

О ДЕЙСТВИИ ТРЕНИЯ В КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПЛАСТИНЫ СО ШТИФТОМ

В. Н. Солодовников

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Решается контактная задача о растяжении упругой прямоугольной пластины с круговым отверстием, в которое с малым зазором вставлен абсолютно жесткий неподвижный штифт кругового поперечного сечения. В области контакта действует трение по закону Кулона. Применяются метод конечных элементов и принцип Буссинеска, по которому определяется нагрузка, реализующая заданную область контакта. Рассматриваются два варианта краевых условий на контуре отверстия.

1. Уравнения задачи. Выражения деформаций через смещения, соотношения закона Гука и уравнения равновесия для плоского напряженного состояния в декартовой системе координат x_1, x_2 принимаются в виде [1, 2]

$$\begin{aligned} e_{11} = u_{1,1}, \quad e_{22} = u_{2,2}, \quad 2e_{12} = u_{1,2} + u_{2,1}, \quad e_{11} = E^{-1}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}), \\ e_{22} = E^{-1}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}), \quad e_{12} = (1 + \nu)E^{-1}\sigma_{12}, \quad \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0, \quad \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} = 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; u_i — смещения; e_{ij} — деформации; σ_{ij} — напряжения ($i, j = 1, 2$); индексы 1, 2 после запятой означают частное дифференцирование по x_1, x_2 соответственно. Толщина пластины, как и в [2], считается постоянной и без нарушения общности единичной.

2. Краевые условия. Дана прямоугольная пластина с круговым отверстием радиуса R . С учетом симметрии решения относительно оси $x_2 = 0$ рассматривается только верхняя половина этой пластины (рис. 1). На ее контуре вне края отверстия ставятся краевые условия

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{12} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = -L_1, \quad 0 \leq x_2 \leq H, \\ u_1 = w, \quad u_2 = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = L_2, \quad 0 \leq x_2 \leq H, \end{aligned} \quad (2.1)$$

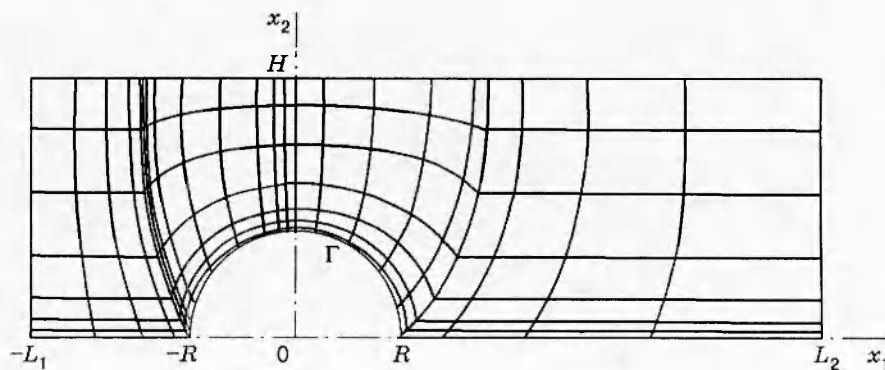


Рис. 1

$$u_2 = 0, \quad \sigma_{12} = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} x_2 = H, & -L_1 \leq x_1 \leq L_2, \\ x_2 = 0, & -L_1 \leq x_1 \leq -R, \quad R \leq x_1 \leq L_2. \end{cases}$$

В отверстие вставлен абсолютно жесткий неподвижный штифт, поперечное сечение которого есть круг с радиусом $R_1 = R - c$ ($c = \varepsilon R$, $0 < \varepsilon \ll 1$) и центром в точке с декартовыми координатами $(-c, 0)$. Для любой точки на контуре отверстия Γ имеем

$$\cos \theta = \rho^{-1}(\varepsilon + \cos \varphi), \quad \sin \theta = \rho^{-1} \sin \varphi, \quad \rho = (1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos \varphi)^{1/2}, \quad (2.2)$$

где θ — угол между осью x_1 и нормалью к контуру штифта Γ_c в точке, ближайшей к рассматриваемой точке (R, φ) на Γ ; (r, φ) — полярная система координат ($x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$). Компоненты векторов смещений и усилий $u_\rho, u_\theta, q_\rho, q_\theta$ на Γ , взятые в проекциях на нормаль и касательную к Γ_c , выражаются через компоненты смещений u_r, u_φ и напряжений $\sigma_{rr}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{r\varphi}$ в полярной системе координат по формулам

$$\begin{aligned} u_\rho &= u_r \cos \alpha - u_\varphi \sin \alpha, & u_\theta &= u_r \sin \alpha + u_\varphi \cos \alpha, \\ q_\rho &= \sigma_{rr} \cos \alpha - \sigma_{r\varphi} \sin \alpha, & q_\theta &= \sigma_{rr} \sin \alpha + \sigma_{r\varphi} \cos \alpha, & \alpha &= \varphi - \theta. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Условие непроникания края отверстия через контур штифта представляется в виде [2]

$$(\rho R + u_\rho)^2 + u_\theta^2 = (R + c \cos \varphi + u_r)^2 + (u_\varphi - c \sin \varphi)^2 \geq R_1^2 \quad (2.4)$$

или

$$u_\rho + (2\rho R)^{-1}(u_\rho^2 + u_\theta^2) \geq u_{\rho c} \quad (u_{\rho c} = -c\rho^{-1}(1 + \cos \varphi)). \quad (2.5)$$

Линеаризуя его, получаем неравенство

$$u_\rho \geq u_{\rho c}. \quad (2.6)$$

Оно более сильное, чем (2.5), в том смысле, что смещения, удовлетворяющие (2.6), будут удовлетворять и (2.5).

Сформулируем два варианта краевых условий на Γ .

Краевые условия (а). В области контакта Γ_1 полагаем $u_\rho = u_{\rho c}$, край отверстия прижимается к штифту, поэтому $q_\rho < 0$. Пусть на Γ_1 действует трение по закону Кулона [3]. Тогда допустимые значения усилий ограничиваются неравенствами $q_\rho < 0$, $|q_\theta| \leq \mu|q_\rho|$ или $f_1 = \mu q_\rho + q_\theta \leq 0$, $f_2 = \mu q_\rho - q_\theta \leq 0$, $F = f_1 f_2 \geq 0$ (μ — коэффициент трения) и, следовательно, занимают в декартовых координатах q_ρ, q_θ в полуплоскости $q_\rho < 0$ угол, ограниченный прямыми $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$. Условиями $f_1 = 0$ или $f_2 = 0$ задаются минимально возможные углы наклона вектора усилий (q_ρ, q_θ) к Γ_c . Модуль этого вектора законом трения не ограничивается.

Скольжение штифта с трением по краю отверстия при ненулевой скорости $\dot{u}_\theta$ (точка означает частное дифференцирование по параметру нагружения пластины, который назовем временем τ) может быть только тогда, когда значения усилий находятся на одной из граничных прямых и остаются на ней при догружении пластины $f_1 = \dot{f}_1 = 0$ или $f_2 = \dot{f}_2 = 0$. Плотность мощности рассеяния энергии должна быть неотрицательной ($Q = q_\theta \dot{u}_\theta \geq 0$), сила трения ($-q_\theta$) действует в направлении, противоположном скорости $\dot{u}_\theta$. Абсолютные величины $\dot{u}_\theta$ при скольжении могут быть любыми независимо от значений q_ρ, q_θ . В остальных точках области контакта, где условия скольжения не выполняются, осуществляется прилипание $\dot{u}_\theta = 0$.

На свободной части края отверстия Γ_2 выполняются условия $u_\rho \geq u_{\rho c}$, $\sigma_{rr} = \sigma_{r\varphi} = 0$ и $q_\rho = q_\theta = 0$.

Таким образом, на контуре отверстия ставятся краевые условия:

$$u_\rho = u_{\rho c}, \quad \dot{u}_\theta = 0, \quad q_\rho < 0, \quad F > 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1',$$

$$u_\rho = u_{\rho c}, \quad f = 0, \quad q_\rho < 0, \quad \begin{cases} \dot{u}_\theta = 0, & \text{если } \dot{f} < 0, \\ Q \geq 0, & \text{если } \dot{f} = 0, \end{cases} \quad \text{на } \Gamma_1'', \quad (2.7)$$

$$q_\rho = q_\theta = 0, \quad u_\rho \geq u_{\rho c} \quad \text{на } \Gamma_2.$$

Здесь в каждой точке Γ_1'' в качестве f берется та функция f_1 или f_2 , которая в этой точке равняется нулю; $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$; $\Gamma_1 = \Gamma_1' \cup \Gamma_1''$. Неравенство $Q \geq 0$ при $f = f_1 = 0$, $q_\theta = -\mu q_\rho > 0$ можно заменить на $\dot{u}_\theta \geq 0$, а при $f = f_2 = 0$, $q_\theta = \mu q_\rho < 0$ — на $\dot{u}_\theta \leq 0$. Условие $F > 0$ на Γ_1' с учетом $q_\rho < 0$ равносильно неравенствам $f_1 < 0$ и $f_2 < 0$, линейным относительно искомым функций.

Разбиения $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ и $\Gamma_1 = \Gamma_1' \cup \Gamma_1''$ полностью определяются по величинам усилий q_ρ , q_θ в текущий момент времени. Происходящее в текущий момент изменение действующей на пластину внешней нагрузки влияет только на разбиение Γ_1'' на части, где $\dot{f} < 0$ и $\dot{f} = 0$. Области Γ_1' , Γ_1'' , Γ_2 , вид функции f (f_1 или f_2) на Γ_1'' , усилия q_ρ , q_θ на Γ_1 зависят от истории нагружения пластины и находятся из решения задачи.

Если в (2.7) подставить выражения для u_ρ , u_θ , q_ρ , q_θ из (2.3) и $u_{\rho c}$ из (2.5), то с учетом (2.2) радикал ρ из (2.7) исключается, в коэффициентах при u_r , u_φ , σ_{rr} , $\sigma_{r\varphi}$ будет содержаться параметр ε . Поэтому решение, полученное с использованием (2.7), может нелинейно зависеть от ε .

Краевые условия (b). Аппроксимируем условие непроникания (2.4) неравенством $u_r \geq u_{rc}$ ($u_{rc} = -c(1 + \cos \varphi)$). Оно более сильное, чем (2.4). Далее краевые условия формулируются аналогично (2.7) с заменой u_ρ , u_θ , q_ρ , q_θ , $u_{\rho c}$ соответственно на u_r , u_φ , σ_{rr} , $\sigma_{r\varphi}$, u_{rc} . Теперь, в отличие от (2.7), параметры зазора c , ε будут содержаться в краевых условиях только в выражении для u_{rc} и войдут линейно в слагаемые, не зависящие от искомым функций.

Введем обозначения нормальных и касательных компонент смещений и усилий, общие для обоих вариантов краевых условий на Γ , принимая в них для (a) $u = u_\rho$, $v = u_\theta$, $p = q_\rho$, $q = q_\theta$, $u_c = u_{\rho c}$, для (b) $u = u_r$, $v = u_\varphi$, $p = \sigma_{rr}$, $q = \sigma_{r\varphi}$, $u_c = u_{rc}$. Тогда краевые условия в обоих вариантах представляются в виде

$$u = u_c, \quad \dot{v} = 0, \quad p < 0, \quad F > 0 \quad \text{на } \Gamma_1',$$

$$u = u_c, \quad f = 0, \quad p < 0, \quad \begin{cases} \dot{v} = 0, & \text{если } \dot{f} < 0, \\ Q \geq 0, & \text{если } \dot{f} = 0, \end{cases} \quad \text{на } \Gamma_1'', \quad (2.8)$$

$$p = q = 0, \quad u \geq u_c \quad \text{на } \Gamma_2,$$

где $f_1 = \mu p + q$; $f_2 = \mu p - q$; $Q = q \dot{v}$; области Γ_1' , Γ_1'' , Γ_2 и функция f (f_1 или f_2) на Γ_1'' в вариантах (a) и (b) могут быть неодинаковыми. В варианте (a) краевые условия (2.8) совпадают с (2.7).

Мощность рассеяния энергии $\dot{\Phi}_f$, мощность $\dot{\Phi}$ работы тянущей силы P и скорость изменения энергии деформации пластины $\dot{\Phi}_e$ связаны соотношениями

$$\dot{\Phi}_f = \int_{\Gamma_1''} Q d\Gamma = \dot{\Phi} - \dot{\Phi}_e, \quad \dot{\Phi} = P \dot{w}, \quad P = \int_0^H \sigma_{11} dx_2,$$

где P вычисляется при $x_1 = L_2$. Интегрируя по τ , находим $\Phi = \Phi_f + \Phi_e$,

$$\Phi_e = \int_{\Omega} \frac{E}{2(1-\nu^2)} [e_{11}^2 + 2\nu e_{11}e_{22} + e_{22}^2 + 2(1-\nu)e_{12}^2] dx_1 dx_2.$$

Работа, произведенная силой P , тратится на энергию деформации пластины Φ_e и энергию Φ_f , рассеянную на трение.

Итак, при наличии трения и зазора имеем две контактные задачи для уравнений (1.1) с краевыми условиями (2.1), (2.8) в вариантах (а) и (б). В каждый момент времени их решения зависят от истории нагружения пластины. Методы решения задач в обоих вариантах аналогичны.

В случае отсутствия зазора $\varepsilon = 0$, если величина смещения w монотонно возрастает от нулевого значения в исходном недеформированном состоянии пластины, из (2.8) получим для обоих вариантов одни и те же краевые условия

$$\begin{aligned} u = v = 0, \quad p < 0, \quad F > 0 \quad \text{на } \Gamma_1', \\ u = 0, \quad f = 0, \quad p < 0, \quad Q_1 \geq 0 \quad \text{на } \Gamma_1'', \\ p = q = 0, \quad u \geq 0 \quad \text{на } \Gamma_2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Решение задачи для уравнений (1.1) с краевыми условиями (2.1), (2.9) линейно пропорционально w . Области Γ_1' , Γ_1'' , Γ_2 образуются в начальный момент времени сразу после задания какого угодно малого значения w и с увеличением его не изменяются. Каждое равенство и неравенство в (2.9) сохраняются при любом $w > 0$. Функция f в каждой точке на Γ_1'' в силу $f = \dot{f} = 0$ при любом w остается одной и той же: f_1 или f_2 . С учетом линейной зависимости q, v от w условие $Q \geq 0$ в (2.8) заменяется на условие неотрицательности плотности рассеянной энергии ($Q_1 = 0,5qv \geq 0$).

Из (2.8), (2.9) при $\mu \rightarrow 0$ вытекают краевые условия в предельных задачах (при отсутствии трения) [2].

Контактная задача для пластины со штифтом в [2, 4, 5] решается без учета трения, в [6] — с кулоновым трением, но при задании разностей смещений края отверстия и контура упругого штифта без учета истории их взаимодействия.

3. Формулировка задач равновесия с заданной областью контакта. Введем на контуре отверстия Γ новую переменную $\eta = 1 - \varphi/\pi$ ($0 \leq \eta \leq 1$), возрастающую вдоль Γ в направлении слева направо от $\eta = 0$ в точке $(-R, 0)$ до $\eta = 1$ в точке $(R, 0)$ (рис. 1).

Далее, рассматривая нагружение пластины посредством монотонно возрастающего смещения ее правой стороны w , в развиваемом алгоритме предполагаем, что области Γ_1' , Γ_1'' , Γ_2 занимают на Γ отрезки соответственно $0 \leq \eta \leq b$, $b < \eta \leq l$, $l < \eta \leq 1$ с граничными точками $\eta = b$ и $\eta = l$, следовательно, область контакта $\Gamma_1 = \Gamma_1' \cup \Gamma_1''$ есть отрезок $0 \leq \eta \leq l$. Во всех точках Γ_1'' силы трения $(-q)$ считаются действующими вдоль Γ_1'' в одном и том же направлении, и в связи с этим полагается равной нулю одна и та же функция f (f_1 или f_2). Значения b, l могут зависеть от смещения w , зазора ε , коэффициента трения μ и краевых условий (2.8) или (2.9).

Решение задачи для уравнений (1.1) с краевыми условиями (2.1), (2.8) находится при монотонно увеличиваемой длине области контакта l по шагам. В конце каждого шага от τ до $(\tau + \Delta\tau)$ задается значение l в момент $(\tau + \Delta\tau)$. Скорости касательных смещений на Γ в конце шага определяются по формуле $\dot{v} = (v - v_\tau)/\Delta\tau$ (значения в начале шага помечаются индексом τ , а в конце шага — не помечаются). На первом шаге в качестве начальных условий принимается $l = 0, v = 0$ при $\tau = 0$.

Отбросив в (2.8) неравенства, получим краевые условия:

$$\begin{aligned} u = u_c, \quad v = v_\tau \quad \text{при } 0 \leq \eta \leq b, \\ u = u_c, \quad f = 0 \quad \text{при } b < \eta \leq l, \\ p = q = 0 \quad \text{при } l < \eta \leq 1. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь во всех точках отрезка $b < \eta \leq l$ берется одна и та же функция f (f_1 или f_2). Из решения задачи для уравнений (1.1) с краевыми условиями (2.1), (3.1) (называемой в дальнейшем задачей A) определяется состояние равновесия пластины в конце шага с заданной областью контакта.

Введем еще две задачи $A1$ и $A2$, отличающиеся от задачи A только тем, что в краевых условиях задаются:

- при $0 \leq \eta \leq b$ $u = v = 0$ в $A1$, $u = c^{-1}u_c$, $v = c^{-1}v_r$ в $A2$;
- при $b < \eta \leq l$ $u = 0$, $f = 0$ в $A1$, $u = c^{-1}u_c$, $f = 0$ в $A2$;
- при $x_1 = L_2$, $0 \leq x_2 \leq H$ $u_1 = 1$, $u_2 = 0$ в $A1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ в $A2$.

Краевые условия (2.9) без неравенств принимают вид

$$\begin{aligned} u = v = 0 & \quad \text{при} \quad 0 \leq \eta \leq b, \\ u = 0, \quad f = 0 & \quad \text{при} \quad b < \eta \leq l, \\ p = q = 0 & \quad \text{при} \quad l < \eta \leq 1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Задача для уравнений (1.1) с краевыми условиями (2.1), (3.2) имеет решение, линейно-пропорциональное w . Она совпадает с задачей $A1$ при $\varepsilon = 0$ и $w = 1$, одинаковых в обеих задачах значениях b , l и одной и той же функции f (f_1 или f_2), равной нулю на отрезке $b < \eta \leq l$. Ищутся такие b , l , f , при которых ограничения в виде неравенств в (2.9) выполняются.

4. Решение задач. В каждый момент времени в процессе нагружения пластины для отыскания решения применяется следующий алгоритм. Пластина разбивается на лагранжевы конечные элементы (четырёхугольные, девятиузловые, изопараметрические [7]) (рис. 1). В каждом разбиении было около 160 конечных элементов и 1 300 искоемых переменных — компонент смещений узлов элементов.

Используя принцип возможных перемещений, формулируем системы конечно-элементных уравнений задач A , $A1$, $A2$. Они имеют одну и ту же несимметрическую матрицу коэффициентов при искоемых переменных и отличаются друг от друга только правыми частями, определяемыми по заданным краевыми условиями значениям смещений на контуре пластины. Для вычисления интегралов по площади элемента при интегрировании по каждой локальной координате применяется трехточечная квадратурная формула Гаусса. Сформулированные системы уравнений решаются методом исключения Гаусса [7, 8] с учетом ленточности матрицы коэффициентов и симметричности большей ее части относительно главной диагонали. Матрица вычисляется и приводится к треугольному виду только один раз совместно для обеих задач $A1$ и $A2$.

Окружные напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}$ в узлах на Γ находятся путем интерполирования на эти узлы значений напряжений, вычисленных в точках интегрирования по площади элементов. Нормальные и касательные усилия p , q определяются через действующие в узлах обобщенные силы в соответствии с принципом возможных перемещений.

В конечно-элементной формулировке ищем решение задачи A как сумму решений задач $A1$ и $A2$ с коэффициентами w , c вида

$$\mathbf{U} = w\mathbf{U}^{(1)} + c\mathbf{U}^{(2)}. \quad (4.1)$$

Здесь и ниже через $\mathbf{U}$ обозначаются глобальные векторы искоемых переменных — компонент смещений узлов элементов; в круглых скобках индексы 1, 2 соответствуют задаче $A1$ или $A2$.

Согласно (4.1), имеем

$$f_b = w f_b^{(1)} + c f_b^{(2)}, \quad p_l = w p_l^{(1)} + c p_l^{(2)}, \quad (4.2)$$

где индексами b, l помечены значения f, p в точках $\eta = b, l$ соответственно; берется та функция f (f_1 или f_2), которая в (3.1) приравнивается к нулю на отрезке $b < \eta \leq l$.

В соответствии с принципом Буссинеска [3, 9] полагаем $p_l = 0$. Из (4.2) определяем

$$w = -c p_l^{(2)} / p_l^{(1)}. \quad (4.3)$$

Подставляя (4.3) в (4.1), итерациями найдем такое положение точки $\eta = b$, при котором $f_b = 0$. Если функция f (f_1 или f_2) выбрана верно, то получим U как решение задачи для уравнений (1.1) с краевыми условиями (2.1), (2.8). Ограничения в виде неравенств в (2.8) выполняются, w есть смещение, реализующее заданную область контакта. На отрезке $b < \eta \leq l$ имеем $f = 0$, $f_\tau \leq 0$ и приближенно $\dot{f} = (f - f_\tau) / \Delta\tau \geq 0$, поэтому проверяется только неотрицательность Q , случай $\dot{f} < 0$ не рассматривается. Переход от скольжения в начале шага в момент τ к прилипанию в конце шага с выполнением неравенства $\dot{f} < 0$ может осуществляться в точках отрезка от $\eta = b_\tau$ до $\eta = b$, когда $b_\tau < b$. Определив состояние равновесия пластины в конце шага, можно перейти к следующему шагу по времени.

Отметим, что в конечно-элементной формулировке краевые условия переносятся на дискретное множество узлов, включающее точки $\eta = b, l$. Условия прилипания $u = u_c$, $v = v_\tau$ задаются в узлах при $0 \leq \eta \leq b$, скольжения $u = u_c$, $f = 0$ — при $b < \eta \leq l$, свободного края $p = q = 0$ — при $l < \eta \leq 1$. Удовлетворение в соответствии с принципом Буссинеска равенствам $f_b = p_l = 0$ приводит к выполнению условий прилипания и скольжения в точке $\eta = b$ и условий скольжения и свободного края в точке $\eta = l$. В этом смысле имеется непрерывный переход вдоль Γ от одних краевых условий к другим.

В варианте (b) векторы $U^{(b1)}$, $U^{(b2)}$ не зависят от c, ε , решение задачи $U^{(b)}$, как следует из (4.1), (4.3), линейно-пропорционально зазору c . В варианте (a) коэффициенты конечно-элементных уравнений задач $A1, A2$ и векторы $U^{(a1)}$, $U^{(a2)}$ зависят от ε , поэтому решение $U^{(a)}$ может зависеть от ε нелинейно. Индексы a и b в круглых скобках соответствуют вариантам краевых условий (a) и (b). При каждом новом значении c задачи $A1, A2$ и контактная задача в целом в варианте (a) решаются заново.

Решаем отдельно задачу $A1$ в варианте (b). Выбираем подходящую функцию f (f_1 или f_2), равную нулю на отрезке $b < \eta \leq l$, и находим итерациями такие значения $l = l_*$, $b = b_*$, что $p_l^{(b1)} = f_b^{(b1)} = 0$. Тогда, согласно принципу Буссинеска, получим $\bar{U}^{(b1)} = U_*^{(b1)}$ как решение задачи для уравнений (1.1) с краевыми условиями (2.1), (2.9) при $w = 1$.

5. Результаты счета. Переходя к безразмерным величинам, x_1, x_2, r умножим на обезразмеривающий множитель R^{-1} , смещения и зазор c — на L_0^{-1} , деформации — на $\omega = RL_0^{-1}$, напряжения — на ωE^{-1} , величины энергий Φ_e, Φ_f и работы Φ — на $E^{-1} L_0^{-2}$ (L_0 — постоянная, имеющая размерность длины). Для обезразмеренных величин сохраним прежние обозначения. Теперь $R = 1$, $H = L_1 = 2,5$, $L_2 = 5$, $c = \omega \varepsilon$. Коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

В обезразмеренные уравнения и краевые условия в качестве безразмерных параметров, связанных с величиной зазора, в варианте (a) войдут c и ε , а в варианте (b) — только c . В обоих вариантах по заданным c и ε можно определить $\omega = c\varepsilon^{-1}$ и перейти от безразмерных величин искомых функций к размерным.

В случае отсутствия зазора имеем $c = \varepsilon = 0$. С учетом того, что решение линейно-пропорционально w , полагаем $w = 1$. Возвращаясь к размерным величинам и задавая w, R , найдем $L_0 = w$ и $\omega = RL_0^{-1}$.

Рассмотрим решение контактной задачи с трением в случае отсутствия зазора, полученное для уравнений (1.1) с краевыми условиями (2.1), (2.9) при $\varepsilon = 0$, $\mu = 0,3$, $w = 1$, $P = 0,2472$, $l = l_* = 0,4755$, $b = b_* = 0,01887$ (углы $\pi l, \pi b$ равны $85,3$ и $3,2^\circ$). Разбие-

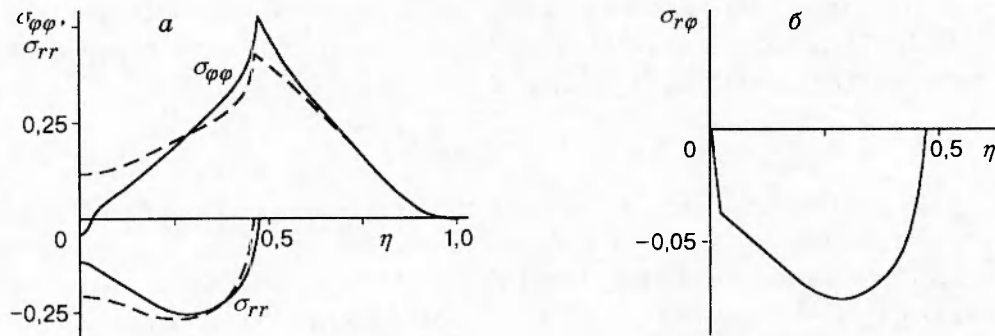


Рис. 2

ние пластины на конечные элементы показано на рис. 1. Имеем 7 элементов по ширине пластины и 22 по длине, всего 154 элемента.

На рис. 2 сплошными кривыми представлены напряжения σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$ и $\sigma_{r\varphi}$ на Γ как функции от η . Штриховые кривые на рис. 2, а, где они не сливаются со сплошными, есть σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$ в отсутствие трения ($\varepsilon = 0$, $\mu = 0$, $w = 1$, $P = 0,2317$, $l = 0,4619$). Распределения σ_{rr} в обеих задачах (с трением и без него) не косинусоидальные. Имеем $\sigma_{rr} = \sigma_{r\varphi} = 0$ при $l \leq \eta \leq 1$. Максимумы $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi}^*$ достигаются на свободной части Γ вблизи точек $\eta = l$, максимумы по абсолютной величине σ_{rr} — во внутренних точках области контакта. Вследствие трения около точки $\eta = 0$ имеется небольшая область, где $\sigma_{rr} < 0$, $\sigma_{\varphi\varphi} < 0$. Величина $\sigma_{\varphi\varphi}^*$ и коэффициент концентрации напряжений $k = HP^{-1}\sigma_{\varphi\varphi}^*$ возрастают от $\sigma_{\varphi\varphi}^* = 0,4280$, $k = 4,615$ при $\mu = 0$ до $\sigma_{\varphi\varphi}^* = 0,5281$, $k = 5,338$ при $\mu = 0,3$. Максимум по абсолютной величине σ_{rr} уменьшается. Энергия $\Phi_f = 0,005288$ мала по сравнению с энергией деформации пластины $\Phi_e = 0,1183$ и составляет 4,5%. В отсутствие трения $\Phi = \Phi_e = 0,1159$.

С ростом μ при $\mu \leq 1$ в решении контактной задачи с трением в отсутствие зазора области контакта и прилипания удлиняются, причем значение b пренебрежимо мало, пока $\mu < 0,2$ (рис. 3). Значения l , P , $\sigma_{\varphi\varphi}^*$ возрастают почти линейно по μ . Имеем $l = 0,5027$, $b = 0,1893$ при $\mu = 1$. Увеличение энергии Φ_f с ростом μ замедляется.

Решение $U^{(b)}$ задачи для уравнений (1.1) с краевыми условиями (2.1), (2.8) в варианте (b) вычислено с переменными шагами по l от 0,03 до 0,45 за 31 шаг при $c = 1$, $\mu = 0,3$. При начальном значении $l = 0,03$ в области прилипания задавались нулевые касательные

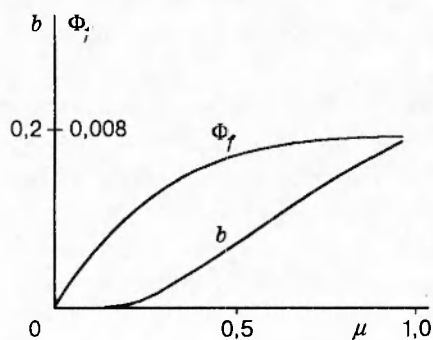


Рис. 3

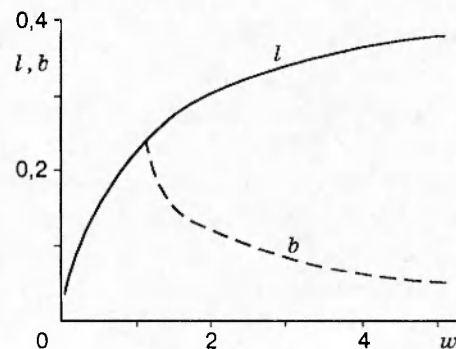


Рис. 4

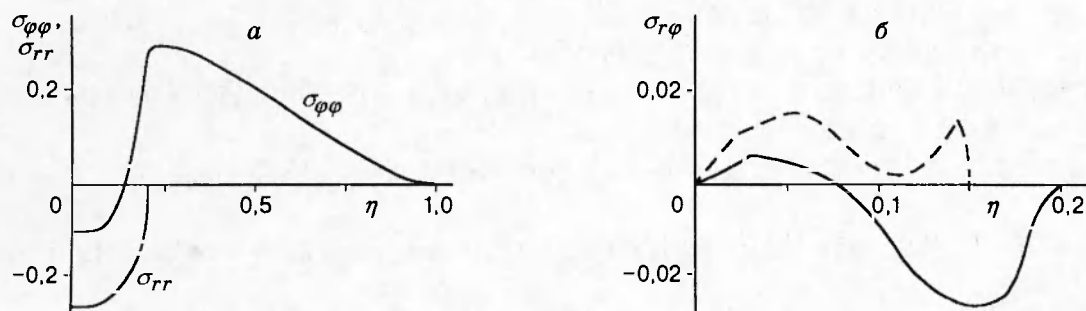


Рис. 5

смещения.

На рис. 4 показаны функции l, b в зависимости от w . При $l \leq 0,24$ области скольжения малы, графики l, b почти сливаются и представлены сплошной кривой. Когда длина области скольжения слишком мала, полагаем $l = b$. Итерациями найдены последовательно одно за другим значения $l = b = 0,1910$ и $0,1997$ такие, что $\sigma_{rr} = \sigma_{r\varphi} = 0$ в точке $\eta = l = b$. При $l < 0,1910$ в областях скольжения имеем $f_1 = 0, \dot{u}_\varphi > 0, \sigma_{r\varphi} > 0$, а при $l > 0,1997$ — $f_2 = 0, \dot{u}_\varphi < 0, \sigma_{r\varphi} < 0$. Начиная с $l = 0,24$, при возрастании l длина области прилипания b уменьшается. Энергия Φ_f пренебрежимо мала, пока $l < 0,24$.

На рис. 5 сплошными линиями представлены зависимости $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}$ и $\sigma_{r\varphi}$ на Γ при $l = b = 0,1997, w = 0,8045, P = 0,1392$, штриховая кривая соответствует $l = 0,15$. Значения $\sigma_{r\varphi}$ в области контакта изменяются в процессе нагружения пластины от положительных к отрицательным (рис. 5, б).

Решение	μ	l	b	P	Φ_e	$\sigma_{\varphi\varphi}^*$
$U^{(b)}$	0,3	0,15	0,1435	0,07831	0,01797	0,1641
$U^{(a)}$	0,3	0,1452	0,1422	0,07775	0,01785	0,1628
$U^{(b)}$	0	0,1511	0	0,07835	0,01796	0,1664

Разность между решениями $U^{(a)}$ и $U^{(b)}$ задачи для уравнений (1.1) с краевыми условиями (2.1), (2.8) в вариантах (а) и (б), вычисленными при одном и том же значении w , мала. При небольших w эти решения незначительно отличаются от решений контактных задач в вариантах (а) и (б) с тем же зазором в отсутствие трения. В таблице для $c = 1, \epsilon = 0,05, w = 0,4883$ приведены значения $l, b, P, \Phi_e, \sigma_{\varphi\varphi}^*$, вычисленные по решениям $U^{(a)}, U^{(b)}$, как при наличии трения, так и при его отсутствии ($\mu = 0$). Краевые условия в варианте (а) по сравнению с вариантом (б) менее стеснительны для пластины: значения $l, b, P, \Phi_e, \sigma_{\varphi\varphi}^*$ в $U^{(a)}$ меньше, чем в $U^{(b)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975.
2. Солодовников В. Н. Решение контактной задачи для пластины со штифтом // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 1. С. 120–127.
3. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989.
4. Mangalgiri P. D., Dattaguru B., Rao A. K. Finite element analysis of moving contact in mechanically fastened joints // Nucl. Eng. and Design. 1984. V. 78. P. 303–311.

5. **Naik R. A., Crews J. H. (Jr.)** Stress analysis method for a clearance-fit bolt under bearing loads // AIAA J. 1986. V. 24, N 8. P. 1348–1353.
6. **Hyer M. W., Klang E. C.** Contact stresses pin-loaded orthotropic plates // Intern. J. Solids and Struct. 1985. V. 21, N 9. P. 957–975.
7. **Bathe K. J.** Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1982.
8. **Фадеев Д. К., Фадеева В. Н.** Вычислительные методы линейной алгебры. М.; Л.: Физматгиз, 1963.
9. **Boussinesq J.** Application des Potentials à l'Étude de l'Équilibre et du Mouvement des Solides Élastiques. Paris: Gauthier-Villard, 1885.

Поступила в редакцию 27/X 1996 г.
