поле в затверде-

шем слое и закон движения фазовой границы в общем виде должны найдены из уравнений

$$(2.1) \quad T_h - T = \frac{Q\rho}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)! a^n} \cdot \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} (\xi - x)^{2n+2},$$

$$(2.2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)! a^n} \frac{d^n}{dt^n} \xi^{2n} = \frac{T_h - T(0, t)}{Q} C.$$

Ограничиваясь лишь первыми членами ряда и учитывая условие (1.6), получаем

$$T_h - T = \frac{Q}{C} \left(1 - \frac{x}{\xi} \right) \frac{\dot{\xi} \xi}{a}, \quad \xi^2 = p^2 \left(1 + \delta \frac{\sin wt}{wt} \right) 4at,$$

$$\text{где} \quad \delta = \frac{\Delta T}{T_h - T_0}; \quad 2p^2 = \frac{C(T_h - T_0)}{Q}.$$

Решение соответствующей упругой задачи (1.11)–(1.13) находим, согласно [9], используя приведенные выше температурное поле и закон движения фазовой границы

$$(2.3) \quad \frac{\sigma(p, wt_0, \theta) C (1 - \nu)}{\alpha E Q} = p^2 \left\{ 2 \left(1 + \delta \cos wt_0 \theta \right) \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{\left(1 + \delta \frac{\sin wt_0 \theta}{wt_0 \theta} \right) \theta}{1 + \delta \frac{\sin wt_0 \theta}{wt_0 \theta}}} \right) + 2\delta (\cos wt_0 \theta - \cos wt_0) + \frac{1}{2} \ln \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{\left(1 + \delta \frac{\sin wt_0 \theta}{wt_0 \theta} \right) \theta}{1 + \delta \frac{\sin wt_0 \theta}{wt_0 \theta}} \right] + 2\delta \int_{wt_0}^{wt_0 \theta} \frac{(1 + \delta \cos z) \cos z}{\left(1 + \delta \frac{\sin z}{z} \right) z} dz \right\},$$

где $\theta = t/t_0$, $0 \leq \theta \leq 1$, t_0 — время, отмечающее ширину затвердевшей части пластины. В дальнейшем под σ будет подразумеваться безразмерная величина $\sigma \cdot C(1 - \nu)/\alpha E Q$.

На фиг. 1 показано рассчитанное по выражению (2.3) распределение напряжений в затвердевшем слое при следующих условиях:

$$p^2 = 0,1, \delta = 0,1, wt_0 = 1) \frac{\pi}{6}, 2) \pi, 3) \frac{3}{2}\pi, 4) 2\pi.$$

Легко видеть, что возникающее распределение напряжений знакопеременно. При этом на охлаждаемой поверхности пластины напряжения всегда отрицательны и стремятся к бесконечности. Здесь очевидна область пластического сжатия.

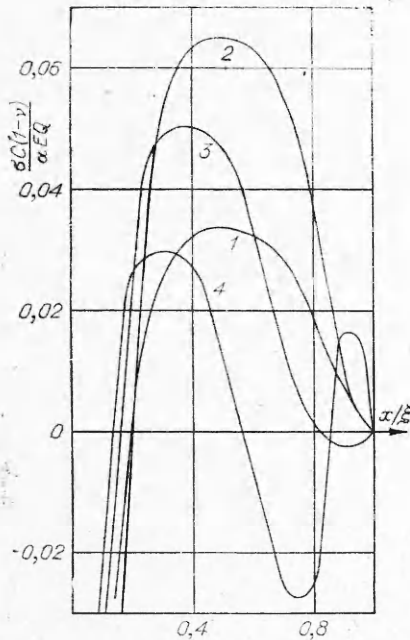
Если считать $\delta = 0$ ($\Delta T = 0$), то охлаждаемая поверхность пластин поддерживается при постоянной температуре $T = T_0 < T_h$. В этих условиях закон движения фазовой границы сводится к упрощенному варианту классического решения задачи Стефана (1.1)–(1.4)

$$\xi^2 = \frac{2\lambda(T_h - T_0)}{\rho Q} t.$$

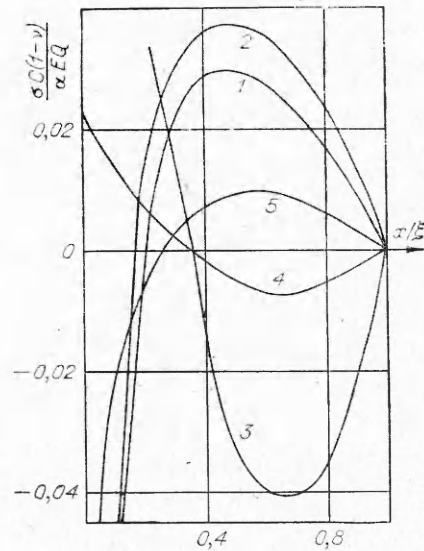
В то же время общее решение (2.3) принимает вид, совпадающий с решением, приведенным в [9], при $p \ll 1$

$$(2.4) \quad \sigma\left(p, \frac{x}{\xi}\right) = p^2 \left(\ln \frac{x}{\xi} - 2 \frac{x}{\xi} + 2 \right).$$

На фиг. 2 этому распределению напряжений отвечает кривая 1 при условии $p^2=0,1$. Координата максимальных растягивающих напряжений



Ф и г. 1



Ф и г. 2

в затвердевшем слое x_m следует из условия $\partial_x \sigma = 0$ и в случае (2.4) равна $x_m/\xi = 0,5$.

3. В случае линейно убывающей температуры приближенное решение тепловой задачи (1.1)–(1.3), (1.5) находим из общих решений (2.1), (2.2) при ограничениях, аналогичных принятым в п. 2

$$(3.1) \quad T_h - T = 2p^2 \frac{Q}{C} \left(1 - \frac{x}{\xi} \right) \sqrt{1 - m^2 \xi^2},$$

$$(3.2) \quad \xi^2 = p^2 \cdot 4at + 2p^2 m^2 a^2 t^2,$$

$$\text{где} \quad m^2 = \frac{kC}{2p^2 a Q}, \quad 2p^2 = \frac{T_h - T_0}{Q} C.$$

Отметим также, что аналогичные условия теплообмена реализуются и при периодическом режиме охлаждения на этапе затвердевания пластины, когда $wt_0 \approx \pi/2(2n-1)$, $n=1, 2, \dots$. Используя выражения (3.1), (3.2), выпишем решение соответствующей упругой задачи

$$\sigma\left(p, m\xi, \frac{x}{\xi}\right) = p^2 \left[2 \left(\sqrt{1 - m^2 \xi^2} \right) \left(1 - \frac{x}{\xi} \right) - 2 \left(\sqrt{1 - m^2 \xi^2} - \right. \right.$$

$$- \sqrt{1 - m^2 \xi^2 \frac{x^2}{\xi^2}} - \frac{1}{2} \ln \frac{(1 - \sqrt{1 - m^2 \xi^2}) \left(1 + \sqrt{1 - m^2 \xi^2 \frac{x^2}{\xi^2}}\right)}{(1 + \sqrt{1 - m^2 \xi^2}) \left(1 - \sqrt{1 - m^2 \xi^2 \frac{x^2}{\xi^2}}\right)} \Bigg].$$

При $m^2 \xi^2 \ll 1$ это решение может быть упрощено:

$$(3.3) \quad \sigma \left(p, m\xi, \frac{x}{\xi} \right) = p^2 \left[\ln \frac{x}{\xi} - 2 \frac{x}{\xi} + 2 + m^2 \xi^2 \frac{x}{\xi} \left(1 - \frac{x}{\xi} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \ln \frac{4 - m^2 \xi^2 \frac{x^2}{\xi^2}}{4 - m^2 \xi^2} \right].$$

Если $m=0$, (3.3) совпадает с (2.4). Координата максимальных растягивающих напряжений для упрощенного распределения (3.3) следует из выражения

$$\frac{\xi}{x_m} + m^2 \xi^2 \left(1 - 2 \frac{x_m}{\xi} \right) + \frac{m^2 \xi^2 \frac{x_m}{\xi}}{4 - m^2 \xi^2 \frac{x_m^2}{\xi^2}} = 2.$$

Распределение напряжений (3.3) приводится на фиг. 2 (кривая 2) при $p^2=0,1$; $m\xi=0,705$.

4. Точное решение тепловой задачи в случае экспоненциально убывающей температуры (1.1)–(1.3), (1.7), согласно [12], имеет вид

$$T_h - T = \frac{Q_1}{C} \left\{ \exp \left[m\xi \left(1 - \frac{x}{\xi} \right) \right] - 1 \right\}, \\ \xi = mat, \quad m = \text{const.}$$

Решение соответствующей упругой задачи приводит к следующему распределению термических напряжений в затвердевшем слое:

$$(4.1) \quad \sigma \left(m\xi, \frac{x}{\xi} \right) = \exp \left[m\xi \left(1 - \frac{x}{\xi} \right) \right] - 1 - \ln \frac{x}{\xi} + E_i \left(m\xi \frac{x}{\xi} \right) - \\ - E_i(m\xi),$$

$$\text{где } E_i(y) = \int_{-\infty}^y \frac{\exp(y)}{y} dy.$$

На охлаждаемой поверхности пластины имеем

$$\sigma(m\xi, 0) = \exp(m\xi) - 1 + C_1 + \ln(m\xi) - E_i(m\xi),$$

где $C_1 = 0,577$ — постоянная Эйлера.

При малых значениях параметра $m\xi \ll 1$ $\sigma(m\xi, 0) \rightarrow 1/4(m\xi)^2$ и, следовательно, наибольшие растягивающие напряжения находятся на охлаждаемой поверхности пластины.

5. Приближенное решение соответствующей случаю постоянного теплового потока задачи (1.1)–(1.3), (1.8) можно найти, вновь обращаясь к методу, изложенному в [11]. При этом температурное поле представляется выражением (2.1), а закон движения фазовой границы находится из уравнения

$$(5.1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^n (2n+1)!} \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \xi^{2n+1} = ma.$$

Ограничиваясь в выражении (2.1) двумя членами ряда, а в выражении (5.1) — одним, получаем

$$T_h - T = \frac{Q}{C} \left[\left(1 - \frac{x}{\xi}\right) \frac{\xi \dot{\xi}}{a} + \left(1 - \frac{x}{\xi}\right)^2 \frac{\xi^2 \dot{\xi}^2}{2a^2} \right],$$

$$\xi = mat, \quad m = \frac{q_0 C}{\lambda Q}.$$

Эти решения тепловой задачи дает упрощенное температурное поле, использованное в предыдущем пункте, когда $m\xi \left(1 - \frac{x}{\xi}\right) \ll 1$.

Решение упругой задачи для этого случая имеет вид

$$(5.2) \quad \sigma \left(m\xi, \frac{x}{\xi} \right) = \frac{m^2 \xi^2}{4} \left(1 - 4 \frac{x}{\xi} + 3 \frac{x^2}{\xi^2} \right).$$

На охлаждаемой поверхности пластины ($x=0$) возникают наибольшие растягивающие напряжения $\sigma(m\xi, 0) = 1/4(m\xi)^2$. Координата максимальных сжимающих напряжений соответствует величине $x_m/\xi = 2/3$.

На фиг. 2 (кривая 3) показано распределение напряжений, найденное по (5.2) при $m\xi = 0,705$.

6. Приближенное решение тепловой задачи в случае линейно убывающего теплового потока (1.1)—(1.3), (1.9) находим, используя (2.1), (5.1), аналогично решению, рассмотренному в предыдущем пункте. Имеем

$$T_h - T = \frac{Q}{C} \left[\left(1 - \frac{x}{\xi}\right) \frac{\xi \dot{\xi}}{a} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{\xi}\right)^2 \frac{\xi^2 \dot{\xi}^2}{a^2} + \frac{1}{6} \left(1 - \frac{x}{\xi}\right)^3 \frac{\xi^3 \dot{\xi}^3}{a^3} \right],$$

$$\xi = mat \left(1 - \frac{ht}{2q_0} \right), \quad m = \frac{q_0 C}{\lambda Q}.$$

Решение упругой задачи дает распределение термических напряжений в затвердевшем слое

$$(6.1) \quad \sigma \left(m\xi, \frac{x}{\xi} \right) = -nm\xi \frac{x}{\xi} \left(1 - \sqrt{\frac{x}{\xi}} \right) \sqrt{1 - nm\xi} + \frac{m^2 \xi^2}{4} \left[1 - \right. \\ \left. - 4(1 - nm\xi) \frac{x}{\xi} + \frac{3x^2}{\xi^2} - 2nm\xi \left(\frac{4}{9} + \frac{x^2}{\xi^2} + \frac{5}{9} \frac{x^3}{\xi^3} \right) \right],$$

где
$$n = \frac{2kQ^2 \rho^2 a}{q_0^3}.$$

На охлаждаемой поверхности пластины возникают максимальные растягивающие напряжения

$$\sigma(m\xi, 0) = \frac{m^2 \xi^2}{4} \left(1 - \frac{8}{9} nm\xi \right).$$

В предельном случае $n=0$ ($k=0$) решение (6.1) совпадает с решением (5.2). На фиг. 2 (кривая 4) показано распределение напряжений, рассчитанное по выражению (6.1) для $m\xi = 0,333$ при $n=0,1$.

7. В случае теплообмена по закону Ньютона температурное поле и закон движения фазовой границы находятся решением тепловой задачи (1.1)—(1.3), (1.10). Для этого вновь используем результаты работы [12]. Температурное поле дается выражением (2.1), а для закона движения

фазовой границы имеем уравнение

$$(7.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n} \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{\xi^{2n}}{(2n)!} + \frac{\lambda}{\alpha_T} \frac{\xi^{2n-1}}{(2n-1)!} \right] = \frac{T_h - T_c}{Q} C.$$

Ограничиваясь первыми членами разложений (2.1), (7.1), получаем

$$\begin{aligned} T_h - T &= \frac{Q}{C} \left(1 - \frac{x}{\xi} \right) \frac{\xi^2}{a}, \\ \xi^2 &= 4p^2 at - \frac{2}{m^2} (\sqrt{1 + 4p^2 at m^2} - 1), \\ 2p^2 &= \frac{T_h - T_c}{Q} C, \quad m = \frac{\alpha_T}{\lambda}. \end{aligned}$$

Решение упругой задачи для этого случая приводит к следующему распределению температурных напряжений в затвердевшем слое:

$$(7.2) \quad \sigma \left(m\xi, \frac{x}{\xi} \right) = p^2 \left[\frac{2m\xi}{1+m\xi} \left(1 - \frac{x}{\xi} \right) + \ln \frac{1+m\xi \frac{x}{\xi}}{1+m\xi} + \left(\frac{1}{m\xi+1} - \frac{1}{1+m\xi \frac{x}{\xi}} \right) \right].$$

Из (7.2) следует, что на охлаждаемой поверхности пластины возникают сжимающие напряжения, величина которых равна

$$\sigma(p, m\xi, 0) = p^2 \left[\frac{m\xi}{1+m\xi} - \ln(1+m\xi) \right],$$

а значение координаты максимальных растягивающих напряжений в затвердевшем слое определяется соотношением

$$\frac{x_m}{\xi} = \frac{1}{4} \left(1 + \sqrt{\frac{9+m\xi}{1+m\xi}} \right) - \frac{1}{m\xi} \left[1 - \frac{1}{4} \left(1 + \sqrt{\frac{9+m\xi}{1+m\xi}} \right) \right].$$

На фиг. 2 (кривая 5) приводится рассчитанное по выражению (7.2) распределение напряжений при $p^2=1,0$; $m\xi=0,333$.

8. Из приведенных результатов следует, что условия теплообмена существенно влияют на характер распределения температуры в затвердевшей пластине и связанный с ним закон движения фазовой границы. Это имеет ряд следствий и, в первую очередь, наличие качественных изменений в распределении возникающих термических напряжений. В этом смысле рассмотренные условия теплообмена можно подразделить на две группы по признаку, определяющему качественно одинаковые картины напряженного состояния растущей пластины.

К первой следует отнести случаи теплообмена по законам (1.4)–(1.6), (1.10). Действующее в этих условиях распределение напряжений характеризуется наличием области сжатия у охлаждаемой поверхности, причем $\sigma|_{x=0} \rightarrow -\infty$. Здесь наиболее общим случаем является периодический температурный режим на охлаждаемой поверхности пластины, соответствующий закону (1.6), в котором, как частные случаи, содержатся условия теплообмена с постоянной, линейно убывающей и возрастающей по параболическому закону температурой. В связи с этим рассмотрим некоторые особенности в распределении напряжений, характерные для пе-

риодического режима охлаждения. Так, в начале периода изменения температуры напряженное состояние пластины характеризуется двумя зонами (см. рис. 1, кривая 1): растянутой у фазовой границы и зоной сжатия у охлаждаемой поверхности. За время, равное половине периода изменения температуры, в распределении напряжений по сравнению с началом периода не возникает качественных изменений (кривая 2), хотя максимальные растягивающие напряжения возрастают. За последующую четверть периода происходит перераспределение напряжений с образованием небольшой области сжатия у фазовой границы (кривая 3). Наконец, в течение последней четверти периода картина резко меняется — возникшая сжатая зона расширяется и смещается в средние слои затвердевшей части пластины, а вблизи фазовой границы появляется узкая, но со значительными по величине напряжениями, растянутая область. В целом, в этот момент для напряженного состояния пластины характерно чередование упругих сжатых и растянутых зон, ширина которых и максимальные действующие напряжения зависят от величины параметра δ . При малых δ влияние колебания температуры на распределение напряжений несущественно. С ростом $\delta > 1$ возникающие напряжения оказываются пропорциональными δ . При этих изменениях величины δ не возникает качественных изменений напряженного состояния растущей пластины. Вариация другого внешнего параметра — частоты колебаний температуры — приводит к следующим особенностям: в случае $w \rightarrow 0$ распределение напряжений стремится к выражению (2.4), а при $w \rightarrow \infty$ соответственно возрастает число сжатых и растянутых зон в затвердевшем слое.

Примыкающий к первой группе случай теплообмена по закону Ньютона характерен тем, что с ростом коэффициента теплоотдачи ($m \rightarrow \infty$, т. е. когда имеют место условия идеального контакта охлаждаемой поверхности пластины с окружающей средой) распределение напряжений (7.2) стремится к распределению (2.4). С другой стороны, при $m = 0$ напряжения не возникают.

Другую качественно совпадающую картину распределения напряжений в затвердевающей пластине дает реализация условий теплообмена, соответствующих законам (1.7)—(1.9). Здесь зона растягивающих напряжений прилежит к охлаждаемой поверхности, а у фазовой границы возникает область сжатия. Характерно, что растягивающие напряжения на охлаждаемой поверхности пластины конечны. При этом наиболее общим является случай с экспоненциально падающей температурой (4.1).

Поступила 6 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Hirone T. Internal stress due to Cooling in Spherical Steel Ingots. The Science reports of the Tohoku Imperial university. Professor Honda's Anniversary volume, 1936, p. 1017.
2. Hirone T. Internal stress due to Cooling in Cylindrical Steel Ingots. The Science reports of the Tohoku imperial university. 1937. Ser. 1, vol. 26, p. 214.
3. Инденбом В. Л. К теории закалки стекла. ЖТФ, 1954, т. 24, вып. 5, с. 925.
4. Инденбом В. Л. О напряжениях на поверхности стеклоизделий. ЖТФ, 1956, т. 26, вып. 2, с. 370.
5. Инденбом В. Л. Макроскопическая теория образования дислокаций при росте кристаллов. Кристаллография, 1957, т. 2, вып. 5, с. 594.
6. Инденбом В. Л. К теории образования напряжений и дислокаций при росте кристаллов. Кристаллография, 1964, т. 9, вып. 1, с. 74.
7. Инденбом В. Л., Видро Л. И. Термопластические и структурные напряжения в твердых телах. ФТТ, 1964, т. 6, вып. 4, с. 992.

8. *Инденбом В. Л., Житомирский И. С., Чебанова Т. С.* Теоретическое исследование напряжений, возникающих в процессе роста кристаллов. В сб. «Рост кристаллов», т. 8. М., «Наука», 1968, с. 303.
 9. *Журавлев В. А., Фидельман В. Р.* Температурные напряжения в непрерывном плоском слитке. Инж.-физ. жур., 1972, т. 23, вып. 3, с. 519.
 10. *Косевич А. М., Танатаров Л. В.* Пластическая деформация и необратимые изменения в твердом теле при локальном плавлении. Нитеобразный источник тепла. ПМТФ, 1961, № 5, с. 61.
 11. *Борисов В. Т., Любов Б. Я., Темкин Д. Е.* О расчете кинетики затвердевания металлического слитка при различных температурных условиях на его поверхности. Докл. АН СССР, 1955, т. 104, № 2, с. 223.
 12. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М., «Наука», 1964, с. 286.
-