Интересно отметить, что, несмотря на то что K_s — константы, эффективные значения K^* во всех моделях проявляют некоторую зависимость от деформированного состояния композиционного материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сараев Л. А.** К теории идеальной пластичности многокомпонентных смесей // ПМТФ.— 1984.—№ 6.
2. **Сараев Л. А.** Эффективные свойства многокомпонентных упругопластических композиционных материалов // ПММ.— 1986.— Т. 50, вып. 4.
3. **Толоконников Л. А., Архипов И. К.** Корреляционная теория малых упругопластических деформаций композиционных материалов // Прикладные проблемы прочности и пластичности.— Горький, 1979.— Вып. 11.
4. **Архипов И. К., Толоконников Л. А.** Эффективные соотношения между напряжениями и деформациями в корреляционной теории упругопластических деформаций // Изв. АН СССР. МТТ.— 1984.— № 2.
5. **Шермергор Т. Д.** Теория упругости микронеоднородных сред.— М.: Наука, 1977.
6. **Кристенсен Р.** Введение в механику композитов.— М.: Мир, 1982.
7. **Хорошун Л. П.** К теории насыщенных пористых сред // ПМ.— 1976.— Т. 12, № 4.
8. **Крок Р.** Неорганические порошковые композиции // Современные композиционные материалы.— М.: Мир, 1970.
9. **Мартынова И. Ф., Скороход В. В.** Уплотнение пористого металла при объемном пластическом деформировании в отсутствие деформационного упрочнения // Порошковая металлургия.— 1976.— № 5.
10. **Радомысельский И. Д., Титаренко С. В., Щербань И. И.** Влияние второго компонента на прессуемость металлических смесей // Теория и практика прессования порошков.— Киев: Ин-т проблем материаловедения АН УССР, 1975.
11. **Писаренко Г. С., Трощенко В. Т., Красовский А. Я.** Исследование механических свойств пористого железа при растяжении и кручении // Порошковая металлургия.— 1965.— № 7.
12. **Свойства** элементов: Справочник. Ч. 1. Физические свойства/Под ред. Г. В. Самсонова.— М.: Металлургия, 1976.

Поступила 27/IV 1987 г.

УДК 539.375 : 621.01

МЕХАНИКА РАЗРУШЕНИЯ ПОКРЫТИЙ И ПЛЕНОК

А. Г. Черепанов, Г. П. Черепанов

(*Москва*)

Введение. Тонкий поверхностный слой всех материалов обладает специфическими свойствами, объясняющимися как химическим либо тепловым, так и непосредственным физико-механическим взаимодействием материала с окружающей средой. Как правило, именно в поверхностном слое материалов и конструкций зарождается начальная усталостная трещина, развитие которой приводит к исчерпанию ресурса конструкции или ее элемента. Естественно поэтому, что состояние поверхностного слоя (и управление его свойствами) — одна из основных проблем, которой занимаются технологи и инженеры [1, 2]. Материалоемкость промышленности существенно зависит от решения этой проблемы.

Комбинация поверхностный слой — объем материала может рассматриваться как композит, одним из компонентов которого является поверхностный слой [3]. Важнейшие характеристики этого слоя — особые защитные свойства, зависящие от его химсостава и микроструктуры, адгезионная прочность и трещиностойкость самого слоя и его контакта с подложкой. На свойства поверхностного слоя влияют водород и коррозия в газовой среде и водных растворах, износ, катализ, сварка и пайка, эрозия, пассивация, адгезия, спекание и абляция, влияние ингибиторов.

Для управления механическими, химическими, магнитными, электрическими и другими свойствами поверхностного слоя применяются разнообразные методы, которые можно классифицировать следующим образом.

Механические методы (дробеструйный наклеп, проковка, ударное упрочнение) приводят к возникновению высоких сжимающих остаточных напряжений в поверхностном слое и торможению в нем зародышей трещин.

Лакокрасочные покрытия и окисные пленки служат для химической защиты материала от окружающей среды.

Методы осаждения позволяют получать новые поверхностные слои с составом и микроструктурой, отличными от состава и микроструктуры материала подложки (плазменное напыление, ионное нанесение, химическое и физическое осаждение из паров, электролитическое осаждение).

Методы физико-химической модификации материала позволяют изменять механические и физико-химические свойства поверхностного слоя (специальная термообработка поверхности, ионные азотирование и цементация, ионная имплантация, обработка лазерными и электронными лучами). В естественных условиях металл обычно защищает окисная пленка.

Протравливание стекла приводит к растворению поверхностного слоя в нем, насыщенного трещинами, и существенному увеличению прочности стекла (правда, лишь на некоторое время, пока на его поверхности зарождаются новые трещины).

Наиболее перспективными и многообещающими являются ионная имплантация и лазерная обработка.

Ионная имплантация — это процесс, в котором практически любой элемент может быть внедрен в поверхностный слой любого твердого тела, помещенного в вакуумную камеру, посредством пучка высокоскоростных ионов этого элемента с энергией частиц 0,1—10 МэВ. Ионы внедряются в материал на глубину порядка 0,01—1 мкм. Такой метод поверхностного легирования металлов открывает практически неисчерпаемые возможности формирования необычных метастабильных структур и соединений в поверхностном слое, запрещенных классической термодинамикой равновесных и слабонеравновесных процессов.

Лазерная обработка — это процесс быстрого сканирования поверхности непрерывным или пульсирующим лазерным лучом. Лазерный луч вызывает локальное оплавление тонкого поверхностного слоя, который чрезвычайно быстро охлаждается из-за плотного контакта с массой холодного материала на границе раздела. При этом толщина слоя может изменяться в пределах 10^{-1}—10^{3} мкм, а скорость его охлаждения достигать 10^{8}—10^{10} К/с. При таких скоростях охлаждения в поверхностных слоях формируются метастабильные ультрамикрокристаллические и аморфные структуры, характеризующиеся большой прочностью, а также исключительно высокой усталостной и коррозионной стойкостью вследствие отсутствия зародышей трещин и дислокаций в аморфных металлах.

Широко применяются также комбинированные методы, приводящие к сложной многослойной структуре поверхностного слоя (например, нагартовка поверхности дробеструйной обработкой, затем последовательно анодирование, эпоксидная грунтовка и лакокрасочное покрытие — в данном случае поверхностный слой четырехслойный).

Приведем решение нескольких задач, иллюстрирующих основные проблемы механики разрушения покрытий. Понятие покрытие считается эквивалентным понятию поверхностный слой или пленка.

Оптимизация покрытий. Под действием переменных нагрузок в поверхностном слое со временем развивается поперечная краевая усталостная трещина, которая может перейти в основной металл и привести к преждевременному разрушению элемента конструкции. Выведем необходимое условие равнопрочности, позволяющее исключить такую возможность путем оптимального подбора вязкостей разрушения слоя, основного металла и границы контакта.

Пусть усталостная трещина нормального разрыва пересекла весь слой толщины h и подошла к границе контакта слоя l с основным металлом g (рис. 1) (предполагаются условия плоской деформации или плоского напряженного состояния). В этот момент в окрестности конца трещины (точка O на рис. 1) материал, вообще говоря, неоднороден по упругим и прочностным свойствам. Заметим, что па практике весьма часто можно пренебречь неоднородностью упругих свойств (но не прочностных!), считая, что модули Юнга и коэффициенты Пуассона для покрытия и основного металла различаются несущественно. Это допущение пригодно для большинства напыленных покрытий, нагартованных и модифицированных слоев. Поэтому в дальнейшем случай однородности будет особо выделен.

Вначале необходимо произвести расчет упругих напряжений в теле с покрытием, но без трещины, а затем рассмотреть задачу с трещиной (рис. 1), в которой к берегам трещины приложены напряжения, равные по величине, но противоположные по знаку соответствующим напряжениям первой задачи. Локальное поле напряжений вблизи конца трещины определяется из решения второй задачи.

В большинстве практически значимых случаев можно считать, что нормальная нагрузка, приложенная к берегам трещины во второй задаче, постоянна и равна $\sigma_y = -p = -E_l \varepsilon_y (1 - \nu_l^2)^{-1}$, а касательная нагрузка равна нулю для свободной границы (рис. 1). Здесь E_l — модуль Юнга покрытия, ε_y — деформация в точке расположения трещины, полученная

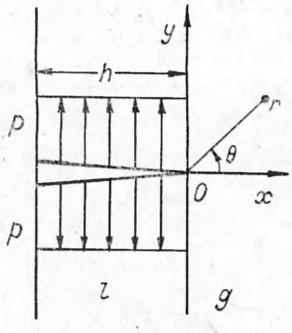


Рис. 1

из решения первой задачи в простейшем случае $h \to 0$, $E_l = E_g$ (E_g — модуль Юнга подложки). Этот результат можно строго доказать практически для всех случаев тонких покрытий, когда $h/R \ll 1$ и $E_l \sim E_g$ (или $E_l \ll E_g$) (R — радиус кривизны поверхности в рассматриваемой точке). При $E_l \gg E_g$ в связи с наличием двух малых параметров E_g/E_l и h/R при некоторых условиях может потребоваться учет изгиба оболочки (т. е. линейного по координате слагаемого в нагрузке на трещине). Однако такие жесткие защитные покрытия практически не применяют вследствие концентрации в них больших напряжений. Для металлов же таких жестких покрытий не существует в природе (модуль Юнга самого жесткого материала — алмаза — всего в 6 раз больше, чем у железа).

Введем полярные координаты $r\theta$ с центром в конце трещины (рис. 1). Рассмотрим малую окрестность конца трещины ($r \ll h$). В зависимости от различного соотношения прочностной неоднородности усталостная трещина из точки O может пойти следующими тремя возможными путями (рис. 2): *а* — по старому направлению $\theta = 0$, но уже в подложке; *б* — по границе контакта подложки с покрытием $\theta = \pm\pi/2$; *в* — в материале слоя вблизи границы контакта $\theta \approx +\pi/2$. Длительность надежной работы конструкции в первом случае, очевидно, при прочих равных условиях меньше, чем во втором и третьем, когда граница контакта тормозит трещину. При оценке ресурса конструкции на стадии ее проектирования совершенно необходимо учитывать эту возможность путем целенаправленного изменения свойств покрытия и контакта в заданном направлении. Существенно подчеркнуть, что слишком прочные покрытия приводят, как правило, к снижению долговечности.

В целом оптимально такое покрытие, которое позволяет максимизировать долговечность. Последняя равна сумме четырех слагаемых: времени зарождения усталостной трещины, времени ее развития через всю толщину покрытия, периоду задержки на границе контакта и времени докритического роста в подложке. Каждый из этих этапов требует самостоятельного исследования, так как при определенных условиях может стать решающим при выборе оптимального покрытия. Здесь остановимся на третьем этапе.

Напряжение σ_θ вблизи конца трещины имеет вид [5]

$$\sigma_\theta = K_I(\lambda + 1)(2\pi)^{-1/2} r^\lambda [(2 + \lambda)\cos\lambda\theta + B\cos(\lambda + 2)\theta] \quad (1)$$

$$(0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2),$$

$$B = \frac{k_1(3\lambda + 2) - k_2(1 + 2\lambda) + \lambda + 1}{1 + k_1},$$

$$k_1 = \frac{k - 1}{4(1 - \nu_l)}, \quad k_2 = \frac{1 - \nu_g}{1 - \nu_l} k, \quad k = \frac{\mu_l}{\mu_g},$$

$$K_I = \eta(k, \nu_l, \nu_g) p (\pi h)^{-\lambda},$$

где ν и μ — коэффициент Пуассона и модуль сдвига (индексы l и g отно-

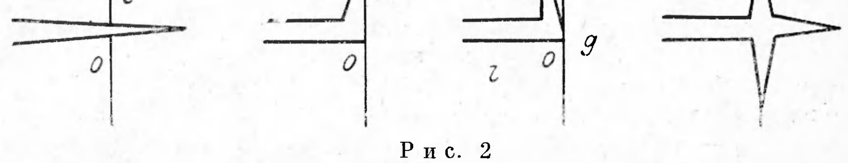
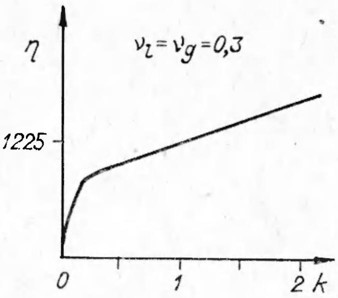


Рис. 2

сятся к покрытию и подложке); K_{I} — коэффициент интенсивности напряжений в данной задаче (см. рис. 1); $\eta(k, \nu_l, \nu_g)$ — функция, определяемая численными методами теории упругости (ее график при $\nu_l = \nu_g = 0{,}3$ изображен на рис. 3 согласно [4]); λ — единственный действительный корень уравнения

$$\cos \pi\lambda = a + b(\lambda + 1)^2$$

$$\left(a = \frac{2k_1^2 - 2k_1k_2 + 2k_1 - k_2 + 1}{2(k_2 - k_1)(k_1 + 1)}, \quad b = \frac{2k_1}{k_1 + 1}\right),$$



Р и с. 3

лежащий в интервале (—1, 0). Зависимость этого корня от k при $\nu_l = \nu_g = 0{,}3$, взятая из [5], приводится на рис. 4. В наиболее важном частном случае однородного изотропного тела, когда $\nu_l = \nu_g$, $\mu_l = \mu_g$, имеем

(2) $$\sigma_\theta = \frac{1}{4} K_{\text{I}} (2\pi r)^{-1/2} \left(3 \cos \frac{1}{2}\theta + \cos \frac{3}{2}\theta\right),$$

$$K_{\text{I}} = 1{,}1225 p(\pi h)^{1/2}.$$

Обозначим через $K_\theta(\theta)$ функцию $K_\theta = \sigma_\theta(2\pi)^{1/2} r^{-\lambda}$, определяемую формулой (1). Как видно, это монотонно убывающая функция θ (рис. 5). График зависимости от θ вязкости разрушения $K_{\text{I}c}$ качественно изображен в предположении, что граница контакта наиболее слаба по прочности.

Рассмотрим вначале монотонное нагружение, когда нагрузка p монотонно возрастает со временем. Тогда, согласно теории обобщенного нормального разрыва [4], подтверждаемой экспериментом, трещина развивается по тому направлению $\theta = \theta_*$, в котором $K_\theta(\theta_*) = K_{\text{I}c}(\theta_*)$, а по всем другим направлениям $\theta \neq \theta_*$ $K_\theta(\theta) < K_{\text{I}c}(\theta)$. Если вязкость разрушения покрытия и контакта меньше, чем у подложки, то кривая $K_\theta(\theta)$ впервые пересечет кривую $K_c(\theta)$ при $\theta = 0$ или при $\theta = \pi/2$ (рис. 5), т. е. реализуется один из указанных выше трех случаев.

Покрытие назовем равнопрочным по предельной нагрузке, если его свойства таковы, что кривая $K_\theta(\theta)$ первоначально касается кривой $K_{\text{I}c}(\theta)$ одновременно в точках $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$ (при этом трещина пойдет одновременно по обоим направлениям, образуется тормозящий «стриж» (см. рис. 2, *г*)). Согласно (1), имеем

(3) при $\theta = 0$ $K_\theta = K_{\text{I}}(\lambda + 1)(\lambda + 2 + B)$,

при $\theta = \frac{\pi}{2}$ $K_\theta = K_{\text{I}}(\lambda + 1)\left[(2 + \lambda)\cos\frac{\pi\lambda}{2} + B\cos\frac{\pi}{2}(\lambda + 2)\right]$.

Для однородного тела, согласно (2),

(4) при $\theta = 0$ $K_\theta = K_{\text{I}}$, при $\theta = \pi/2$ $K_\theta = K_{\text{I}}/(2\sqrt{2})$.

Из (3) выводим следующее условие равнопрочности:

при $K_{\text{I}cgl} < K_{\text{I}cl}$

$$K_{\text{I}}(\lambda + 1)(\lambda + 2 + B) = K_{\text{I}cg},$$

$$K_{\text{I}}(\lambda + 1)\left[(2 + \lambda)\cos\frac{\pi\lambda}{2} + B\cos\frac{\pi(\lambda + 2)}{2}\right] = K_{\text{I}cgl},$$

т. е.

(5) $$(\lambda + 2 + B)K_{\text{I}cgl} = K_{\text{I}cg}\left[(2 + \lambda)\cos\frac{\pi\lambda}{2} + B\cos\frac{\pi(\lambda + 2)}{2}\right];$$

при $K_{\text{I}cgl} > K_{\text{I}cl}$

(6) $$(\lambda + 2 + B)K_{\text{I}cl} = K_{\text{I}cg}\left[(2 + \lambda)\cos\frac{\pi\lambda}{2} + B\cos\frac{\pi(\lambda + 2)}{2}\right].$$

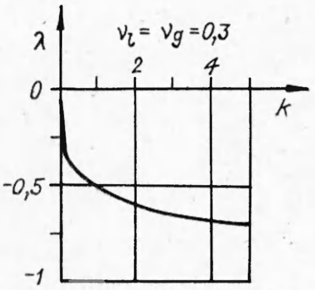


Рис. 4

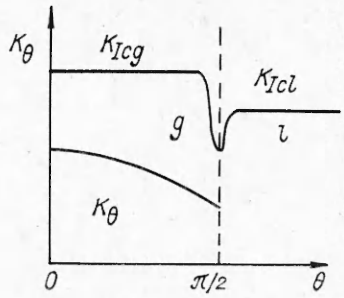


Рис. 5

Здесь $K_{\text{I}cgl}$ — постоянная трещиностойкости контакта покрытия с подложкой, имеющая размерность силы, деленной на длину в степени $2 + \lambda$; $K_{\text{I}cg}$ и $K_{\text{I}cl}$ — вязкость разрушения материала подложки и слоя.

Для однородного по упругим свойствам (но неоднородного по прочности) материала, согласно (4), имеем условие равнопрочности

$$(7)\qquad 2\sqrt{2}\min(K_{\text{I}cgl}, K_{\text{I}cl}) = K_{\text{I}cg}\ (\lambda = -1/2,\ \nu_l = \nu_g,\ E_l = E_g).$$

Следовательно, для равнопрочного покрытия при монотонном нагружении вязкость разрушения подложки должна быть в $2\sqrt{2}$ раз больше вязкости разрушения контакта (если $K_{\text{I}cgl} < K_{\text{I}cl}$) или вязкости разрушения покрытия (если $K_{\text{I}cgl} > K_{\text{I}cl}$). Значениями $K_{\text{I}cgl}$ и $K_{\text{I}cl}$ можно управлять, применяя различные технологические процессы обработки поверхности. Покрытие становится защитным слоем (от трещин при предельных нагрузках), если знак равенства в условиях равнопрочности (5)—(7) можно заменить на знак $<$.

Рассмотрим циклическое нагружение, когда нагрузка p — периодическая функция времени. Пусть усталостная трещина развивается из точки O — конца трещины на границе сред — под некоторым углом θ (см. рис. 1). В этом случае скорость роста усталостной трещины dl/dN будет некоторой функцией максимального и минимального значений K_θ за цикл $dl/dN = f(K_{\theta\,\max}, K_{\theta\,\min}, \theta)$, причем она в общем случае зависит также от угла θ. Естественно предположить, что направление развития магистральной усталостной трещины дается углом $\theta = \theta_*$, на котором функция f достигает максимума

$$(8)\qquad \max_\theta f(K_{\theta\max}(\theta), K_{\theta\min}(\theta), \theta) \text{ при } \theta = \theta_*.$$

По остальным направлениям усталостные трещины попадают в область разгрузки и перестают расти.

В случае двух различных однородных сред в точке O конкурирующими являются лишь указанные выше три варианта a — $в$, а условие выбора направления (8) принимает вид $dl/dN = \max\{f_g, f_{lg}, f_l\}$ (f_g, f_{lg} и f_l — скорость роста усталостной трещины по направлениям $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$ и $\theta = \pi/2 + 0$ соответственно). Эти величины определяются экспериментально. Если различием упругих постоянных двух сред можно пренебречь, то значения f_g и f_l можно взять из диаграмм dl/dN — ΔK для соответствующего однородного материала при ΔK, определяемой по формулам (1), а f_{lg} найти из аналогичной диаграммы, снятой для усталостной трещины, развивающейся вдоль границы раздела покрытие — подложка.

На основании изложенного становится очевидным, что направление развития криволинейных усталостных трещин, растущих при низких переменных нагрузках, и равновесных трещин, растущих при предельных нагрузках, вообще говоря, различно. Это одно из проявлений общего заключения о том, что поведение материалов и конструкций неоднозначно при высоких и низких нагрузках: конструкция может нести большие предельные нагрузки, но иметь сравнительно малую долговечность при низких нагрузках, и наоборот.

В связи с указанным обстоятельством естественно называть покрытие равнопрочным по усталостному ресурсу, если оба направления $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$ равноправны, т. е.

$$f_g = \max (f_l, f_{lg}). \tag{9}$$

Если же

$$f_g < \max (f_l, f_{lg}), \tag{10}$$

то покрытие можно называть защитным от усталостных трещин.

Отсюда вытекает, что при заданном материале более стойкого покрытия и подложки (т. е. при заданных f_l и f_g, удовлетворяющих неравенству $f_g > f_l$) конструктор должен выбрать технологию формирования сцепления покрытия с подложкой таким образом, чтобы выполнялось условие $f_{lg} > f_g$ при $f_g > f_l$, гарантирующее защитные свойства покрытия от усталостных трещин. В то же время должна быть гарантирована прочность сцепления при предельных нагрузках [3]. Подчеркнем, что в условия (9) и (10) входят рабочая нагрузка и толщина слоя; следовательно, покрытие и его сцепление с подложкой должны проектироваться на определенный уровень циклических или переменных нагрузок (и на заданный ресурс). Даже в случае простейшей степенной закономерности $\Delta l/dN \sim (\Delta K)^m$ зависимость от p и h пропадает лишь тогда, когда постоянная m одинакова для подложки и контакта покрытия с подложкой.

Когда свойства поверхностного слоя плавно изменяются по глубине и поверхность раздела отсутствует, защитные свойства покрытия от усталостных трещин отсутствуют, так как трещина всегда переходит в основной металл без остановки. В этом случае нужно стремиться к созданию ортотропии в поверхностном слое относительно развития продольных и поперечных усталостных трещин, а необходимое условие торможения поперечных усталостных трещин, по-прежнему, выражается неравенством (10), где lg — продольное направление в слое.

Развитие усталостной трещины вдоль границы раздела покрытия и подложки. Пусть на границе раздела покрытия и подложки имеется плоская область, в которой сцепление покрытия и подложки отсутствует (начальная трещина, изображенная в плане на рис. 6, *а*). Эта трещина может быть технологического происхождения или же возникает вследствие торможения поперечной усталостной трещины в слое на границе раздела по описанному выше механизму. Примем, что характерный линейный размер трещины в плане гораздо больше толщины покрытия.

Будем считать, что напряженно-деформированное состояние детали в рассматриваемом месте (без учета трещины и покрытия) приводится к главным деформациям ε_1 и ε_2 и напряжениям:

$$\sigma_1 = \frac{E_\delta}{1-\nu_\delta^2}(\varepsilon_1 + \nu_\delta\varepsilon_2), \quad \sigma_2 = \frac{E_\delta}{1-\nu_\delta^2}(\varepsilon_2 + \nu_\delta\varepsilon_1)$$

$$(\delta = l, g;\ E_\delta\varepsilon_3 = -\nu_\delta(\sigma_1 + \sigma_2)).$$

Направление *3* совпадает с нормалью к свободной поверхности тела.

Полагаем, что в ε_1 и ε_2, кроме деформаций, возникающих от рабочих нагрузок, входят также крупномасштабные (по сравнению с h) остаточные и температурные деформации. Легко видеть, что если покрытие над трещиной сплошное, то концентрация напряжений на ее фронте не возникает, и поэтому сила, движущая трещину и выражаемая инвариантным Г-интегралом, равна нулю. При этом контур трещины неподвижен. Если же покрытие имеет сквозные поперечные трещины или царапины, то Г-вычет на фронте трещины отличен от нуля и трещина приходит в движение [4, 6].

Ограничимся наиболее определенным и важным случаем, когда система сквозных трещин такова, что она сводит к нулю все напряжения в

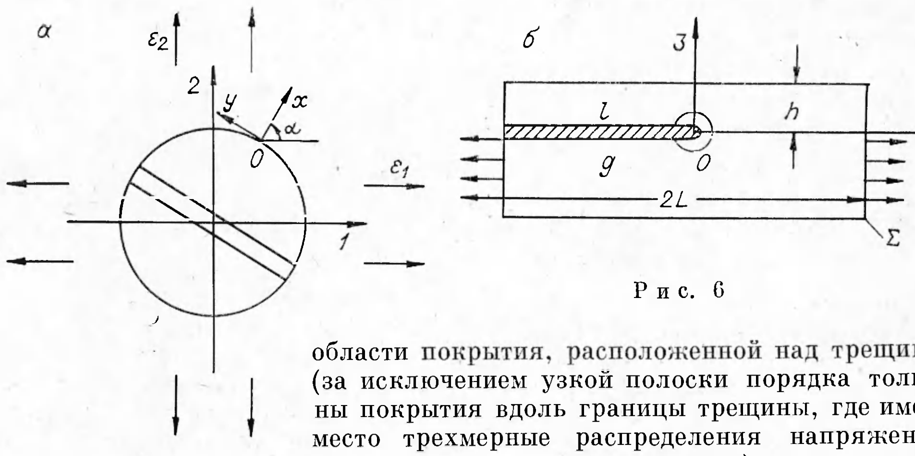


Рис. 6

области покрытия, расположенной над трещиной (за исключением узкой полоски порядка толщины покрытия вдоль границы трещины, где имеют место трехмерные распределения напряжений, проникающих из внешнего поля).

Рассмотрим окрестность произвольной точки O фронта трещины, малую по сравнению с радиусом кривизны контура трещины в этой точке, но большую по сравнению с толщиной покрытия (рис. 6, *б*). Нормаль и касательную к контуру трещины в данной точке обозначим через x и y соответственно.

В плоской задаче рис. 6, *б* напряжения в полосе $0 < y < h$ стремятся к нулю при $x \to -\infty$, а во всей остальной области при $x \to \pm\infty$ напряжения и деформации стремятся к невозмущенным значениям

$$(11) \qquad \varepsilon_x = \varepsilon_1 \cos^2\alpha + \varepsilon_2 \sin^2\alpha, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_1 \sin^2\alpha + \varepsilon_2 \cos^2\alpha,$$
$$\varepsilon_{xy} = (1/2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \sin 2\alpha$$

(напряжения определяются по закону Гука). Здесь α — угол, составляемый нормалью к контуру трещины с направлением ε_1.

Вычислим Г-вычет по малой окружности, охватывающей точку O. Для этого возьмем замкнутый контур Σ, состоящий из свободных берегов трещины, свободной поверхности тела, линий $x = \pm L_1$ при $L \to \infty$ и линии, параллельной оси x и отстоящей от нее на расстоянии L_2 при $L_2 \to \infty$ (прямоугольник с разрезом, см. рис. 6, *б*). Практически достаточно L_1 и L_2 взять равными порядка $3h$. Используя теорию Г-интегрирования [3, 4], получаем

$$(12) \qquad \Gamma = \oint_{\Sigma} \left[\left(Э + \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i \right) n_x - \sigma_{ij} u_{i,x} n_j \right] d\Sigma = -h (Э_{\infty} - \sigma_x \varepsilon_x - 2\tau_{xy} \varepsilon_{xy}) =$$
$$= -\frac{1}{2} h (\sigma_y \varepsilon_y - \sigma_x \varepsilon_x - 2\tau_{xy} \varepsilon_{xy}),$$

где Э — энергия деформации единицы объема; ρ — плотность; $\dot{u}_i$ — скорость; u_i — смещения; σ_{ij} — напряжения; напряжения с индексами x и y и $Э_{\infty}$ относятся к невозмущенному состоянию покрытия (11); Г — сила, движущая трещину [4, 6]. Поэтому в общем случае (когда пластическая область не мала) скорость роста усталостной трещины dl/dN выражается формулой [3, 4]

$$(13) \qquad dl/dN = f(\Gamma_{\max}, \Gamma_{\min})$$

(f — некоторая функция, $\Gamma_{\max}$ и $\Gamma_{\min}$ — максимальное и минимально значения Г за цикл).

Используя постулат подобия и общую энергетическую концепцию для малых пластических областей, когда можно применять понятие коэффициента интенсивности напряжений, находим [4] $\dfrac{dl}{dN} = -\beta \left(\dfrac{\Gamma_{\max} - \Gamma_{\min}}{\Gamma_c} + \ln \dfrac{\Gamma_c - \Gamma_{\max}}{\Gamma_c - \Gamma_{\min}} \right)$ $(\Gamma_c \geqslant \Gamma_{\max} > \Gamma_Y)$ (β, Γ_c, Γ_Y — адгезионные постоянные контакта покрытие — подложка). Согласно (11)—

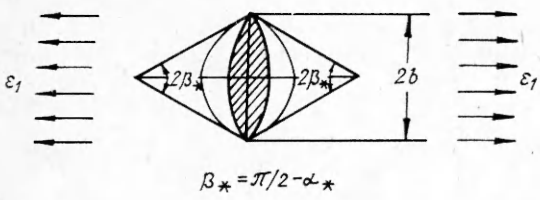


Рис. 7

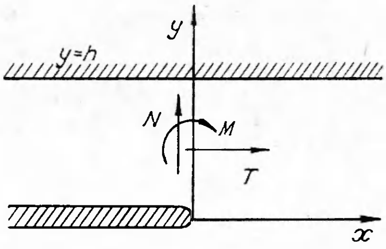


Рис. 8

(13), скорость роста усталостной трещины не зависит от ее размеров и числа циклов, а существенно зависит от угла α (и, естественно, от внешней периодической нагрузки).

Пусть уравнение контура движущейся трещины имеет вид $f(x, y, t) = 0$ (t — время, измеряемое в циклах). Выведем дифференциальное уравнение для функции f:

$$v_x \partial_x f + v_y \partial_y f + \partial_t f = 0. \tag{14}$$

Здесь v_x, v_y — компоненты скорости движения контура трещины в рассматриваемой точке, определяемые формулами $v_x = v(\alpha)\cos\alpha$, $v_y = v(\alpha)\sin\alpha$, $v(\alpha) = dl/dN$, $\operatorname{tg}\alpha = \partial_y f/\partial_x f$ (v — нормальная скорость движения контура усталостной трещины).

Таким образом, движение контура усталостной трещины находится из решения нелинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. Решение этого уравнения легко получить численно, применяя пошаговый метод по времени.

В простейшем случае одноосного растяжения, когда $\varepsilon_2 = 0$, вычисляем

$$\Gamma = \frac{hE_l\varepsilon_1^2\cos^2\alpha}{2(1-\nu_l^2)}\left[1 - \operatorname{tg}^2\alpha + 2(1-\nu_l)\sin^2\alpha\right]. \tag{15}$$

Пусть, например, начальная трещина представляет собой узкий эллипс длины $2b$, вытянутый поперек растяжения ε_1 (заштрихованная область на рис. 7). При циклическом растяжении усталостная трещина придет в движение; при этом, согласно (15), центральная область контура будет продвигаться вперед с большей скоростью, чем края, а вершины трещины останутся неподвижными. Если считать, что $\Gamma_Y = 0$, то движение трещины продолжится до тех пор, пока на всем контуре трещины движущая сила Γ больше нуля. При $\Gamma = 0$ движение прекратится; таким образом, условие $\Gamma = 0$ позволяет непосредственно определить предельный контур трещины, не решая дифференциальное уравнение. Отсюда при помощи (15) находим

$$\operatorname{tg}^2\alpha_* = 1 + 2(1-\nu_l)\sin^2\alpha_*. \tag{16}$$

Следовательно, предельный контур трещины представляет собой ромб с диагональю $2b$ и углом раствора $2\alpha_*$, являющимся корнем уравнения (16). Например, при $\nu_l = 0{,}5$ $\alpha_* = 52°$, при $\nu_l = 0{,}3$ $\alpha_* = 55°$, при $\nu_l = 0$ $\alpha_* = 58°$. Интересно, что предельный контур формируется за конечное число циклов N_*, которое легко найти, разделив на скорость трещины путь длины $b\sin\alpha_*$, который проходит центральная точка контура вдоль диаметра ромба (при $\alpha = 0$). Например, в простейшем случае, когда $\varepsilon_{1\min} = 0$, $dl/dN = A\Gamma^2_{\max}$, при помощи (15) находим $N_* = 4b(1 - \nu_l^2{}^2\sin\alpha_*/(Ah^2E_l^2\varepsilon^4_{1\max})$.

При $\Gamma_Y > 0$ предельный контур будет внутри указанного ромба. В случае произвольного контура начальной трещины теперь уже легко построить предельный контур, проведя касательные к начальному контуру под углом $\pi/2 - \alpha_*$ с направлением растяжения.

Структура трещины расслаивания. Вопрос о распределении напряжений и деформаций вблизи фронта трещины расслаивания с учетом поверхности тела достаточно сложный в вычислительном отношении, так как требует анализа точных уравнений деформирования материала на расстояниях порядка толщины покрытия. На основании «принципа микроскопа» исследуемая область в этом случае представляет собой полуплоскость с полубесконечным разрезом, параллельным границе, в условиях плоской деформации [3] (рис. 8, где показаны также равнодействующие силы и момент, приведенные к началу координат, концу трещины).

Рассмотрим эту проблему в простейшей линейно-упругой постановке, считая упругие постоянные покрытия и подложки одинаковыми. Точное решение этой задачи получено в [7] изящным, но весьма трудоемким аналитическим методом с использованием матричной задачи Римана. Итак, однородная изотропная полуплоскость $y < h$ имеет полубесконечный разрез при $y = 0$, $x < 0$, параллельный границе полуплоскости. Берега разреза и граница $y = h$ считаются свободными от нагрузок.

Равнодействующая напряжений σ_y и τ_{xy} в сечении $y = 0$ равна силам N и T, а их момент относительно начала координат — M.

Приведем окончательные результаты решения для коэффициентов интенсивности [7]

$$K_{\text{I}} = 1{,}932M/h^{3/2} - 0{,}5314T/\sqrt{h} + 1{,}933N/\sqrt{h}, \tag{17}$$

$$K_{\text{II}} = -1{,}506M/h^{3/2} + 1{,}3108T/\sqrt{h} + 0{,}033N/\sqrt{h}.$$

Проверим их при помощи инвариантного Г-интеграла.

Усилия N, T и момент M в данной задаче создаются следующим напряженным состоянием в полосе $0 < y < h$ при $x \to -\infty$:

$$\sigma_x = 2(3M - 2hT)h^{-2} + 6y(hT - 2M)h^{-3} + \tag{18}$$

$$+ 6xNh^{-3}(2y - h), \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -6Nyh^{-3}(y - h).$$

Вычислим Г-вычет в конце трещины для данной задачи, используя контур рис. 6, *б* при помощи простого расчета [3, 4], аналогичного (12). Приведем промежуточные выкладки для перемещений при $0 < y < h$ $x \to -\infty$

$$u = \frac{1 - \nu^2}{E} 2xh^{-2}\left[3M - 2hT + 3yh^{-1}(hT - 2M)\right] + \tag{19}$$

$$+ \frac{1 + \nu}{E} Nh^{-3}\left[3(1 - \nu)x^2(2y - h) + 2y^2(\nu - 2)\left(y - \frac{3}{2}h\right)\right] + C_1,$$

$$v = \frac{1 + \nu}{E}\{2\nu yh^{-2}(3M - 2hT) - 3h^{-3}(hT - 2M)[\nu y^2 + (1 - \nu)x^2]\} +$$

$$+ \frac{1 + \nu}{E} Nh^{-3}[2x^3(1 - \nu) - 6\nu xy(y - h)] + C_2$$

$$(E\varepsilon_x = (1 - \nu^2)\sigma_x, \ E\varepsilon_y = -\nu(1 + \nu)\sigma_x, \ E\varepsilon_{xy} = (1 + \nu)\tau_{xy}, \ \varepsilon_z = 0)$$

(C_1, C_2 — несущественные постоянные).

Формулы (18) и (19) — точное решение уравнений теории упругости для полосы $0 < y < h$ со свободной границей $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ при $y = 0$, $y = h$ и с заданным значением M, T и N в сечении $x = 0$ полосы.

Таким образом,

$$\Gamma = \int_0^h \left(\frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x + \tau_{xy}\varepsilon_{xy} - \tau_{xy}\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy = \tag{20}$$

$$= \frac{1 - \nu^2}{E}\left(6M^2h^{-3} - 6MTh^{-2} + 2T^2h^{-1} + \frac{6}{5}N^2h^{-1}\right).$$

Формула (20) годится также для плоского напряженного сотояния, если в ней положить $\nu = 0$.

Попробуем рассчитать коэффициенты интенсивности напряжений по известному значению Г-вычета. Ограничимся случаем трех независимых параметров нагружения p_1, p_2, p_3 (как в данной задаче). Согласно принципу суперпозиции, имеем $K_{\mathrm{I}} = \alpha_i p_i$, $K_{\mathrm{II}} = \beta_i p_i$ $(i = 1, 2, 3)$ (α_i и β_i — искомые коэффициенты, не зависящие от p_i). Далее, находим

$$\Gamma = \frac{1-\nu^2}{E}\left(K_{\mathrm{I}}^2 + K_{\mathrm{II}}^2\right) = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\alpha_i\alpha_k + \beta_i\beta_k\right) p_i p_k = \frac{1-\nu^2}{E} A_{ik} p_i p_k \qquad (21)$$

$$(i, k = 1, 2, 3)$$

(A_{ik} — известные коэффициенты). Следовательно, получаем 6 уравнений для определения 6 неизвестных:

$$\alpha_i\alpha_k + \beta_i\beta_k = A_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3). \qquad (22)$$

Решение этой системы уравнений запишем в виде

$$\alpha_i = \sqrt{a_k}\sin\gamma_k, \quad \beta_i = \sqrt{a_k}\cos\gamma_k,$$

$$\gamma_1 = \gamma_3 + \arccos\frac{A_{13}}{\sqrt{A_{11}A_{33}}}, \quad \gamma_2 = \gamma_3 + \arccos\frac{A_{23}}{\sqrt{A_{22}A_{33}}}$$

$$(a_1 = A_{11},\ a_2 = A_{22},\ a_3 = A_{33}),$$

так как должно иметь место условие разрешимости системы (22):

$$\arccos\frac{A_{13}}{\sqrt{A_{11}A_{33}}} - \arccos\frac{A_{23}}{\sqrt{A_{22}A_{33}}} = \arccos\frac{A_{12}}{\sqrt{A_{11}A_{22}}}. \qquad (23)$$

Таким образом, все коэффициенты интенсивности можно определить из Г с точностью до одной неизвестной постоянной и показать, что этот результат справедлив для любого числа параметров нагрузки. Итак, в задачах с известным значением Г для отыскания коэффициентов K_{I} и K_{II} достаточно определить лишь одно значение K_{I} или K_{II} при каком-либо одном значении одного из параметров нагрузки (т. е. один из коэффициентов α_i или β_i).

Нетрудно видеть, что коэффициенты A_{ik} в формуле (21) данной задачи, согласно (17), не удовлетворяют условию (23), что не является следствием какой-либо элементарной вычислительной ошибки. Причина этого нетривиальна, для выяснения ее остановимся подробнее на данной задаче (см. рис. 8) при $M = T = 0$, $N \neq 0$. Назовем ее задачей N. Согласно (18), напряжение σ_x в полосе $0 < y < h$ стремится к бесконечности при $x \to -\infty$, причем в каждом сечении полосы $x = \mathrm{const} \to -\infty$ $M = \int_0^h y\sigma_x dy = -Nx$, а равнодействующая сила $N \neq 0$, $T = 0$. Таким образом, на основании теоремы о корректных краевых задачах [4] задача N некорректна, так как не выполняется одно из необходимых условий корректности краевой задачи с цилиндрической бесконечно удаленной точкой: ограниченность напряжений на бесконечности.

Можно построить сколь угодно много различных решений задачи N в классе напряжений, не ограниченных при $x \to -\infty$, $0 < y < h$ и дающих $M = 0$, $T = 0$, $N = \mathrm{const} \neq 0$ в сечении $x = -0$. Формулы (18), (19) при $M = 0$, $T = 0$ дают одно из этого множества решений. В окрестности цилиндрической бесконечно удаленной точки задачи N Г-интеграл расходится, поэтому в зависимости от пути интегрирования и выбранной асимптотики его значение может быть любым (в частности, конечным и равным (20) при $M = 0$, $T = 0$, как в данном случае). То же самое справедливо в отношении коэффициентов интенсивности K_{I} и K_{II} задачи N: решение [7] некорректно при $M = 0$, $T = 0$, $N \neq 0$.

Заметим, что если к расходящемуся интегралу (20) в задаче N применить правило Г-интегрирования [3, 4], то, очевидно, получим $\Gamma = 0$. Так как $\Gamma \sim N^2$, то отсюда $N = 0$: таково условие корректности задачи N.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Treatise** on materials science and technology/Ed. by H. Herman.— N. Y.: Acad. Press, 1976—1982.— V. 1—20.
2. **Обработка** поверхности и надежность материалов.— М.: Мир, 1985.
3. **Черепанов Г. П.** Механика разрушения композиционных материалов.— М.: Наука, 1983.
4. **Cherepanov G. P.** Mechanics of brittle fracture.— N. Y.: McGraw Hill, 1979.
5. **Zak A. R., Williams M. L.** Crack point stress singularities at bimaterial interface // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.— 1963.— V. 30, N 1.
6. **Писаренко Г. С., Науменко В. П., Волков Г. С.** Определение трещиностойкости материалов на основе энергетического контурного интеграла.— Киев: Наук. думка, 1978.
7. **Златин А. Н., Храпков А. А.** Полубесконечная трещина, параллельная границе упругой полуплоскости // ДАН СССР.— 1986.— Т. 291, № 4.

Поступила 10/IV 1987 г.

УДК 538.4 : 621.926.085.54—185

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МЕХАНИКИ ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕД ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПРОЦЕССОВ ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

С. Ю. Арутюнов, И. Н. Дорохов, В. В. Кафаров, В. Г. Корнийчук, В. П. Соловьев

(*Москва*)

В [1, 2] найдены уравнения термогидромеханики двухфазной полидисперсной среды, учитывающие измельчение частиц дисперсной фазы. В данной работе с помощью методов механики гетерогенных сред [3] и основных уравнений электродинамики [4] получено математическое описание процесса измельчения в электромагнитном поле (ЭМП), которое учитывает эффекты столкновения, разрушения и образования частиц дисперсной фазы и влияние ЭМП на эти эффекты.

1. Движение гетерогенной смеси трех фаз в ЭМП, из которых первая фаза несущая (жидкость или газ), а вторая и третья присутствуют в виде отдельных частиц измельчаемого материала и мелющих тел различного размера, рассматривается при допущениях, принятых в [1—3].

Введем в каждой точке объема, занятого смесью, объемные содержания фаз α_i и средние плотности ρ_i ($i = 1, 2, 3$):

$$\alpha_1 + \int\limits_0^R r f_2(r)\, dr + \int\limits_{R_1}^{R_2} \mu f_3(\mu)\, d\mu = 1, \quad \rho = \rho_1 + \int\limits_0^R \rho_2^0 r f_2(r)\, dr + \int\limits_{R_1}^{R_2} \rho_3^0 \mu f_3(\mu)\, d\mu.$$

Здесь полидисперсность второй фазы характеризуется функцией $f_2(r)dr$ (число измельчаемых частиц в единице объема, размеры (объемы) которых находятся в интервале $(r, r + dr)$), а полидисперсность третьей фазы характеризуется функцией $f_3(\mu)d\mu$ (число мелющих тел в единице объема, размеры (объемы) которых находятся в интервале $(\mu, \mu + d\mu)$); индексы 1, 2 и 3 относятся к несущей фазе, к дисперсной и к фазе мелющих тел; $R_1 > R$. Следуя [1, 2], введем понятия r-фазы как совокупности частиц, размеры которых находятся в интервале $(r, r + dr)$, и μ-фазы как совокупности мелющих тел, размеры которых находятся в интервале $(\mu, \mu + d\mu)$. Каждая фаза представляет собой заряженную, электропроводную, поляризующуюся и намагничивающуюся среду в ЭМП.

2. При построении моделей сплошных сред, взаимодействующих с ЭМП, можно использовать различные формулировки уравнений электродинамики в зависимости от постулирования выражений для локальных напряженностей поля $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2(r)$, $\mathbf{E}_3(\mu)$ и $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2(r)$, $\mathbf{H}_3(\mu)$, однако после выбора одной из них все законы сохранения механики необходимо рассматривать с учетом выбранной формулировки. В настоящее время наи-