ми для инженерных расчетов в указанном интервале изменения параметра подобия. Заметим, что приближенные замкнутые решения можно также получить методом синтеза [14] напряженного состояния оболочек.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Даревский В. М.** Оболочки под действием локальных нагрузок // Прочность, устойчивость, колебания.— М.: Машиностроение, 1968.
2. **Нерубайло Б. В.** Локальные задачи прочности цилиндрических оболочек.— М.: Машиностроение, 1983.
3. **Лукасевич С.** Локальные нагрузки в пластинах и оболочках.— М.: Мир, 1982.
4. **Шевляков Ю. А., Шевченко В. П.** Местные напряжения в цилиндрической оболочке в окрестности сосредоточенных воздействий // Гидроаэромеханика и теория упругости.— Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1967.— Вып. 6.
5. **Величко П. М., Шевляков Ю. А., Шевченко В. П.** Напряженно-деформированное состояние пластин и оболочек при сосредоточенных нагрузках // Тр. VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин.— М.: Наука, 1970.
6. **Величко П. М.** Действие локальной нагрузки, распределенной по круговым областям, на оболочку положительной кривизны // Теоретическая и прикладная механика.— Киев; Донецк: Вища шк., 1975.— Вып. 6.
7. **Величко П. М., Хижняк В. К., Шевченко В. П.** Местные напряжения в оболочках положительной, нулевой и отрицательной кривизны // Тр. X Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин.— Тбилиси: Мецниерба, 1975.— Т. 1.
8. **Ольшанский В. П.** Местные напряжения в оболочке двоякой кривизны, нагруженной по кругу // Изв. вузов. Стр-во и архитектура.— 1979.— № 1.
9. **Гольденвейзер А. Л.** Теория упругих тонких оболочек.— М.: Наука, 1976.
10. **Гольденвейзер А. Л.** К вопросу о расчете оболочек на сосредоточенные силы // ПММ.— 1954.— Вып. 2.
11. **Чернышев Г. Н.** О контактных задачах в теории оболочек // Тр. VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин.— М.: Наука, 1970.
12. **Градштейн И. М., Рыжик И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Наука, 1971.
13. **Таблицы** функций Кельвина/Под ред. К. А. Карпова.— М.: ВЦ АН СССР, 1966.
14. **Образцов И. Ф., Нерубайло Б. В.** О методах синтеза напряженного состояния в теории оболочек // ДАН СССР.— 1983.— № 1.


*Поступила 26/V 1987 г.*

---

УДК 539.3

# О СОЧЕТАНИИ МЕТОДОВ РЭЛЕЯ И ДИНАМИЧЕСКОГО КРАЕВОГО ЭФФЕКТА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН

*Г. А. Крижевский*

*(Днепропетровск)*

Метод динамического краевого эффекта (МДКЭ), предложенный В. В. Болотиным, нашел широкое применение при решении задач о собственных колебаниях упругих прямоугольных пластин, а также состоящих из них конструкций [1]. Предназначенный, вообще говоря, для поиска высоких собственных частот и форм при кинематических граничных условиях метод дает хорошие результаты и для низших форм колебаний [2]. При наличии статических условий на контуре точность определения низших собственных значений уменьшается [3]. Погрешность МДКЭ связана с тем, что построенное с его помощью решение не удовлетворяет исходной задаче в окрестности границ. Один из возможных путей уточнения метода — построение угловых погранслоев [4], другой — сочетание асимптотического метода с вариационными. Соединению МДКЭ с методом Рэлея — Ритца посвящена работа [5], однако там рассматривался лишь случай кинематических граничных условий, поэтому проверить эффективность подхода затруднительно. Полученные в [5] формулы для собственных частот применимы только для квадратной защемленной по всем краям пластины. Особый интерес при таком сочетании представляет оценка первого приближения (формула Рэлея), поскольку в этом случае возможно получить выражение для собственной частоты в замкнутом виде.

В настоящей работе сочетанием методов Рэлея и МДКЭ получено асимптотическое выражение для частоты собственных колебаний, пригодное для произвольных неизменных вдоль прямолинейного края условий на границе, исследована эффективность подобного подхода.

Рассмотрим колебания упругой прямоугольной ($0 \leqslant x_1 \leqslant a_1$, $0 \leqslant x_2 \leqslant a_2$) пластины. Выражение для параметра частоты $\lambda$, согласно Рэлею, имеет вид

$$\lambda = a_1 a_2 \left[ \left( \rho h / D \right) \int\limits_0^{a_1} \int\limits_0^{a_2} \left( w_{,11}^2 + w_{,22}^2 + 2\nu w_{,11} w_{,22} + \right.\right. \tag{1}$$

$$\left.\left. + 2(1-\nu) w_{,12}^2 \right) dx_1 dx_2 \Big/ \left( \int\limits_0^{a_1} \int\limits_0^{a_2} w^2 dx_1 dx_2 \right) \right]^{1/2}.$$

Здесь $\lambda = \omega a_1 a_2 (\rho h/D)^{1/2}$; $w$ — нормальный прогиб; $\nu$ — коэффициент Пуассона; $\omega$ — собственная частота; $h$ — толщина; $\rho$ — плотность материала; $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$; $E$ — модуль Юнга.

Выражение для функции прогиба, полученное с помощью МДКЭ [1], запишем как

$$f(x_1, x_2) = S_1(x_1) \sin(\beta_1 x_2 + l_2) + S_2(x_2) \sin(\beta_1 x_1 + l_1); \tag{2}$$

$$S_i(x_i) = \sin(\beta_i x_i + l_i) + C_{i1} \exp(\alpha_i x_i) + C_{12} \exp(-\alpha_i x_i) \quad (i = 1, 2). \tag{3}$$

Примем выражение для прогиба $w(x_1, x_2)$ в виде

$$w(x_1, x_2) = S_1(x_1) S_2(x_2). \tag{4}$$

Из (1), (3), (4) следует формула для параметра частоты, справедливая при произвольных условиях на краях:

$$\lambda = a_1 a_2 \{ (\rho h/D) [K_1 + K_2 - 2\nu K_3 + 2(1-\nu) K_4] / K_0 \}^{1/2}. \tag{5}$$

Здесь $K_0 = (\mathbf{A}_1 \xi) \cdot (\mathbf{A}_2 \xi)$; $K_1 = (\mathbf{A}_1 \eta_1)(\mathbf{A}_2 \xi)$; $K_2 = (\mathbf{A}_1 \xi)(\mathbf{A}_2 \eta_2)$; $K_3 = (\mathbf{A}_1 \varkappa_1)(\mathbf{A}_2 \varkappa_2)$; $K_4 = (\mathbf{B}_1 \theta_1)(\mathbf{B}_2 \theta_2)$. Компоненты векторов следующие:

$$\xi = \{1; 2; 1\}, \quad \eta_j = \{\beta_j^4; -2\alpha_j^2 \beta_j^2; \alpha_j^4\},$$

$$\varkappa_j = \{-\beta_j^2; \alpha_j^2 - \beta_j^2; \alpha_j^2\}, \quad \theta_j = \{\beta_j^2; 2\alpha_j \beta_j; \alpha_j^2\},$$

$$\mathbf{A}_j = \{A_{1j}; A_{2j}; A_{3j}\}, \ \mathbf{B}_j = \{A_{4j}; A_{5j}; A_{6j}\} \quad (j = 1, 2).$$

Координаты $A_{ij}$ находятся по формулам

$$A_{1j} = \{ z/2 - [\sin 2(\beta_j z + l_j)]/(4\beta_j) \} \big|_0^{a_j},$$

$$A_{2j} = \{ (\alpha_j^2 + \beta_j^2)^{-1} [\alpha_j F_{4j} F_{1j} - \beta_j F_{3j} F_{2j}] \} \big|_0^{a_j},$$

$$A_{3j} = \{ F_{5j}/(2\alpha_j) + 2C_{j1} C_{j2} z \} \big|_0^{a_j},$$

$$A_{4j} = \{ z/2 + [\sin 2(\beta_j z + l_j)]/(4\beta_j) \} \big|_0^{a_j},$$

$$A_{5j} = \{ (\alpha_j^2 + \beta_j^2)^{-1} [\alpha_j F_{3j} F_{2j} + \beta_j F_{4j} F_{1j}] \} \big|_0^{a_j},$$

$$A_{6j} = \{ F_{5j}/(2\alpha_j) - 2C_{j1} C_{j2} z \} \big|_0^{a_j} \quad (j = 1, 2),$$

где $F_{1j} = \sin(\beta_j z + l_j)$; $F_{2j} = \cos(\beta_j z + l_j)$; $F_{3j} = C_{j1} \exp(\alpha_j z) + C_{j2} \exp(-\alpha_j z)$; $F_{4j} = C_{j1} \exp(\alpha_j z) - C_{j2} \exp(-\alpha_j z)$; $F_{5j} = C_{j1}^2 \times \exp(2\alpha_j z) - C_{j2}^2 \exp(-2\alpha_j z)$ $(j = 1, 2)$.

Применим вышеизложенный алгоритм к нахождению собственных частот квадратной пластины с контуром, свободным от усилий. Система трансцендентных уравнений для поиска неизвестных волновых чисел в этом случае имеет вид [4] $\beta_j a_j = 2L_j + m_j \pi$ при $L_j = \operatorname{arctg} \{ (\beta_j/\alpha_j) [\beta_j^2 + (2-\nu)\beta_k^2]^2 / (\beta_j^2 + \nu\beta_k^2)^2 \}$ $(j = 1, 2, \ k = 1, 2, \ j \neq k, \ m_j = 0, 1, 2, \ldots)$. Постоянные $\alpha_j = (\beta_j^2 + 2\beta_k^2)^{1/2}$ $(j = 1, 2, \ k = 1, 2, \ j \neq k)$. Через волновые числа из граничных условий однозначно определяются константы $l_i$ и $C_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ в формуле (3), а следовательно, и функции $S_1(x_1)$, $S_2(x_2)$ [1].

Результаты вычисления безразмерной частоты $\lambda$ изложенным выше методом Рэлея — Болотина (МРБ), методом рядов (МР) [6] и традицион-

| λ по МРБ | Расхождение с МР, % | λ по МР [6] | λ по МДКЭ | Расхождение с МР, % | λ по МРБ | Расхождение с МР, % | λ по МР [6] | λ по МДКЭ | Расхождение с МР, % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13,97 | 3.6 | 13,47 | 11,31 | 19,1 | 64,71 | 1,6 | 63,69 | 60,93 | 4,5 |
| 22,21 | 3,5 | 21,98 | 22,21 | 3,5 | 74,46 | 1,3 | 73,51 | 71,86 | 2,3 |
| 35,95 | 3,2 | 34,81 | 33,01 | 5,4 | 106,99 | 1,4 | 105,31 | 103,31 | 2,1 |

ным МДКЭ приведены в таблице (при $\nu = 0{,}3$). Необходимо отметить, что в решении, полученном МР [6], в рядах удерживалось по шесть членов, поэтому результат вычисления основного тона обладает, по-видимому, высокой точностью.

Сравнение показывает, что настоящая методика позволяет существенно уточнить результат, найденный методом Болотина для первой частоты. Применение МРБ и МДКЭ, дающих соответственно верхнюю и нижнюю оценки для собственных значений, для высших форм позволяет получать достаточно узкие границы промежутка, в котором находятся собственные частоты. С ростом номера формы оба решения асимптотически приближаются к точному.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Болотин В. В.** Случайные колебания упругих систем.— М.: Наука, 1979.
2. **Болотин В. В., Макаров Б. П. и др.** Асимптотический метод исследования спектр собственных частот упругих пластинок // Расчеты на прочность.— 1960.— Вып. 6.
3. **Кудрявцев Е. П.** Применение асимптотического метода для исследования собственных колебаний упругих прямоугольных пластин // Расчеты на прочность.— 1964.— Вып. 10.
4. **Корнев В. М., Мулькибаев А. О.** Асимптотические свойства колебаний защемленной прямоугольной пластины. Формулировка укороченной задачи // ПМТФ.— 1987.— № 2.
5. **Vijayakumar K., Ramaiah G. K.** Analysis of vibration of clamped square plates by the Rayliegh — Ritz method with asymptotic solution from a modified Bolotin method // J. Sound Vibr.— 1978.— V. 56, N 71.
6. **Гонткевич В. С.** Собственные колебания пластинок и оболочек.— Киев: Наук. думка.— 1964.


*Поступила 12/X 1987 г.*

---

УДК 624.131+539.215

# РЕЗУЛЬТАТЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ДИАГРАММ СЖАТИЯ ДЛЯ ПЕСЧАНЫХ ГРУНТОВ И ГЛИНЫ

*Г. В. Рыков*

*(Москва)*

В [1, 2] описан метод определения предельных динамических диаграмм сжатия, соответствующих мгновенному нагружению ($\dot{\varepsilon} = \infty$), для грунтов и пористых сред, чувствительных к скорости деформирования. Метод основан на связи скоростей распространения слабых возмущений с предельной динамической диаграммой $\varphi(\varepsilon)$ при сжатии вязкопластической среды. Однако фактические данные по определению диаграмм $\varphi(\varepsilon)$ в [1, 2] получены только для воздушно-сухого песчаного грунта. Ниже приводятся результаты экспериментальных исследований по определению таких диаграмм для песчаных грунтов различной влажности, а также для плотных глин.

Предполагается аналогично [1, 2], что основные свойства песчаных и глинистых грунтов при кратковременных динамических нагрузках с достаточной точностью описываются при одноосном сжатии (в условиях