

УДК 534.16

DOI: 10.15372/PMTF202315304

## УТОЧНЕННАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СТЕРЖНЯ-ПОЛОСЫ С ЗАКРЕПЛЕННЫМ УЧАСТКОМ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ НА ОДНОЙ ИЗ ЛИЦЕВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В. Н. Паймушин<sup>\*,\*\*</sup>, В. М. Шишкин<sup>\*\*\*</sup>

\* Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева, Казань, Россия

\*\* Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

\*\*\* Вятский государственный университет, Киров, Россия

E-mails: vpajmushin@mail.ru, tism1@rambler.ru

Решается задача о вынужденных изгибных колебаниях стержня-полосы с двумя консолями и закрепленным участком конечной длины на одной из лицевых поверхностей. Для описания процессов деформирования консолей используется модель Тимошенко без учета поперечного обжатия, закрепленного участка — такая же модель деформирования с учетом поперечного обжатия, модифицированная за счет учета наличия неподвижного закрепленного участка. Сформулированы условия кинематического сопряжения консолей и закрепленного участка. На основе вариационного принципа Гамильтона — Остроградского сформулированы уравнения движения и граничные условия, а также силовые условия сопряжения участков стержня. Получены точные аналитические решения уравнений движения при воздействии гармонической поперечной силы на конце одной из консолей стержня. Проведены численные эксперименты, в которых исследовалось прохождение резонансных колебаний через закрепленный участок конечной длины в стержнях, выполненных из дюралюминия и волокнистого композита, с учетом и без учета поперечного обжатия закрепленного участка. Обнаружено значительное увеличение амплитуды колебаний конца ненагруженной консоли дюралюминиевого стержня за счет поперечного обжатия закрепленного участка. Для композитного стержня амплитуда колебаний увеличилась незначительно.

**Ключевые слова:** колебания, стержень-полоса, закрепленный участок конечной длины, сдвиговая модель Тимошенко, поперечное обжатие

**Введение.** В настоящее время для экспериментального определения демпфирующих характеристик материалов в диапазоне частот  $50 \div 5000$  Гц рекомендуется использовать стандарт испытаний ASTM E-756-05 [1], в соответствии с которым исследуются спектры резонансных режимов изгибных колебаний консольно закрепленных образцов с различной структурой в указанном диапазоне частот (рис. 1,а).

В работах [2, 3] предложена методика определения демпфирующих свойств материалов в низкочастотном диапазоне, основанная на исследовании затухающих изгибных колебаний образцов по первой моде. Использовались образцы значительной длины (рис. 1,б), что позволяет в достаточно широком диапазоне изменять длину испытываемой консоли  $a_1$ ,

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 23-19-00021).

© Паймушин В. Н., Шишкин В. М., 2024

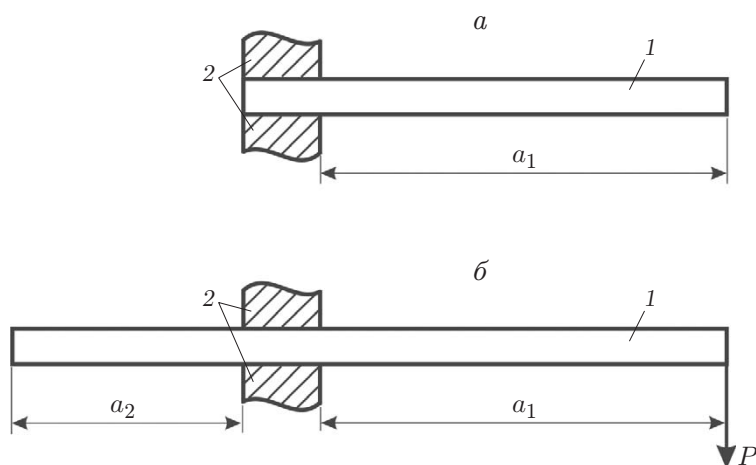


Рис. 1. Схемы закрепления образцов в экспериментах при воздействии осциллирующей нагрузки:

$a$  — стержень-полоса с одной консолью,  $б$  — стержень-полоса с двумя консолями; 1 — образец, 2 — жесткие опорные элементы

а следовательно, и частоту первого тона ее изгибных колебаний. В соответствии с предложенной методикой консоль образца длиной  $a_1$  при испытании подвергалась воздействию статически приложенной нагрузки  $P$  (см. рис. 1, б), после снятия которой образец совершал затухающие изгибные колебания по первой моде. Обработка виброграмм затухающих колебаний образцов при различных значениях длины  $a_1$  (частоты собственных колебаний) позволяет определить параметры демпфирования материалов в зависимости от частоты колебаний и амплитуды изгибных деформаций [2, 3]. С использованием предлагаемой методики можно уменьшить количество испытываемых образцов и, как следствие, обеспечить стабильность свойств испытываемых материалов в одном образце.

Следует отметить, что при проведении испытаний при различной длине правой консоли образца длиной  $a_1$  (см. рис. 1, б) обнаружено не описанное ранее явление прохождения колебаний в левую консоль длиной  $a_2$  через участок жесткого соединения образца с его опорными элементами. Так, при кратных отношениях квадратов длин консолей  $a_1^2/a_2^2$ , что соответствует кратным отношениям собственных частот колебаний консолей  $f_2/f_1$ , динамическое возбуждение изгибных колебаний правой консоли вызывает гармонические изгибные колебания левой консоли (см. рис. 1, б). Данное явление в предположении большой жесткости и неподвижности опорного элемента можно объяснить лишь податливостью закрепленного участка образца (стержня), имеющего, как правило, большую длину.

При постановке и решении задач механики деформирования тонкостенных элементов конструкций реальные условия их закрепления на опорных элементах обычно заменяются условиями шарнирного опирания или жесткого защемления (см., например, [4–8]), что вносит погрешность в решения данных задач. В работах [9–12] с использованием результатов проведенных экспериментальных исследований [9] показано, что при теоретическом исследовании наблюдаемого в экспериментах явления прохождения вибраций через закрепленные участки конечных размеров в многоопорных неразрезных стержнях необходимо учитывать деформируемость данных участков. При проведении теоретических исследований предполагалось, что прохождение изгибных колебаний через закрепленный участок конечной длины осуществляется за счет перехода изгибного напряженно-деформированного состояния динамически нагруженного участка стержня в состояние с продольными поперечно-сдвиговыми колебаниями закрепленного участка, а затем в состояние с изгибными колебаниями соседнего участка.

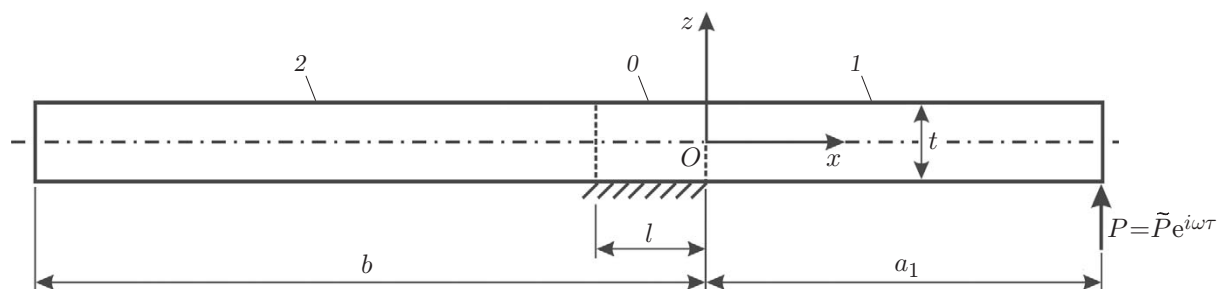


Рис. 2. Схема нагружения и закрепления стержня-полосы:

0 — закрепленный участок, 1 — нагружаемая консоль, 2 — свободная консоль

Соединение тонкостенных элементов с другими элементами конструкции или с ее опорными узлами обычно осуществляется внахлест на одной из лицевых поверхностей. Как правило, такое соединение применяется для тонкостенных элементов, выполненных из композитных материалов, разрушение которых происходит в основном за счет напряжений поперечного сдвига. В работе [13] проведено исследование статического деформирования стержня-полосы, выполненного из однонаправленного волокнистого композита на основе углеродного волокна марки ЭЛУР-П и связующего ХТ-118, с закрепленным участком конечной длины на одной из лицевых поверхностей. Показано, что максимальное напряжение поперечного сдвига возникает в сечении, расположенном на закрепленном участке стержня, непосредственно в зоне сопряжения его с незакрепленным участком, причем это напряжение почти в семь раз превышает значение, полученное без учета податливости закрепленного участка стержня.

Теоретические исследования динамического деформирования тонкостенных элементов конструкций с учетом податливости закрепленных участков конечной длины на одной из лицевых поверхностей проведены в работах [10–12], в которых для описания процессов деформирования данных элементов (плоских стержней) используется сдвиговая модель Тимошенко, основанная на линейной аппроксимации тангенциальных перемещений по поперечной координате, когда прогиб считается не зависящим от этой координаты. Данная модель позволяет выявить прохождение вибраций через закрепленный участок конечной длины лишь в стержнях, выполненных из однонаправленно армированных волокнистых композитных материалов, характеризующихся малой жесткостью на сдвиг; в стержнях из металлических конструкционных материалов отмеченное явление удастся выявить лишь в случае малой длины закрепленного участка, в то время как в экспериментах оно наблюдается и в случае закрепленных участков достаточно большой длины.

В настоящей работе, в отличие от [10–12], для закрепленного участка стержня предлагается использовать модель Тимошенко [14–18] с учетом поперечного обжатия (модель первого порядка точности), модифицированную за счет выполнения условий неподвижности точек лицевой поверхности на закрепленном участке.

**1. Основные соотношения.** Рассмотрим тонкостенный элемент конструкции в виде стержня-полосы (рис. 2), закрепленный на абсолютно жестком опорном элементе на поверхности  $z = -t/2$  и нагруженный в сечении  $x = a_1$  внешней гармонической силой  $P = \tilde{P} e^{i\omega\tau}$  ( $i$  — мнимая единица;  $\tau$  — время) с амплитудой  $\tilde{P}$  и круговой частотой  $\omega$ .

В работах [10–12] для перемещений  $U^{(0)}$ ,  $W^{(0)}$  произвольной точки закрепленного участка рассматриваемого стержня-полосы принималась простейшая аппроксимация, построенная на основе сдвиговой модели Тимошенко:

$$U^{(0)} = (1 + 2z/t)u^{(0)}, \quad W^{(0)} = w^{(0)} = 0, \quad -l \leq x \leq 0, \quad (1.1)$$

где  $u^{(0)}$ ,  $w^{(0)}$  — осевые перемещения и прогибы средней линии  $Ox$  данного участка соответственно. Однако, как показали численные эксперименты, для стержней из металлических конструкционных материалов с модулями упругости при растяжении-сжатии и сдвиге  $E_1$ ,  $G_{13}$ , связанными зависимостью  $G_{13} = E_1/[2(1 + \nu_{13})]$  ( $\nu_{13}$  — коэффициент Пуассона), модель (1.1) при больших значениях безразмерного параметра  $k^2 = 3G_{13}l^2/(E_1t^2)$  является жесткой, что не позволяет описать с приемлемой точностью переход изгибных форм движения, возбуждаемых на незакрепленном участке 1 стержня, через закрепленный участок 0 в изгибные колебания незакрепленного участка 2 стержня.

С учетом сказанного выше вместо (1.1) предлагается использовать уточненную модель, учитывающую поперечное обжатие стержня на закрепленном участке:

$$U^{(0)} = u^{(0)} + z\gamma^{(0)}, \quad W^{(0)} = w^{(0)} + z\varphi^{(0)}, \quad -l \leq x \leq 0 \quad (1.2)$$

( $\gamma^{(0)}$ ,  $\varphi^{(0)}$  — угол поворота поперечного сечения и функция, учитывающая поперечное обжатие закрепленного участка, соответственно). Если на закрепленном участке  $-l \leq x \leq 0$  в точках граничной плоскости  $z = -t/2$  на перемещения  $U^{(0)}$  и  $W^{(0)}$  наложить кинематические ограничения  $U^{(0)}(x, z) = 0$ ,  $W^{(0)}(x, z) = 0$  ( $z = -t/2$ ), то из (1.2) следуют уравнения связи

$$\gamma^{(0)} = 2u^{(0)}/t, \quad \varphi^{(0)} = 2w^{(0)}/t. \quad (1.3)$$

Подставляя (1.3) в модель (1.2), получаем зависимости

$$U^{(0)} = (1 + 2z/t)u^{(0)}, \quad W^{(0)} = (1 + 2z/t)w^{(0)}, \quad (1.4)$$

которым в геометрически линейном приближении соответствуют деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(0)} &= (1 + 2z/t)u_{,x}^{(0)}, & \varepsilon_z^{(0)} &= (2/t)w^{(0)}, \\ \gamma_{xz}^{(0)} &= U_{,z}^{(0)} + W_{,x}^{(0)} = (2/t)u^{(0)} + (1 + 2z/t)w_{,x}^{(0)}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь нижние индексы  $x$ ,  $z$  после запятой означают дифференцирование по соответствующей координате. С учетом (1.5) при использовании соотношений обобщенного закона Гука

$$\sigma_x^{(0)} = \bar{E}_1(\varepsilon_x^{(0)} + \nu_{31}\varepsilon_z^{(0)}), \quad \sigma_z^{(0)} = \bar{E}_3(\varepsilon_z^{(0)} + \nu_{13}\varepsilon_x^{(0)}), \quad \sigma_{xz}^{(0)} = G_{13}\gamma_{xz}^{(0)},$$

где

$$\bar{E}_1 = E_1/(1 - \nu_{13}\nu_{31}), \quad \bar{E}_3 = E_3/(1 - \nu_{13}\nu_{31}), \quad E_1\nu_{31} = E_3\nu_{13},$$

получаем зависимости для напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(0)} &= \bar{E}_1 \left[ \left(1 + \frac{2z}{t}\right) u_{,x}^{(0)} + \frac{2\nu_{31}}{t} w^{(0)} \right], & \sigma_z^{(0)} &= \bar{E}_3 \left[ \frac{2}{t} w^{(0)} + \nu_{13} \left(1 + \frac{2z}{t}\right) u_{,x}^{(0)} \right], \\ \sigma_{xz}^{(0)} &= G_{13} \left[ \left(1 + \frac{2z}{t}\right) w_{,x}^{(0)} + \frac{2}{t} u^{(0)} \right]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Для перемещений  $U^{(k)}$ ,  $W^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ) точек незакрепленных участков стержня, как и в [10–12], принимаются зависимости, аналогичные представлениям (1.2), но без учета поперечного обжатия:

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= u^{(1)} + z\gamma^{(1)}, & W^{(1)} &= w^{(1)}, & 0 \leq x \leq a_1, \\ U^{(2)} &= u^{(2)} + z\gamma^{(2)}, & W^{(2)} &= w^{(2)}, & -b \leq x \leq -l. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь  $u^{(k)}, w^{(k)}, \gamma^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ) — осевые перемещения и прогибы средней линии  $Ox$ , а также углы поворота поперечных сечений соответствующих участков стержня. В соответствии с (1.7) в случае малых перемещений имеют место кинематические соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(1)} &= u_{,x}^{(1)} + z\gamma_{,x}^{(1)}, & \gamma_{xz}^{(1)} &= w_{,x}^{(1)} + \gamma^{(1)}, & 0 \leq x \leq a_1, \\ \varepsilon_x^{(2)} &= u_{,x}^{(2)} + z\gamma_{,x}^{(2)}, & \gamma_{xz}^{(2)} &= w_{,x}^{(2)} + \gamma^{(2)}, & -b \leq x \leq -l, \end{aligned} \quad (1.8)$$

которым соответствуют нормальные и касательные напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)} &= E_1(u_{,x}^{(1)} + z\gamma_{,x}^{(1)}), & \sigma_{xz}^{(1)} &= G_{13}(w_{,x}^{(1)} + \gamma^{(1)}), & 0 \leq x \leq a_1, \\ \sigma_x^{(2)} &= E_1(u_{,x}^{(2)} + z\gamma_{,x}^{(2)}), & \sigma_{xz}^{(2)} &= G_{13}(w_{,x}^{(2)} + \gamma^{(2)}), & -b \leq x \leq -l. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Налагая на функции (1.4), (1.7) условия непрерывности перемещений в сечениях  $x = 0$  и  $x = -l$ , записываемые в виде

$$\begin{aligned} U^{(1)}|_{x=0} &= U^{(0)}|_{x=0}, & W^{(1)}|_{x=0} &= W^{(0)}|_{x=0}, \\ U^{(2)}|_{x=-l} &= U^{(0)}|_{x=-l}, & W^{(2)}|_{x=-l} &= W^{(0)}|_{x=-l}, \end{aligned}$$

и приравнивая соответствующие коэффициенты при одинаковых степенях  $z$ , получаем кинематические условия сопряжения участков

$$\begin{aligned} u^{(1)}|_{x=0} &= u^{(0)}|_{x=0}, & w^{(1)}|_{x=0} &= w^{(0)}|_{x=0}, & \gamma^{(1)}|_{x=0} &= \frac{2}{t} u^{(0)}|_{x=0}, \\ u^{(2)}|_{x=-l} &= u^{(0)}|_{x=-l}, & w^{(2)}|_{x=-l} &= w^{(0)}|_{x=-l}, & \gamma^{(2)}|_{x=-l} &= \frac{2}{t} u^{(0)}|_{x=-l}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

**2. Построение уравнений движения стержня.** При действии на стержень внешней поперечной силы  $P = \tilde{P} e^{i\omega\tau}$  можно записать вариационное уравнение Гамильтона — Остроградского

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( \sum_{j=0}^2 \delta\Pi^{(j)} - \sum_{j=0}^2 \delta K^{(j)} - \delta A \right) d\tau = 0, \quad (2.1)$$

где  $\delta\Pi^{(j)}, \delta K^{(j)}$  ( $j = 0, 1, 2$ ) — вариации потенциальной энергии деформации и кинетической энергии соответствующих участков стержня (см. рис. 1), имеющие вид

$$\begin{aligned} \delta\Pi^{(0)} &= \int_{-l}^0 \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x^{(0)} \delta\varepsilon_x^{(0)} + \sigma_z^{(0)} \delta\varepsilon_z^{(0)} + \sigma_{xz}^{(0)} \delta\gamma_{xz}^{(0)}) dz dx, \\ \delta\Pi^{(1)} &= \int_0^{a_1} \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x^{(1)} \delta\varepsilon_x^{(1)} + \sigma_{xz}^{(1)} \delta\gamma_{xz}^{(1)}) dz dx, \\ \delta\Pi^{(2)} &= \int_{-b}^{-l} \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x^{(2)} \delta\varepsilon_x^{(2)} + \sigma_{xz}^{(2)} \delta\gamma_{xz}^{(2)}) dz dx, \\ \delta K^{(0)} &= \rho \int_{-l}^0 \int_{-t/2}^{t/2} (\ddot{U}^{(0)} \delta U^{(0)} + \ddot{W}^{(0)} \delta W^{(0)}) dz dx, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\delta K^{(1)} = \rho \int_0^{a_1} \int_{-t/2}^{t/2} (\ddot{U}^{(1)} \delta U^{(1)} + \ddot{W}^{(1)} \delta W^{(1)}) dz dx,$$

$$\delta K^{(2)} = \rho \int_{-b}^{-l} \int_{-t/2}^{t/2} (\ddot{U}^{(2)} \delta U^{(2)} + \ddot{W}^{(2)} \delta W^{(2)}) dz dx,$$

$\delta A$  — вариация работы силы  $P$ , определяемая выражением

$$\delta A = P \delta w^{(1)}|_{x=a_1}, \quad (2.3)$$

$\rho$  — плотность материала стержня.

С учетом зависимостей (1.4)–(1.9) выражения (2.2) после нахождения определенных интегралов по переменной  $z$  можно привести к виду

$$\delta \Pi^{(0)} = \int_{-l}^0 (T_x^{(0)} \delta u_{,x}^{(0)} + T_z^{(0)} \delta w^{(0)} + N_{xz}^{(0)} \delta w_{,x}^{(0)} + T_{xz}^{(0)} \delta u^{(0)}) dx,$$

$$\delta \Pi^{(1)} = \int_0^{a_1} [T_x^{(1)} \delta u_{,x}^{(1)} + M_x^{(1)} \delta \gamma_{,x}^{(1)} + T_{xz}^{(1)} (\delta w_{,x}^{(1)} + \delta \gamma^{(1)})] dx,$$

$$\delta \Pi^{(2)} = \int_{-b}^{-l} [T_x^{(2)} \delta u_{,x}^{(2)} + M_x^{(2)} \delta \gamma_{,x}^{(2)} + T_{xz}^{(2)} (\delta w_{,x}^{(2)} + \delta \gamma^{(2)})] dx,$$

$$\delta K^{(0)} = \frac{4\rho t}{3} \int_{-l}^0 (\ddot{u}^{(0)} \delta u^{(0)} + \ddot{w}^{(0)} \delta w^{(0)}) dx,$$

$$\delta K^{(1)} = \rho t \int_0^{a_1} \left( \ddot{u}^{(1)} \delta u^{(1)} + \ddot{w}^{(1)} \delta w^{(1)} + \frac{t^2}{12} \ddot{\gamma}^{(1)} \delta \gamma^{(1)} \right) dx,$$

$$\delta K^{(2)} = \rho t \int_{-b}^{-l} \left( \ddot{u}^{(2)} \delta u^{(2)} + \ddot{w}^{(2)} \delta w^{(2)} + \frac{t^2}{12} \ddot{\gamma}^{(2)} \delta \gamma^{(2)} \right) dx,$$

где

$$T_x^{(0)} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x^{(0)} \left( 1 + \frac{2z}{t} \right) dz = \bar{E}_1 \left( \frac{4t}{3} u_{,x}^{(0)} + 2\nu_{31} w^{(0)} \right),$$

$$T_z^{(0)} = \int_{-t/2}^{t/2} \frac{2}{t} \sigma_z^{(0)} dz = \bar{E}_3 \left( \frac{4}{t} w^{(0)} + 2\nu_{31} u_{,x}^{(0)} \right),$$

$$N_{xz}^{(0)} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xz}^{(0)} \left( 1 + \frac{2z}{t} \right) dz = G_{13} \left( \frac{4t}{3} w_{,x}^{(0)} + 2u^{(0)} \right),$$

(2.5)

$$\begin{aligned}
T_{xz}^{(0)} &= \int_{-t/2}^{t/2} \frac{2}{t} \sigma_{xz}^{(0)} dz = 2G_{13} \left( w_{,x}^{(0)} + \frac{2}{t} u^{(0)} \right); \\
T_x^{(k)} &= B u_{,x}^{(k)}, \quad M_x^{(k)} = D \gamma_{,x}^{(k)}, \quad T_{xz}^{(k)} = B_{13} (w_{,x}^{(k)} + \gamma^{(k)}), \quad k = 1, 2, \\
B &= E_1 t, \quad B_{13} = G_{13} t, \quad D = E_1 t^3 / 12.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Подставляя затем соотношения (2.3), (2.4) в вариационное уравнение (2.1) и используя кинематические условия сопряжения (1.10), в силу независимости вариаций  $\delta u^{(j)}$ ,  $\delta w^{(j)}$  ( $j = 0, 1, 2$ ),  $\delta \gamma^{(1)}$ ,  $\delta \gamma^{(2)}$  и отличия их от нуля получаем уравнения движения закрепленного участка

$$T_{x,x}^{(0)} - T_{xz}^{(0)} - \frac{4\rho t}{3} \ddot{u}^{(0)} = 0, \quad N_{xz,x}^{(0)} - T_z^{(0)} - \frac{4\rho t}{3} \ddot{w}^{(0)} = 0, \quad -l \leq x \leq 0, \tag{2.7}$$

уравнения движения консолей стержня

$$\begin{aligned}
T_{,x}^{(1)} - \rho t \ddot{u}^{(1)} &= 0, \quad M_{,x}^{(1)} - T_{xz}^{(1)} - \frac{\rho t^3}{12} \ddot{\gamma}^{(1)} = 0, \\
T_{xz,x}^{(1)} - \rho t \ddot{w}^{(1)} &= 0, \quad 0 \leq x \leq a_1, \\
T_{,x}^{(2)} - \rho t \ddot{u}^{(2)} &= 0, \quad M_{,x}^{(2)} - T_{xz}^{(2)} - \frac{\rho t^3}{12} \ddot{\gamma}^{(2)} = 0, \\
T_{xz,x}^{(2)} - \rho t \ddot{w}^{(2)} &= 0, \quad -b \leq x \leq -l,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

а также граничные условия

$$\begin{aligned}
T_x^{(1)}|_{x=a_1} &= 0, \quad M_x^{(1)}|_{x=a_1} = 0, \quad T_{xz}^{(1)}|_{x=a_1} = P, \\
T_x^{(1)}|_{x=-b} &= 0, \quad M_x^{(2)}|_{x=-b} = 0, \quad T_{xz}^{(2)}|_{x=-b} = 0
\end{aligned} \tag{2.9}$$

и силовые условия сопряжения участков

$$\begin{aligned}
\left( T_x^{(0)} - T_x^{(1)} - \frac{2}{t} M_x^{(1)} \right) \Big|_{x=0} &= 0, \quad (N_{xz}^{(0)} - T_{xz}^{(1)}) \Big|_{x=0} = 0, \\
\left( T_x^{(0)} - T_x^{(2)} - \frac{2}{t} M_x^{(2)} \right) \Big|_{x=-l} &= 0, \quad (N_{xz}^{(0)} - T_{xz}^{(2)}) \Big|_{x=-l} = 0.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

### 3. Построение аналитического решения задачи о вынужденных колебаниях.

С использованием соотношений упругости (2.5), а также представлений

$$u^{(0)}(x, \tau) = \tilde{u}^{(0)}(x) e^{i\omega\tau}, \quad w^{(0)}(x, \tau) = \tilde{w}^{(0)}(x) e^{i\omega\tau} \tag{3.1}$$

уравнения (2.7) для закрепленного участка стержня можно привести к виду

$$\tilde{u}_{,xx}^{(0)} - \tilde{r}_0 \tilde{u}^{(0)} - \tilde{r}_1 \tilde{w}_{,x}^{(0)} = 0, \quad \tilde{w}_{,xx}^{(0)} - \tilde{r}_2 \tilde{w}^{(0)} - \tilde{r}_3 \tilde{u}_{,x}^{(0)} = 0, \tag{3.2}$$

где

$$\tilde{r}_0 = \frac{3G_{13}}{\bar{E}_1 t^2} - \frac{\rho \omega^2}{\bar{E}_1}, \quad \tilde{r}_1 = \frac{3}{2t} \left( \frac{G_{13}}{\bar{E}_1} - \nu_{31} \right), \quad \tilde{r}_2 = \frac{3\bar{E}_3}{G_{13} t^2} - \frac{\rho \omega^2}{G_{13}}, \quad \tilde{r}_3 = \frac{3}{2t} \left( \frac{\bar{E}_3 \nu_{13}}{G_{13}} - 1 \right).$$

Первое уравнение системы (3.2) тождественно удовлетворяется при введении разрешающей функции  $\Phi^{(0)}$  в виде

$$\tilde{u}^{(0)} = \Phi_{,x}^{(0)}, \quad \tilde{w}^{(0)} = -\frac{\tilde{r}_0}{\tilde{r}_1} \Phi^{(0)} + \frac{1}{\tilde{r}_1} \Phi_{,xx}^{(0)}, \tag{3.3}$$

а при подстановке зависимостей (3.3) во второе уравнение системы (3.2) получаем уравнение

$$\Phi_{,xxxx}^{(0)} - n_2 \Phi_{,xx}^{(0)} + n_0 \Phi^{(0)} = 0, \quad (3.4)$$

где

$$n_0 = \tilde{r}_0 \tilde{r}_2 = \left( \frac{3G_{13}}{\bar{E}_1 t^2} - \frac{\rho \omega^2}{\bar{E}_1} \right) \left( \frac{3\bar{E}_3}{G_{13} t^2} - \frac{\rho \omega^2}{G_{13}} \right),$$

$$n_2 = \tilde{r}_2 + \tilde{r}_0 + \tilde{r}_3 \tilde{r}_1 = \frac{3\bar{E}_3}{G_{13} t^2} + \frac{3G_{13}}{\bar{E}_1 t^2} + \frac{9}{4t^2} \left( \frac{G_{13}}{\bar{E}_1} - \nu_{31} \right) \left( \frac{\bar{E}_3 \nu_{31}}{G_{13}} - 1 \right) - \left( \frac{1}{\bar{E}_1} + \frac{1}{G_{13}} \right) \rho \omega^2.$$

Уравнение (3.4) имеет решение

$$\Phi^{(0)} = g_1^{(0)} e^{\lambda_1 x} + g_2^{(0)} e^{\lambda_2 x} + g_3^{(0)} e^{\lambda_3 x} + g_4^{(0)} e^{\lambda_4 x} = \sum_{j=1}^4 g_j^{(0)} e^{\lambda_j x}, \quad (3.5)$$

где  $g_j^{(0)}$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) — постоянные интегрирования;  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  — корни характеристического уравнения для (3.4):

$$\lambda_1 = (n_2/2 + \sqrt{n_2^2/4 - n_0})^{1/2}, \quad \lambda_2 = -(n_2/2 + \sqrt{n_2^2/4 - n_0})^{1/2},$$

$$\lambda_3 = (n_2/2 - \sqrt{n_2^2/4 - n_0})^{1/2}, \quad \lambda_4 = -(n_2/2 - \sqrt{n_2^2/4 - n_0})^{1/2}.$$

В соответствии с (3.3), (3.5) находим функции

$$\tilde{u}^{(0)} = \sum_{j=1}^4 g_j^{(0)} \lambda_j e^{\lambda_j x}, \quad \tilde{w}^{(0)} = \sum_{j=1}^4 \beta_j g_j^{(0)} e^{\lambda_j x}, \quad (3.6)$$

где

$$\beta_j = (-\tilde{r}_0 + \lambda_j^2)/\tilde{r}_1. \quad (3.7)$$

Уравнения (2.8) для консолей стержня с учетом соотношений (2.6) принимают вид

$$B u_{,xx}^{(k)} - \rho t \ddot{u}^{(k)} = 0; \quad (3.8)$$

$$D \gamma_{,xx}^{(k)} - B_{13} (w_{,x}^{(k)} + \gamma^{(k)}) - (\rho t^3/12) \ddot{\gamma}^{(k)} = 0, \quad (3.9)$$

$$B_{13} (w_{,xx}^{(k)} + \gamma_{,x}^{(k)}) - \rho t \ddot{w}^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2.$$

Введем разрешающие функции  $\Phi^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ) в соответствии с представлениями

$$w^{(k)} = \left( -1 + \frac{D}{B_{13}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Phi^{(k)}, \quad \gamma^{(k)} = \Phi_{,x}^{(k)}. \quad (3.10)$$

Тогда первое уравнение системы (3.9) при подстановке в него (3.10) и в пренебрежении слагаемым  $-(\rho t^3/12) \ddot{\gamma}^{(k)}$  удовлетворяется тождественно, а второе преобразуется к виду

$$D \Phi_{,xxxx}^{(k)} - (\rho t D / B_{13}) \Phi_{,xx}^{(k)} + \rho t \ddot{\Phi}^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (3.11)$$

Решения уравнений (3.8), (3.11) будем искать в виде

$$u^{(k)} = \tilde{u}^{(k)} e^{i\omega\tau}, \quad \Phi^{(k)} = \tilde{\Phi}^{(k)} e^{i\omega\tau}. \quad (3.12)$$



Введя обозначения

$$\Omega_u^2 = \frac{\rho\omega^2}{E_1}, \quad r = \frac{D}{B_{13}}, \quad \Omega_w^2 = \frac{\rho t\omega^2}{D},$$

представим (3.8), (3.11) в форме

$$\tilde{u}_{,xx}^{(k)} + \Omega_u^2 \tilde{u}^{(k)} = 0; \quad (3.13)$$

$$\tilde{\Phi}_{,xxxx}^{(k)} + \Omega_w^2 r \tilde{\Phi}_{,xx}^{(k)} - \Omega_w^2 \tilde{\Phi}^{(k)} = 0. \quad (3.14)$$

Полученные уравнения (3.13), (3.14) имеют решения

$$\tilde{u}^{(k)} = g_5^{(k)} \cos(\Omega_u x) + g_6^{(k)} \sin(\Omega_u x); \quad (3.15)$$

$$\tilde{\Phi}^{(k)} = g_1^{(k)} e^{r_1 x} + g_2^{(k)} e^{r_2 x} + g_3^{(k)} e^{r_3 x} + g_4^{(k)} e^{r_4 x} = \sum_{j=1}^4 g_j^{(k)} e^{r_j x}, \quad (3.16)$$

где  $g_1^{(k)}, \dots, g_6^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ) — постоянные интегрирования;  $r_1, r_2, r_3, r_4$  — корни характеристического уравнения для (3.14):

$$r_1 = (-\Omega_w^2 r/2 + \sqrt{\Omega_w^4 r^2/4 + \Omega_w^2})^{1/2}, \quad r_2 = -(-\Omega_w^2 r/2 + \sqrt{\Omega_w^4 r^2/4 + \Omega_w^2})^{1/2},$$

$$r_3 = (-\Omega_w^2 r/2 - \sqrt{\Omega_w^4 r^2/4 + \Omega_w^2})^{1/2}, \quad r_4 = -(-\Omega_w^2 r/2 - \sqrt{\Omega_w^4 r^2/4 + \Omega_w^2})^{1/2}.$$

При использовании представлений  $\gamma^{(k)} = \tilde{\gamma}^{(k)} e^{i\omega\tau}$ ,  $w^{(k)} = \tilde{w}^{(k)} e^{i\omega\tau}$  в соответствии с (3.10), (3.12), (3.16) получаем зависимости

$$\tilde{\gamma}^{(k)} = \sum_{j=1}^4 g_j^{(k)} r_j e^{r_j x}, \quad \tilde{w}^{(k)} = \sum_{j=1}^4 g_j^{(k)} (-1 + r r_j^2) e^{r_j x}. \quad (3.17)$$

Решения уравнений (3.17) будем искать в виде

$$M_x^{(k)} = \tilde{M}_x^{(k)} e^{i\omega\tau}, \quad T_x^{(k)} = \tilde{T}_x^{(k)} e^{i\omega\tau}, \quad T_{xz}^{(k)} = \tilde{T}_{xz}^{(k)} e^{i\omega\tau}, \quad k = 1, 2, \quad (3.18)$$

$$T_x^{(0)} = \tilde{T}_x^{(0)} e^{i\omega\tau}, \quad N_{xz}^{(0)} = \tilde{N}_{xz}^{(0)} e^{i\omega\tau},$$

где в соответствии с (2.5), (2.6), (3.6), (3.15), (3.17)

$$\tilde{M}_x^{(k)} = D \sum_{j=1}^4 g_j^{(k)} r_j^2 e^{r_j x}, \quad \tilde{T}_x^{(k)} = B\Omega_u [-g_5^{(k)} \sin(\Omega_u x) + g_6^{(k)} \cos(\Omega_u x)],$$

$$\tilde{T}_{xz}^{(k)} = B_{13} r \sum_{j=1}^4 g_j^{(k)} r_j^3 e^{r_j x}, \quad k = 1, 2, \quad (3.19)$$

$$\tilde{T}_x^{(0)} = E_1^* \sum_{j=1}^4 \left( \frac{4t}{3} \lambda_j^2 + 2\nu_{31} \beta_j \right) g_j^{(0)} e^{\lambda_j x}, \quad \tilde{N}_{xz}^{(0)} = G_{13} \sum_{j=1}^4 \left( \frac{4t}{3} \beta_j + 2 \right) g_j^{(0)} \lambda_j e^{\lambda_j x}.$$

Налагая на (3.18) условия (2.10), с учетом выражений (3.19) получаем четыре алгебраических уравнения

$$\bar{E}_1 \sum_{j=1}^4 \left( \frac{4t}{3} \lambda_j^2 + 2\nu_{31} \beta_j \right) g_j^{(0)} - B\Omega_u g_6^{(1)} - \frac{2}{t} D \sum_{j=1}^4 g_j^{(1)} r_j^2 = 0,$$

$$\begin{aligned}
& G_{13} \sum_{j=1}^4 \left( \frac{4t}{3} \beta_j + 2 \right) g_j^{(0)} \lambda_j - B_{13} r \sum_{j=1}^4 g_j^{(1)} r_j^3 = 0, \\
& \bar{E}_1 \sum_{j=1}^4 \left( \frac{4t}{3} \lambda_j^2 + 2\nu_{31} \beta_j \right) g_j^{(0)} e^{-\lambda_j l} - \\
& - B \Omega_u [-g_5^{(2)} \sin(-\Omega_u l) + g_6^{(2)} \cos(-\Omega_u l)] - \frac{2}{t} D \sum_{j=1}^4 g_j^{(2)} r_j^2 e^{-r_j l} = 0, \\
& G_{13} \sum_{j=1}^4 \left( \frac{4t}{3} \beta_j + 2 \right) g_j^{(0)} \lambda_j e^{-\lambda_j l} - B_{13} r \sum_{j=1}^4 g_j^{(2)} r_j^3 e^{-r_j l} = 0.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

С учетом схемы закрепления и нагружения стержня (см. рис. 2) к силовым условиям сопряжения участков (2.10) необходимо добавить шесть силовых граничных условий (2.9), которые с учетом (3.18), (3.19) добавляют к четырем уравнениям (3.20) еще шесть алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
& -g_5^{(1)} \sin(\Omega_u a_1) + g_6^{(1)} \cos(\Omega_u a_1) = 0, \quad \sum_{j=1}^4 g_j^{(1)} r_j^2 e^{r_j a_1} = 0, \\
& B_{13} r \sum_{j=1}^4 g_j^{(1)} r_j^3 e^{r_j a_1} = \tilde{P}, \quad -g_5^{(2)} \sin(-\Omega_u b) + g_6^{(2)} \cos(-\Omega_u b) = 0, \\
& \sum_{j=1}^4 g_j^{(2)} r_j^2 e^{-r_j b} = 0, \quad \sum_{j=1}^4 g_j^{(2)} r_j^3 e^{-r_j b} = 0.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Наконец, для определения 16 постоянных интегрирования  $g_5^{(k)}$ ,  $g_6^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ),  $g_j^{(q)}$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ;  $q = 0, 1, 2$ ) к 10 уравнениям (3.20), (3.21) добавляются еще шесть уравнений, полученных из (1.10) с использованием соотношений (3.6), (3.7), (3.15), (3.17):

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^4 g_j^{(0)} - g_5^{(1)} = 0, \quad \sum_{j=1}^4 \beta_j g_j^{(0)} - \sum_{j=1}^4 g_j^{(1)} (-1 + r r_j^2) = 0, \\
& \frac{2}{t} \sum_{j=1}^4 g_j^{(0)} \lambda_j - \sum_{j=1}^4 g_j^{(1)} r_j = 0, \\
& \sum_{j=1}^4 g_j^{(0)} \lambda_j e^{-\lambda_j l} - g_5^{(2)} \cos(-\Omega_u l) - g_6^{(2)} \sin(-\Omega_u l) = 0, \\
& \sum_{j=1}^4 \beta_j g_j^{(0)} e^{-\lambda_j l} - \sum_{j=1}^4 g_j^{(1)} (-1 + r r_j^2) e^{-r_j l} = 0, \\
& \frac{2}{t} \sum_{j=1}^4 g_j^{(0)} \lambda_j e^{-\lambda_j l} - \sum_{j=1}^4 g_j^{(2)} r_j e^{-r_j l} = 0.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Таблица 1

Механические характеристики материалов

Материал	$E_1$ , ГПа	$E_3$ , ГПа	$G_{13}$ , ГПа	$\nu_{13}$	$\delta_1$	$\delta_3$	$\delta_{13}$	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
Д16АТ	55,4	55,4	21,3	0,30	0,005	0,005	0,002	2770
Композит	100,0	5,7	1,0	0,34	0,050	0,050	0,100	1500

Полученные функции (3.6), (3.17) с учетом найденных из системы уравнений (3.20)–(3.22) постоянных интегрирования  $g_5^{(k)}$ ,  $g_6^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ),  $g_j^{(q)}$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ;  $q = 0, 1, 2$ ) и зависимостей (1.5), (1.6) полностью определяют напряженно-деформированное состояние закрепленного и незакрепленных участков рассматриваемого стержня (см. рис. 2).

Однако следует заметить, что разработанная методика решения задачи о вынужденных колебаниях стержня не учитывает демпфирующие свойства материала и поэтому позволяет получить корректное решение только при частотах, находящихся вдали от резонансной зоны, в то время как прохождение колебаний через закрепленный участок стержня обычно наблюдается в резонансных режимах нагружения, при которых демпфирующие свойства материала необходимо учитывать [19]. При использовании гармонического закона деформирования стержня можно получить корректное решение с помощью известной гипотезы комплексного внутреннего трения [20–22], заменяя модули упругости  $E_1$ ,  $E_3$ ,  $G_{13}$  материала их комплексными аналогами

$$E_1^* = E_1 + i \frac{E_1 \delta_1}{\pi}, \quad E_3^* = E_3 + i \frac{E_3 \delta_3}{\pi}, \quad G_{13}^* = G_{13} + i \frac{G_{13} \delta_{13}}{\pi},$$

где  $\delta_1$ ,  $\delta_3$ ,  $\delta_{13}$  — логарифмические декременты колебаний материала при растяжении-сжатии в направлениях осей  $Ox$ ,  $Oz$  и при сдвиге в плоскости  $Oxz$  соответственно.

**4. Численные эксперименты и обсуждение полученных результатов.** Исследовалось прохождение колебаний в ненагруженную консоль стержня-полосы через закрепленный участок конечной длины  $l$  при действии гармонической силы  $P = \tilde{P} e^{i\omega\tau}$  (см. рис. 2) с амплитудой  $\tilde{P}$  и круговой частотой  $\omega = \omega_1$  ( $\omega_1$  — низшая частота свободных колебаний стержня). Геометрические параметры стержня имели следующие значения:  $a_1 = 180$  мм,  $a_2 = b - l = 300$  мм (длина ненагруженной консоли),  $t = 2,9$  мм. Длина закрепленного участка варьировалась в диапазоне  $l = 25 \div 15$  мм. Амплитуда вынуждающей силы равна  $\tilde{P} = 2150$  Н/м (на единицу ширины стержня).

Рассматривались два материала: дюралюминий марки Д16АТ и однонаправленный волокнистый композит на основе углеродного волокна марки ЭЛУР-П и связующего ХТ-118. В табл. 1 приведены механические характеристики данных материалов. В качестве модулей  $E_1$ ,  $E_3$  дюралюминия в табл. 1 указаны динамические модули упругости, взятые из работы [23],  $G_{13} = E_1/[2(1 + \nu_{13})]$ .

В табл. 2 приведены низшие циклические частоты  $f_1 = \omega_1/(2\pi)$  колебаний дюралюминиевого стержня и амплитуды колебаний  $\tilde{w}^{(1)}(a_1)$ ,  $\tilde{w}^{(2)}(-b)$  концов нагруженной и ненагруженной консолей соответственно в зависимости от длины  $l$  закрепленного участка, полученные с учетом поперечного обжатия этого участка стержня. Для сравнения приведены значения  $f_1^*$ ,  $\tilde{w}^{(1)*}(a_1)$ ,  $\tilde{w}^{(2)*}(-b)$ , найденные без учета поперечного обжатия закрепленного участка с использованием методики, изложенной в работах [10, 12]. Частоты  $f_1^*$  определялись в результате модального анализа конечно-элементной модели стержня методом итераций в подпространстве [24] при моделировании стержня одномерными конечными элементами [11] в рамках модели Тимошенко. Влияние поперечного обжатия закрепленного участка стержня на прохождение колебаний в ненагруженную консоль оценивалось отношением  $k = \tilde{w}^{(2)}(-b)/\tilde{w}^{(2)*}(-b)$ .

Таблица 2

Низшие циклические частоты и амплитуды колебаний стержня из дюралюминия

$l$ , мм	С учетом поперечного обжатия			Без учета поперечного обжатия			$k$
	$f_1$ , Гц	$\tilde{w}^{(1)}(a_1)$ , мм	$\tilde{w}^{(2)}(-b)$ , мм	$f_1^*$ , Гц	$\tilde{w}^{(1)*}(a_1)$ , мм	$\tilde{w}^{(2)*}(-b)$ , мм	
25,0	23,145	43,146	-0,326	23,173	43,012	-0,111	2,937
22,5	23,145	43,146	-0,780	23,173	43,012	-0,281	2,776
20,0	23,145	43,146	-1,862	23,173	43,012	-0,708	2,630
17,5	23,145	43,146	-4,448	23,173	43,012	-1,787	2,489
15,0	23,145	43,146	-10,626	23,173	43,012	-4,510	2,356

Таблица 3

Низшие циклические частоты и амплитуды колебаний стержня из композитного материала

$l$ , мм	С учетом поперечного обжатия			Без учета поперечного обжатия			$k$
	$f_1$ , Гц	$\tilde{w}^{(1)}(a_1)$ , мм	$\tilde{w}^{(2)}(-b)$ , мм	$f_1^*$ , Гц	$\tilde{w}^{(1)*}(a_1)$ , мм	$\tilde{w}^{(2)*}(-b)$ , мм	
60	41,237	25,534	-11,586	41,286	25,479	-10,768	1,071
50	41,233	25,540	-21,052	41,282	25,483	-19,591	1,075
40	41,219	25,564	-38,396	41,269	25,497	-35,497	1,082

Частоты  $f_1$  с учетом поперечного обжатия закрепленного участка получены путем незначительного уменьшения соответствующих частот  $f_1^*$  до достижения максимального по модулю значения  $\tilde{w}^{(2)}(-b)$  (уменьшение значений  $f_1$  по сравнению с  $f_1^*$  обусловлено некоторым увеличением податливости закрепленного участка за счет учета его поперечного обжатия).

Из табл. 2 следует, что значения  $f_1$ ,  $\tilde{w}^{(1)}(a_1)$ ,  $f_1^*$  и  $\tilde{w}^{(1)*}(a_1)$  практически не зависят от длины  $l$  закрепленного участка стержня, а значения  $\tilde{w}^{(2)}(-b)$  и  $\tilde{w}^{(2)*}(-b)$  при уменьшении  $l$  по модулю существенно увеличиваются. При этом амплитуды прогибов  $\tilde{w}^{(2)}(-b)$  по модулю значительно (более чем в два раза) превышают соответствующие амплитуды  $\tilde{w}^{(2)*}(-b)$ , что свидетельствует о более существенном увеличении амплитуды колебаний, проходящих в ненагруженную консоль, при учете поперечного обжатия закрепленного участка стержня.

В табл. 3 приведены значения тех же величин, что и в табл. 2, полученные для композитного стержня при  $l = 60 \div 40$  мм. Из табл. 3 следует, что при уменьшении длины закрепленного участка от значения  $l = 60$  мм до значения  $l = 40$  мм частоты  $f_1$ ,  $f_1^*$  и амплитуды  $\tilde{w}^{(1)}(a_1)$ ,  $\tilde{w}^{(1)*}(a_1)$  практически не меняются, а амплитуды колебаний  $\tilde{w}^{(2)}(-b)$  и  $\tilde{w}^{(2)*}(-b)$  по модулю значительно увеличиваются и превышают соответствующие значения для дюралюминиевого стержня (см. табл. 2). Этот результат можно объяснить достаточно малым значением модуля сдвига  $G_{13}$  для однонаправленного волокнистого композита, что приводит к увеличению податливости закрепленного участка стержня при действии сдвиговых напряжений  $\sigma_{xz}^{(0)}$ . Однако влияние поперечного обжатия закрепленного участка композитного стержня на прохождение колебаний в ненагруженную консоль, оцениваемое, как и выше, отношением  $k = \tilde{w}^{(2)}(-b)/\tilde{w}^{(2)*}(-b)$ , оказывается незначительным.

На рис. 3, 4 приведены амплитуды нормальных напряжений  $\tilde{\sigma}_x^{(0)}$ ,  $\tilde{\sigma}_x^{(1)}$ ,  $\tilde{\sigma}_x^{(2)}$  на поверхности  $z = t/2$  и амплитуды касательных напряжений  $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$ ,  $\tilde{\sigma}_{xz}^{(1)}$ ,  $\tilde{\sigma}_{xz}^{(2)}$  ( $\tilde{\sigma}_{xz}^{(1)}$ ,  $\tilde{\sigma}_{xz}^{(2)}$  не зависят от  $z$ , а  $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$  зависит от  $z$  и получена при  $z = t/2$ ) на участках 0, 1, 2 дюралюминиевого стержня, найденные при  $l = 20$  мм с учетом и без учета поперечного обжатия закреп-

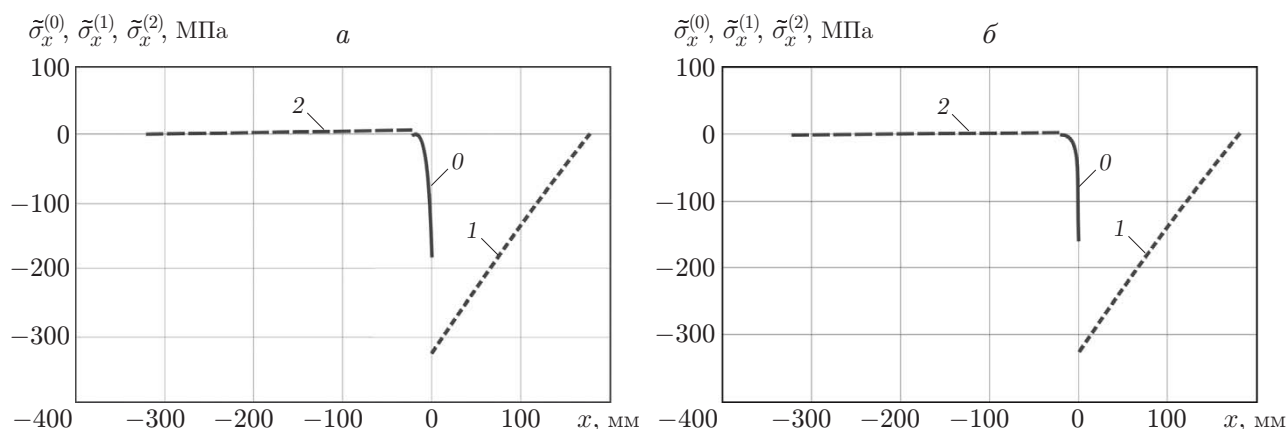


Рис. 3. Амплитуды нормальных напряжений  $\tilde{\sigma}_x^{(0)}$ ,  $\tilde{\sigma}_x^{(1)}$ ,  $\tilde{\sigma}_x^{(2)}$  на поверхности  $z = t/2$  с учетом (а) и без учета (б) поперечного обжатия закрепленного участка дюралюминиевого стержня при  $l = 20$  мм:

0 —  $\tilde{\sigma}_x^{(0)}$ , 1 —  $\tilde{\sigma}_x^{(1)}$ , 2 —  $\tilde{\sigma}_x^{(2)}$

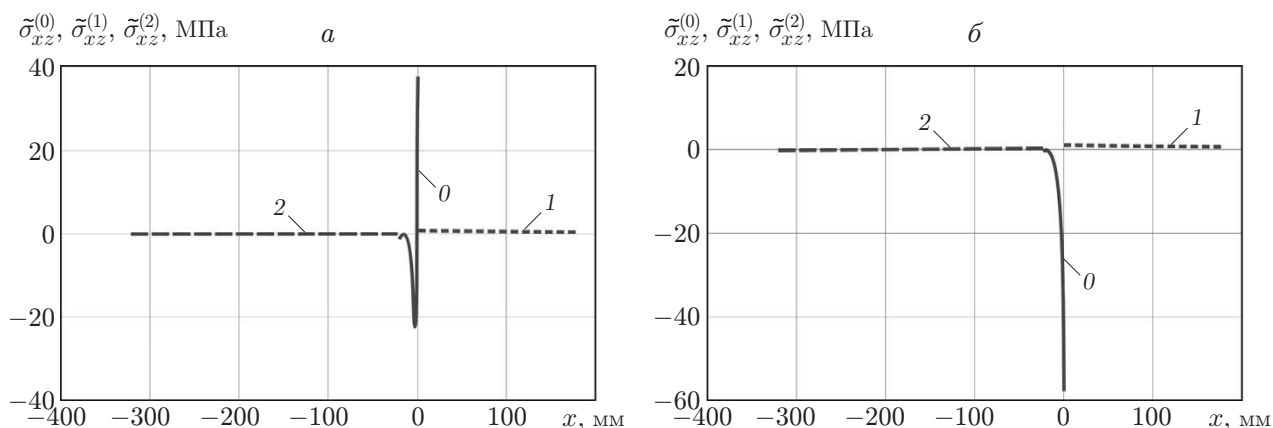


Рис. 4. Амплитуды касательных напряжений  $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$ ,  $\tilde{\sigma}_{xz}^{(1)}$ ,  $\tilde{\sigma}_{xz}^{(2)}$  с учетом (а) и без учета (б) поперечного обжатия закрепленного участка дюралюминиевого стержня при  $l = 20$  мм:

0 —  $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$ , 1 —  $\tilde{\sigma}_{xz}^{(1)}$ , 2 —  $\tilde{\sigma}_{xz}^{(2)}$

ленного участка. На рис. 5, 6 приведены амплитуды тех же напряжений в композитном стержне при  $l = 50$  мм, найденные с учетом и без учета поперечного обжатия указанного участка стержня.

Из рис. 3, 4 следует, что при переходе через границу между нагруженной консолью и закрепленным участком конечной длины наблюдаются значительное изменение параметров напряженно-деформированного состояния дюралюминиевого стержня и локализация напряжений вблизи сечения  $x = 0$  закрепленного участка. При этом амплитуды напряжений  $\tilde{\sigma}_x^{(1)}$  в сечении  $x = 0$ , полученные с учетом поперечного обжатия закрепленного участка стержня (см. рис. 3, а), практически совпадают с амплитудами соответствующих напряжений, найденных без учета поперечного обжатия указанного участка стержня (см. рис. 3, б), а амплитуды напряжений  $\tilde{\sigma}_x^{(0)}$  в том же сечении с учетом поперечного обжатия (см. рис. 3, а) по модулю приблизительно на 12 % больше амплитуд, найденных без учета поперечного обжатия (см. рис. 3, б). Распределения амплитуд касательных напряже-

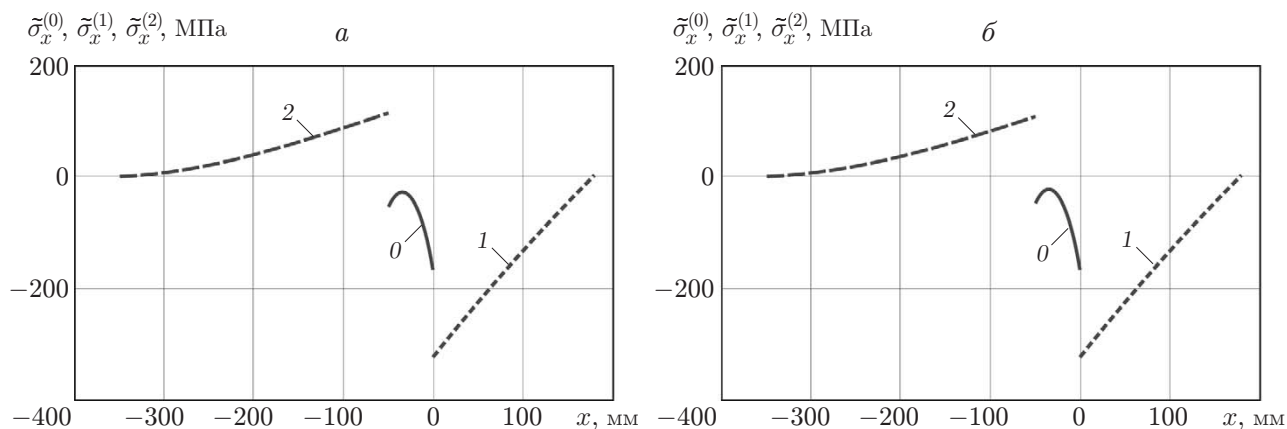


Рис. 5. Амплитуды нормальных напряжений  $\tilde{\sigma}_x^{(0)}$ ,  $\tilde{\sigma}_x^{(1)}$ ,  $\tilde{\sigma}_x^{(2)}$  на поверхности  $z = t/2$  с учетом (а) и без учета (б) поперечного обжатия закрепленного участка композитного стержня при  $l = 50$  мм:

0 —  $\tilde{\sigma}_x^{(0)}$ , 1 —  $\tilde{\sigma}_x^{(1)}$ , 2 —  $\tilde{\sigma}_x^{(2)}$

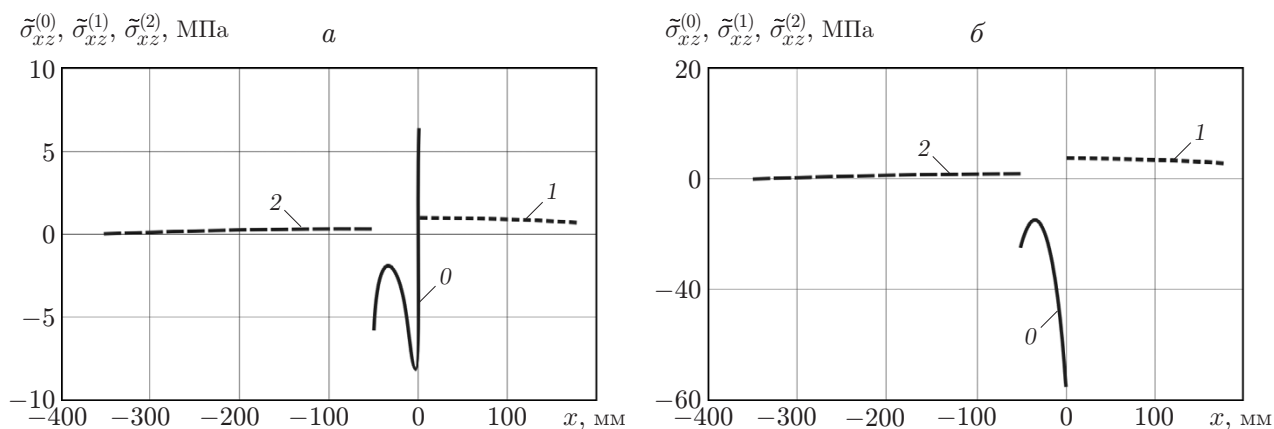


Рис. 6. Амплитуды касательных напряжений  $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$ ,  $\tilde{\sigma}_{xz}^{(1)}$ ,  $\tilde{\sigma}_{xz}^{(2)}$  с учетом (а) и без учета (б) поперечного обжатия закрепленного участка композитного стержня при  $l = 50$  мм:

0 —  $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$ , 1 —  $\tilde{\sigma}_{xz}^{(1)}$ , 2 —  $\tilde{\sigma}_{xz}^{(2)}$

ний  $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$  по длине закрепленного участка с учетом (см. рис. 4, а) и без учета (см. рис. 4, б) его поперечного обжатия количественно и качественно существенно различаются.

Для композитного стержня амплитуды нормальных напряжений  $\tilde{\sigma}_x^{(0)}$ ,  $\tilde{\sigma}_x^{(1)}$ ,  $\tilde{\sigma}_x^{(2)}$ , полученные с учетом поперечного обжатия закрепленного участка (см. рис. 5, а), практически совпадают с соответствующими амплитудами напряжений без учета поперечного обжатия (см. рис. 5, б). При этом амплитуды напряжений  $\tilde{\sigma}_x^{(2)}$  одного порядка с амплитудами  $\tilde{\sigma}_x^{(1)}$ , что соответствует прохождению колебаний в ненагруженную консоль стержня (см. табл. 3). Распределения амплитуд касательных напряжений  $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$  в композитном стержне с учетом (см. рис. 6, а) и без учета (см. рис. 6, б) поперечного обжатия закрепленного участка, так же как и в дюралюминиевом стержне, количественно и качественно существенно различаются. При этом значение  $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$  в сечении  $x = 0$ , полученное без учета поперечного обжатия закрепленного участка (см. рис. 6, б), по модулю приблизительно

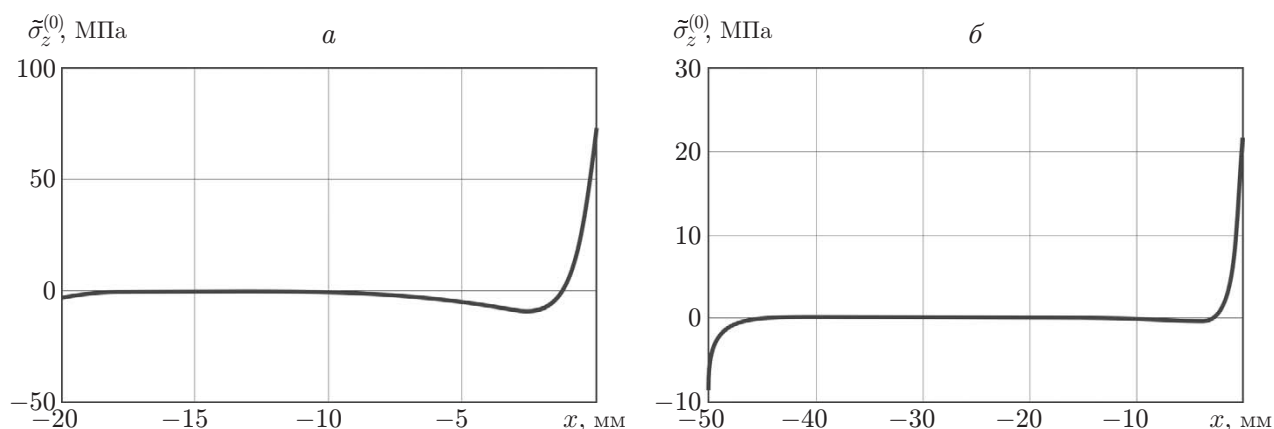


Рис. 7. Амплитуды нормальных напряжений  $\tilde{\sigma}_z^{(0)}$  на оси  $Ox$  закрепленного участка конечной длины  $l$  дюралюминиевого ( $l = 20$  мм) (а) и композитного ( $l = 50$  мм) (б) стержней

в 10 раз превышает амплитуду  $\tilde{\sigma}_{xz}^{(1)}$  в том же сечении нагруженной консоли. При учете поперечного обжатия закрепленного участка максимальное по модулю значение  $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$  достигается на незначительном расстоянии от сечения  $x = 0$  (см. рис. 6, а) и превышает значение  $\tilde{\sigma}_{xz}^{(1)}$  приблизительно в восемь раз. В обоих случаях (с учетом и без учета поперечного обжатия закрепленного участка) наблюдается существенное изменение параметров напряженно-деформированного состояния при переходе колебаний через границы  $x = 0$  и  $x = -l$  закрепленного участка стержня (см. рис. 6).

На рис. 7 приведены амплитуды нормальных напряжений  $\tilde{\sigma}_z^{(0)}$  на оси  $Ox$  закрепленного участка конечной длины  $l$  дюралюминиевого и композитного стержней, обусловленные поперечным обжатием данного участка. Полученные результаты для амплитуд напряжений  $\tilde{\sigma}_z^{(0)}$  соответствуют имеющимся представлениям о характере распределения их по длине закрепленных участков рассматриваемых дюралюминиевого и композитного стержней.

**Заключение.** В работе построены основные соотношения, описывающие процесс деформирования стержня-полосы с двумя консолями и закрепленным участком конечной длины на поверхности  $z = -t/2$  на основе сдвиговой модели Тимошенко с учетом поперечного обжатия закрепленного участка стержня. Сформулированы условия кинематического сопряжения участков стержня. На основе вариационного принципа Гамильтона — Остроградского построены уравнения движения закрепленного участка и консолей стержня, сформулированы граничные условия для консолей стержня и силовые условия сопряжения их с закрепленным участком конечной длины. Получены точные аналитические решения построенных уравнений движения при воздействии гармонической поперечной силы на конце одной из консолей стержня.

Проведены численные эксперименты, в которых исследовалось прохождение колебаний через закрепленный участок конечной длины при резонансе на низшей частоте  $\omega_1$  в стержнях, выполненных из дюралюминия Д16АТ и однонаправленного волокнистого композита на основе углеродного волокна марки ЭЛУР-П и связующего ХТ-118, при различной длине закрепленного участка с учетом и без учета его поперечного обжатия. Обнаружено незначительное уменьшение частоты  $\omega_1$  и существенное (более чем в два раза) увеличение амплитуды колебаний конца ненагруженной консоли дюралюминиевого стержня за счет учета поперечного обжатия закрепленного участка. Для композитного стержня уве-

личение амплитуды колебаний ненагруженной консоли оказалось незначительным (7–8 % в зависимости от длины закрепленного участка).

Полученные результаты могут быть использованы при постановке соответствующих задач механики плоских стержней с закрепленными участками конечной длины с помощью уточненных моделей деформирования, учитывающих поперечное обжатие.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **ASTM E756-05**: Standard test method for measuring vibration-damping properties of materials. S. 1.: ASTM Intern., 2017.
2. **Paimushin V. N., Firsov V. A., Gynal I., Shishkin V. M.** Theoretical-experimental method for evaluating the elastic and damping characteristics of soft materials based on studying the resonance flexural vibrations of test specimens // *Mech. Composite Materials*. 2016. V. 52, N 5. P. 571–582.
3. **Paimushin V. N., Firsov V. A., Shishkin V. M.** Identification of the dynamic elasticity characteristics and damping properties of the OT-4 titanium alloy based on study of damping flexural vibrations of the test specimens // *J. Machinery Manufacture Reliability*. 2019. V. 48, N 2. P. 119–129.
4. **Алгазин С. Д., Селиванов И. А.** Задача о собственных колебаниях прямоугольной пластины со смешанными краевыми условиями // *ПМТФ*. 2021. Т. 62, № 2. С. 70–76.
5. **Алгарай А. Ф. А., Джун Х., Махди И.-Э. М.** Влияние краевых условий на безразмерные собственные частоты перекрестно армированной слоистой композитной балки // *ПМТФ*. 2017. Т. 58, № 6. С. 177–185.
6. **Крылова Е. Ю., Папкова И. В., Ерофеев Н. П. и др.** Сложные колебания гибких пластин под действием продольных нагрузок с учетом белого шума // *ПМТФ*. 2016. Т. 57, № 4. С. 163–169.
7. **Ходжаев Д. А., Эшматов Б. Х.** Нелинейные колебания вязкоупругой пластины с сосредоточенными массами // *ПМТФ*. 2007. Т. 48, № 6. С. 158–169.
8. **Алгазин С. Д.** Численное исследование свободных колебаний балки с осцилляторами // *ПМТФ*. 2006. Т. 47, № 4. С. 135–144.
9. **Paimushin V. N., Firsov V. A., Shishkin V. M., Gazizullin R. K.** Vibration transmission in thin-wall framed structures // *Russ. Aeronaut.* 2022. V. 65, N 3. P. 490–497.
10. **Паймушин В. Н., Фирсов В. А., Шишкин В. М.** Математическое моделирование распространения вибраций в тонкостенных каркасированных конструкциях. 1. Основные соотношения и решение характерных задач // *Пробл. прочности и пластичности*. 2022. Т. 84, № 2. С. 207–224.
11. **Паймушин В. Н., Фирсов В. А., Шишкин В. М.** Математическое моделирование распространения вибраций в тонкостенных каркасированных конструкциях. 2. Конечн-элементные модели и численные эксперименты // *Пробл. прочности и пластичности*. 2022. Т. 84, № 3. С. 311–330.
12. **Paimushin V. N., Shishkin V. M., Firsov V. A., Gazizullin R. K.** Transforming deformation model of flat beams with finite length fastening areas located on one of the front-face surfaces // *Deformation and destruction of materials and structures under quasi-static and impulse loading*. Cham: Springer, 2023. P. 185–200. (*Advanced Structured Materials*; V. 186).
13. **Паймушин В. Н., Шишкин В. М.** Деформирование тонкостенных элементов конструкций, на граничных лицевых поверхностях которых имеются закрепленные участки // *ПМТФ*. 2023. Т. 64, № 2. С. 155–173.



14. **Галимов К. З.** Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975.
15. **Рикардс Р. Б.** Устойчивость оболочек из композитных материалов / Р. Б. Рикардс, Г. А. Терс. Рига: Зинатне, 1974.
16. **Галимов К. З.** Теория оболочек с учетом поперечного сдвига / К. З. Галимов, Ю. П. Артюхин, С. Н. Карасев и др. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977.
17. **Паймушин В. Н.** Вариант нелинейной теории тонких оболочек типа Тимошенко // Прикл. механика. 1986. Т. 22, № 8. С. 50–57.
18. **Паймушин В. Н.** Соотношения теории тонких оболочек типа теории Тимошенко при произвольных перемещениях и деформациях // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 5. С. 135–149.
19. **Цейтлин А. И.** Об учете внутреннего трения в нормативных документах по динамическому расчету сооружений // Строит. механика и расчет сооружений. 1981. № 4. С. 33–38.
20. **Сорокин Е. С.** К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Госстройиздат, 1960.
21. **Василенко Н. В.** Учет несовершенной упругости материала при механических колебаниях методом комплексных модулей // Рассеяние энергии при колебаниях механических систем. Киев: Наук. думка, 1974. С. 5–12.
22. **Рикардс Р. Б., Барканов Е. Н.** Определение динамических характеристик вибропоглощающих покрытий методом конечных элементов // Механика композит. материалов. 1991. № 5. С. 823–830.
23. **Паймушин В. Н., Фирсов В. А., Гюнал И., Шишкин В. М.** Учет зависящего от частоты динамического модуля упругости дюралюминия в задачах деформирования // ПМТФ. 2017. Т. 58, № 3. С. 163–177.
24. **Бате К.** Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате, Е. Вильсон. М.: Стройиздат, 1982.

*Поступила в редакцию 17/V 2023 г.,  
после доработки — 14/VIII 2023 г.  
Принята к публикации 1/IX 2023 г.*

---