УДК 532.5

РАЗВИТИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ ПОВЕРХНОСТИ ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО РАЗРЫВА МЕЖДУ НЕОДНОРОДНЫМИ ПОТОКАМИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. Г. Куликовский, Н. А. Куликовский, Н. Т. Пащенко

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 119991 Москва, Россия
E-mails: kulik@mi-ras.ru, nkul.au@gmail.com, panel@flovers.klever.net

С учетом поверхностного натяжения исследуется развитие возмущений поверхности тангенциального разрыва, разделяющего два медленно меняющихся в пространстве стационарных потока идеальной несжимаемой жидкости. Возмущения описываются с помощью комплексных уравнений Гамильтона. Получены зависимости амплитуды возмущений от координаты и времени.

Ключевые слова: тангенциальный разрыв, дисперсионное уравнение, интеграл Фурье, метод перевала, комплексные уравнения Гамильтона.

DOI: 10.15372/PMTF20190203

Введение. Целью настоящей работы является изучение возможности применения методов геометрической оптики для анализа развития возмущений на неустойчивом медленно меняющемся в пространстве фоне в случаях, не приводящих к асимптотике в виде растущих собственных функций [1–6].

Рассматривается задача об эволюции линейных возмущений тангенциального разрыва с переменной величиной разрыва скорости. Полагается, что поверхность тангенциального разрыва разделяет потоки идеальной несжимаемой жидкости различной плотности (рис. 1) и на этой поверхности действует поверхностное натяжение. Начальное возмущение считается локализованным в области, размер которой значительно меньше характерного размера области неоднородности течения. Аналогичная задача рассматривалась в [7] для случая тангенциального разрыва, разделяющего два однородных потока, причем использовалось дисперсионное уравнение в виде, полученном Рэлеем [8], но без учета силы тяжести.

1. Постановка задачи. Введем следующие параметры невозмущенного течения:

$$\begin{aligned} &y < 0, \qquad \rho = \rho_1, \quad v_{1x} = v_0\lambda_1 x, \quad v_{1y} = -v_0\lambda_1 y, \\ &y > 0, \qquad \rho = \rho_2, \quad v_{2x} = v_0\lambda_2 x, \quad v_{2y} = -v_0\lambda_2 y. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Поскольку это течение плоское ($v_z = 0$), его возмущения также будем полагать плоскими. На оси x имеет место разрыв тангенциальной компоненты скорости. Вследствие равенства давлений по обе стороны разрыва из интеграла Бернулли следует соотношение

$$\rho_1\lambda_1^2 = \rho_2\lambda_2^2.$$

© Куликовский А. Г., Куликовский Н. А., Пащенко Н. Т., 2019

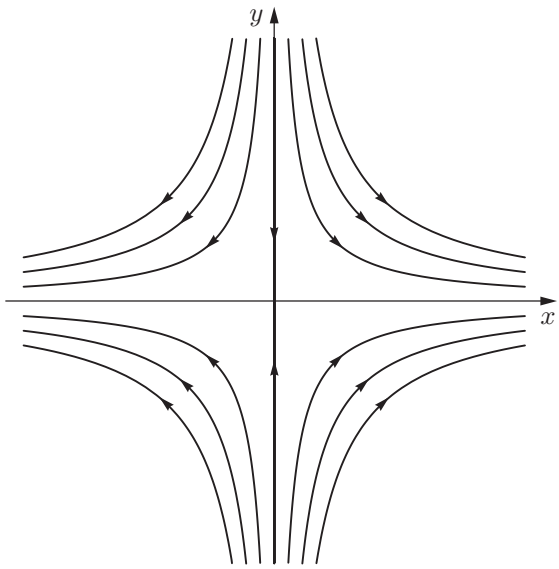

Рис. 1. Геометрия области течения

Будем полагать, что на поверхности разрыва действует поверхностное натяжение σ, при учете которого рассматриваемая задача становится корректной. Сила тяжести не учитывается. В случае если возмущения развиваются на однородном фоне, дисперсионное уравнение Рэлея имеет вид [8, 9]

$$\omega = Ak \pm \sqrt{Bk^3 - Ck^2}\,, \tag{1.2}$$

где

$$A = \frac{v_{1x}\rho_1 + v_{2x}\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}, \qquad B = \frac{\sigma}{\rho_1 + \rho_2}, \qquad C = \frac{\rho_1\rho_2(v_{1x} - v_{2x})^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2}.$$

Уравнение (1.2) справедливо при $\operatorname{Re} k > 0$, поскольку модуль возмущения потенциала скорости, зависящего от x как e^{ikx}, зависит от координаты y как $\mathrm{e}^{-y\operatorname{Re} k}$ в области $y > 0$ и как $\mathrm{e}^{y\operatorname{Re} k}$ в области $y < 0$. Условие $\operatorname{Re} k > 0$ обеспечивает затухание возмущений при $|y| \to \infty$.

В случае если неоднородность потока мала и не оказывает существенного влияния на поведение возмущений, на малых интервалах времени и при незначительных изменениях координаты x можно использовать локальное дисперсионное уравнение (1.2), в котором с учетом зависимостей (1.1) коэффициенты A и C можно представить в виде

$$A = rx, \quad C = qx^2, \quad r = v_0\,\frac{\rho_1\lambda_1 + \rho_2\lambda_2}{\rho_1 + \rho_2}, \quad q = v_0^2\,\frac{\rho_1\rho_2(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2}.$$

Для использования уравнения (1.2) и основанных на нем асимптотических методов необходимо, чтобы характерный пространственный масштаб возмущений (наиболее быстрорастущих) был много меньше характерного масштаба фона, на котором развивается возмущение. В предположении, что изучается возмущение при значениях x порядка единицы, характерные значения $|k|$ имеют порядок, определяемый приравниванием к нулю подкоренного выражения в (1.2). При этом условие применимости асимптотических методов принимает вид

$$\lambda_{1,2} \ll |k_*|, \qquad |k_*| \sim \frac{v_0^2\rho_1\rho_2(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{\sigma(\rho_1 + \rho_2)} \tag{1.3}$$

($|k_*|$ — модуль характерного значения k_*). Для выполнения условия (1.3) достаточно предположения о малости поверхностного натяжения σ или о малости $(\lambda_1-\lambda_2)/(\lambda_1+\lambda_2)$. Будем считать, что предположение о медленном изменении фона выполняется.

Вводя новые переменные

$$\omega = \sqrt{q}\,\omega', \qquad k = \Big(\frac{q}{B}\Big)^{1/3} k', \qquad x = \Big(\frac{B}{q}\Big)^{1/3} x', \qquad t = \frac{t'}{\sqrt{q}}, \tag{1.4}$$

приведем дисперсионное уравнение к безразмерному виду

$$\omega = f(k,x), \qquad f(k,x) = akx \pm \sqrt{k^3 - k^2x^2} \tag{1.5}$$

с единственным коэффициентом $a = A/\sqrt{q} = (\lambda_1+\lambda_2)/|\lambda_1-\lambda_2| > 1$ (штрихи у переменных ω, k, x опускаются).

Согласно асимптотическим представлениям, основанным на использовании метода Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна [10, 11], изучается множество решений следующего вида:

$$C\,\mathrm{e}^{-i\psi(x,t)} = C\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{e}^{i\varphi(\omega,x)}, \qquad C = \mathrm{const}, \quad \omega = \mathrm{const}\,. \tag{1.6}$$

Производные функции $\partial\psi(x,t)$

$$\omega = \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}, \qquad k = -\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x} \tag{1.7}$$

при медленном изменении фона и параметров решения представляют собой медленно меняющиеся функции x и t, приближенно удовлетворяющие дисперсионному уравнению. Это позволяет использовать асимптотический метод. Подставляя в дисперсионное уравнение соотношения (1.7), получаем уравнение в частных производных первого порядка относительно функции $\psi(x,t)$, которое называется уравнением Гамильтона — Якоби.

Используя дисперсионное уравнение (1.5), записанное в виде, разрешенном относительно ω, получаем

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = f\Big(-\frac{\partial\psi}{\partial x}, x\Big). \tag{1.8}$$

При решении уравнения (1.8) первого порядка обычно используется метод характеристик:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial k}, \quad \frac{dk}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \omega - k\,\frac{dx}{dt}. \tag{1.9}$$

Первые два уравнения (1.9) представляют собой уравнения Гамильтона с гамильтонианом $f(k,x)$. В отличие от задач классической механики в задачах о распространении растущих или затухающих возмущений $f(k,x)$ — комплексная аналитическая функция, соответственно, решения уравнений Гамильтона $x(t)$, $k(t)$ в общем случае являются комплексными. Известно, что уравнение Гамильтона имеет первый интеграл $f(k(t),x(t)) = \mathrm{const}$, который можно использовать вместо одного из первых двух уравнений (1.9).

Кривую $x = x(t)$ на комплексной плоскости x, являющуюся решением уравнений (1.9), будем называть траекторией Гамильтона или лучом.

В качестве начальных условий для уравнений (1.9) будем задавать действительное значение $x = x_0$ и некоторое, в общем случае комплексное, значение $k = k_0$. Функция $\psi(x,t)$ находится из третьего уравнения (1.9) при нулевом начальном условии, при котором экспонента (1.6) в начальной точке равна единице.

С использованием первого интеграла третье уравнение (1.9) можно проинтегрировать при фиксированном значении ω:

$$\psi = \omega t - \int\limits_{x_0}^{x} k(\omega, x')\, dx'. \tag{1.10}$$

Далее исследуем функцию ψ, причем $\operatorname{Im}\psi$ будем считать главным приближением показателя усиления возмущений, вышедших при $t = 0$ из начальной точки x_0 и пришедших в точку x в момент времени t. Заметим, что в общем случае такая трактовка значения $\operatorname{Im}\psi$ является приближенной, однако соответствует асимптотически главной части усиления возмущений при отсутствии фокусировок и каустик, связанных со сгущением траекторий Гамильтона. В этих случаях следует рассматривать более точное приближение.

Решения уравнений (1.9) можно представлять следующим образом. Находится траектория $x(t)$ и значения $k(t)$ и $\psi(t)$ на ней. Вообще говоря, траектория является комплексной, однако могут существовать моменты времени t, когда величина $x(t)$ принимает действительные значения. Это означает, что одной комплексной траектории на действительной плоскости (x, t) соответствует одна или некоторое множество дискретных точек, в которых известны k и ψ. Задавая x_0 и всевозможные комплексные k_0, т. е. два действительных числа $\operatorname{Re} k_0$ и $\operatorname{Im} k_0$, можно найти показатель усиления на всей действительной плоскости (x, t) или ее части.

Далее исследуем возмущения, которые первоначально были сосредоточены в малой окрестности некоторой точки $x = x_0$.

Рассмотрим другой подход к выводу уравнений Гамильтона. В сделанных предположениях возмущение поверхности тангенциального разрыва можно искать в виде интеграла Фурье [12]

$$\eta(x, t) = \int A(\omega)\, \mathrm{e}^{-i\psi(\omega, x_0, x, t)}\, d\omega, \tag{1.11}$$

где $y = \eta(x, t)$ — уравнение поверхности тангенциального разрыва; функция $A(\omega)$ определяется начальным возмущением. В случае если x и t велики, значение функции $\psi(\omega, x_0, x, t)$ также велико и для оценки интеграла (1.11) при заданных значениях x_0, x, t можно использовать метод перевала [13]. Координата точки перевала на комплексной плоскости ω удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \psi}{\partial \omega} = 0.$$

Используя (1.10), получаем [5, 6]

$$t = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial k}{\partial \omega}(\omega, x)\, dx'. \tag{1.12}$$

Далее рассмотрим решения уравнения (1.12) относительно ω в зависимости от x_0, x, t. Если это решение является точкой перевала функции $\psi(\omega, x_0, x, t)$ при заданных x_0, x, t, то значение функции в этой точке определяет с точностью до конечного множителя, зависящего от $\partial^2\psi/\partial^2\omega$ и значения $A(\omega)$ в данной точке, асимптотику интеграла (1.10).

Дифференцируя равенство (1.12) по t и полагая x_0 и ω постоянными, получаем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \omega(k, x)}{\partial k}, \qquad \omega(k(t), x(t)) = \mathrm{const}\,. \tag{1.13}$$

Уравнения (1.13) представляют собой систему уравнений Гамильтона, поскольку второе равенство (1.13) с учетом первого уравнения дает второе уравнение Гамильтона

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{\partial\omega}{\partial x}.$$

Заметим, что в соответствии с методом перевала исходным соотношением для нахождения асимптотики интеграла (1.11) является уравнение (1.12), где x_0, x, t — действительные числа. Траектории Гамильтона, т. е. решения уравнения (1.9), где t действительно на всей траектории, может не существовать, в то время как уравнение (1.12) выполняется. Можно расширить понятие решения уравнения Гамильтона, вводя комплексные приращения t таким образом, чтобы суммарное изменение t было действительным. Однако в дальнейшем, если не оговорено иное, будем считать t в уравнениях Гамильтона действительным.

2. Преобразование уравнений Гамильтона. Полагая

$$\Omega = \omega/x^3, \qquad K = k/x^2, \tag{2.1}$$

дисперсионное уравнение (1.5) представим в виде

$$\Omega = aK \pm \sqrt{K^3 - K^2}\,. \tag{2.2}$$

Первое уравнение Гамильтона (1.9)

$$\frac{dx}{dt} = \Big(\frac{\partial\omega}{\partial k}\Big)\Big|_{x=\mathrm{const}}$$

запишем в виде

$$\frac{d\,(\ln x)}{dt} = \frac{d\Omega}{dK}. \tag{2.3}$$

Логарифмируя первое равенство (2.1) и используя первый интеграл уравнений Гамильтона $\omega(k(t), x(t)) = \mathrm{const}$, получаем

$$\frac{d\,(\ln x)}{dt} = -\frac{1}{3}\,\frac{d\,(\ln\Omega)}{dt} = -\frac{1}{3}\,\frac{d\,(\ln\Omega)}{dK}\,\frac{dK}{dt}. \tag{2.4}$$

Подставляя выражение (2.4) в равенство (2.3), имеем

$$\frac{dK}{dt} = -3\Omega(K). \tag{2.5}$$

Заметим, что с учетом преобразований (2.1) уравнение (2.5) эквивалентно второму уравнению (1.9). Первое уравнение (1.9) следует из (2.5) при условии $\omega = \mathrm{const}$.

3. Интегральные кривые уравнения для K. Рассмотрим уравнение (2.5) с начальным условием $K = K_0 = K(0)$. Функция $\Omega(K)$ имеет две ветви $\Omega_+(K)$ и $\Omega_-(K)$, соответствующие ветвям корня квадратного в равенстве (2.2). Линию разреза проведем по действительной оси K от 1 до ∞, так чтобы на разрезе обе ветви являлись действительными. Ветвь $\Omega_+(K)$ соответствует на верхнем берегу разреза арифметическому корню в равенстве (2.2). В дальнейшем, если не оговорено иное, в уравнении (2.5) под $\Omega(K)$ понимается ветвь $\Omega_+(K)$. Решая уравнение (2.5) при $\Omega(K) = \Omega_-(K)$, получаем интегральные кривые, комплексно-сопряженные с кривыми, соответствующими Ω_+, в случае если начальные условия являются комплексно-сопряженными. Комплексно-сопряженным является также значение $\psi(t)$. Интегральные кривые уравнения (2.5) при $a = 1{,}2$ показаны на рис. 2.

Рассмотрим некоторые особенности поля интегральных кривых уравнения (2.5). Уравнение имеет две особые точки O, A (см. рис. 2): узел в точке $K_A = 1 + a^2$ (при

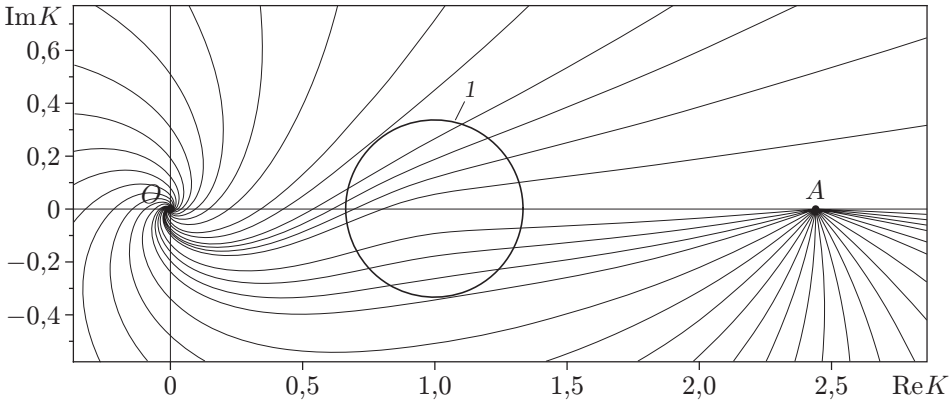

Рис. 2. Интегральные кривые уравнения (2.5) для $K(t)$ при $a = 1{,}2$:
1 — экстремальная окружность

$a = 1{,}2$, $K_A = 2{,}44$), расположенной на нижней границе разреза; фокус в начале координат. Все интегральные кривые выходят из узла и входят в фокус, при этом значение t на кривых меняется от $-\infty$ в узле до ∞ в фокусе.

В окрестности точки A уравнения имеют вид

$$\frac{dK}{dt} = \gamma(K - K_A), \qquad \gamma = \frac{3(a^2+1)}{2a}.$$

При $a = 1{,}2$ величина $\gamma = 3{,}05$. В окрестности фокуса уравнение имеет вид

$$\frac{dK}{dt} = -3(a+i)K.$$

В окрестности $K = \infty$ поведение интегральных кривых описывается уравнением

$$\frac{dK}{dt} = -3\sqrt{K^3}\,. \tag{3.1}$$

Интегральные кривые уравнения (3.1) в полярной системе координат $r = |K|$, $\varphi = \arg K$ задаются равенством

$$r = c(\sin(\varphi/2))^2$$

(c — постоянная интегрирования). Все интегральные кривые уравнения (3.1) подобны. При этом время прохождения точкой $K(t)$ подобных отрезков различных интегральных кривых тем меньше, чем дальше рассматриваемый отрезок от начала координат.

Интегральные кривые $K(t)$ уравнения (2.5) имеют точки перегиба на окружности $K = 1 + \mathrm{e}^{i\theta}/3$ (θ — действительное число). В этих точках на интегральных кривых $\operatorname{Im} d\Omega/dK = 0$ выражение $d\,(\arg\Omega(K))/dt = d\,(\operatorname{Im}[\ln\Omega(K)])/dt$ обращается в нуль и меняет знак. Действительно, с учетом (2.5) на интегральной кривой выполняется равенство

$$\frac{d\,(\ln\Omega)}{dt} = \frac{1}{\Omega}\frac{d\Omega}{dK}\frac{dK}{dt}, \qquad \frac{d\Omega}{dK} = a + \frac{1{,}5K-1}{\sqrt{K-1}}. \tag{3.2}$$

Нетрудно показать, что при $\operatorname{Im} K \neq 0$ последнее выражение в (3.2) является действительным на указанной окружности и только на ней. Оно также действительно при действительных $K > 1$. С учетом (2.5) и того, что величина $d\Omega/dK$ является действительной, производная

$$\frac{d}{dt}\left[\arg(\Omega)\right] = \frac{d}{dt}\Big[\arg\Big(\frac{dK}{dt}\Big)\Big]$$

обращается в нуль, и интегральная кривая имеет на окружности точку перегиба. Внутри окружности производная $d\,[\arg\,(dK/dt)]/dt$ является положительной, а вне ее — отрицательной. Эта величина имеет экстремумы в точках пересечения интегральной кривой с окружностью $K = 1 + \mathrm{e}^{i\theta}/3$, поэтому будем называть эту окружность экстремальной.

Интегральная кривая, проходящая по нижнему берегу разреза по действительной оси от узла в направлении уменьшения K, проходит через точку $K = 1$ и далее уходит с действительной оси. По верхнему берегу разреза по действительной оси K проходит интегральная кривая, на которой K уменьшается при увеличении t, причем изменение K от бесконечности до конечных значений происходит за конечное время. После прохождения точки K по этой интегральной кривой значения $K = 1$ интегральная кривая совпадает с интегральной кривой, пришедшей в точку $K = 1$ по нижнему берегу разреза от точки $K = K_A$.

4. Формула для показателя усиления возмущений. В случае если известно некоторое решение $K = K(t)$ уравнения (2.5), с учетом (2.1) находим

$$\frac{x(t)}{x_0} = \Big(\frac{\Omega_0}{\Omega(t)}\Big)^{1/3}, \qquad \Omega_0 = \Omega(K_0), \qquad \Omega(t) = \Omega(K(t)), \tag{4.1}$$

где $K_0 = K(0)$ — некоторое значение, принимаемое в качестве начального.

Действительная величина x_0 является произвольной и входит в выражение $x(t)$ в качестве множителя, поэтому далее будем рассматривать случай $x_0 = 1$. Согласно (1.10) функцию $\psi(x, t)$ находим следующим образом:

$$\psi(t) = \omega t - \int\limits_1^x k(\omega, x)\,dx = \Omega_0 t - \int\limits_1^x K(\Omega)x^2\,dx. \tag{4.2}$$

Вычислим интеграл в (4.2):

$$\int\limits_1^x K\Big(\frac{\omega}{x^3}\Big)x^2\,dx = \frac{1}{3}\int\limits_1^x K\,dx^3 = \frac{\Omega_0}{3}\int K\,d\Big(\frac{1}{\Omega}\Big).$$

Интегрируя по частям, с учетом (2.5) можно записать

$$\int K\,d\Big(\frac{1}{\Omega}\Big) = 3t + \frac{K(t)}{\Omega(t)} - \frac{K(0)}{\Omega(0)}.$$

В итоге получаем

$$\psi(t) = \frac{1}{3}\Big(K_0 - \frac{K(t)\Omega_0}{\Omega(t)}\Big). \tag{4.3}$$

Таким образом, решения уравнения (2.5) позволяют найти значение $x(t)$, задаваемое равенством (4.1), локальное значение волнового числа $k(t) = x(t)^2K(t)$ и в соответствии с (4.3) комплексный показатель усиления $\psi(t)$.

Поскольку наибольший интерес представляют параметры решения при действительных значениях x, согласно (2.1) аргумент отношения $\Omega_0/\Omega(t)$ должен измениться на кривой $K(t)$ на величину $3n\pi$ (n — целое число). В соответствии с уравнением (2.5) имеем

$$\arg\Big(-\frac{dK}{dt}\Big) = \arg\Omega.$$

Поскольку x принимает действительные значения, касательная к интегральной кривой $K(t)$, проведенной через начальную точку, должна повернуться на угол $-3n\pi$ ($n \geqslant 0$,

знак “минус” указан потому, что поворот касательной на $+3n\pi$ ($n \geqslant 1$) невозможен (см. рис. 2)). Начальное и конечное значения k и K должны удовлетворять неравенствам $\operatorname{Re} k > 0$, $\operatorname{Re} K > 0$, следовательно, значения n являются четными. При $n \neq 0$ значение $k = x^2 K = (\Omega_0/\Omega)^{2/3} K$ обязательно попадает в область $\operatorname{Re} k < 0$ (см. рис. 2), где, как указано выше, решение не имеет физического смысла. Поэтому в дальнейшем рассматривается только случай $n = 0$, т. е. отрезки интегральной кривой, на которых изменение $\arg(dK/dt)$, равное изменению $\arg\Omega$, не превышает 2π, а касательные к интегральным кривым уравнения (2.5) в начальной и конечной точках, соответствующих действительным x, должны быть параллельны.

5. Поведение возмущений при малых значениях времени. Задача о поведении возмущений поверхности тангенциального разрыва в случае, когда параметры течения не зависят от координат и времени, описывается дисперсионным уравнением (1.5):

$$\omega = ak + \sqrt{k^3 - k^2}\,; \tag{5.1}$$

$$a = \frac{v_{1x}\rho_1 + v_{2x}\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}, \qquad x = 1.$$

Уравнение (5.1) совпадает по форме с уравнением (2.2). Поведение возмущений, описываемых уравнением (5.1), исследовалось в работе [7], где рассматривался случай однородного фона. В этом случае траектории $x(t)$ представляют собой действительные лучи $x = x_0 + Ut$, значение ψ на которых задается равенством $\psi = (\omega(k_s) - Uk_s)t$ ($k_s = k_s(U)$ — решение уравнения $d\omega(k)/dk = U$, являющееся точкой перевала функции $\omega(k) - Uk$).

В работе [7] показано, что при $-\sqrt{3} + a < U < \sqrt{3} + a$ величины k_s и $\psi(k_s)$ являются комплексными, причем при указанных значениях U выполняется неравенство $\operatorname{Im}[\omega(k_s) - Uk_s] > 0$, поэтому вдоль соответствующих лучей возмущения увеличиваются по экспоненциальному закону. Значения k_s, соответствующие указанному интервалу значений U, расположены в комплексной плоскости k на окружности $k = 1 + \mathrm{e}^{i\theta}/3$, на которой U монотонно убывает с увеличением θ.

На плоскости (x, t) при указанных значениях U лучи $x - x_0 = Ut$ заполняют угол, внутри которого выполняется условие $\operatorname{Im}\psi(U) > 0$. Вне этого угла вдоль соответствующих лучей, на которых справедливо условие $\operatorname{Im}\psi = 0$, экспоненциальный рост возмущений отсутствует. При более точном рассмотрении с учетом расхождения лучей можно показать, что на таких лучах амплитуда возмущений уменьшается по закону $1/\sqrt{t}$.

В рассматриваемом случае неоднородного тангенциального разрыва при достаточно малых значениях t неоднородность фонового течения еще не оказывает существенного влияния на возмущения и их поведение, как показано ниже, близко к поведению возмущений на однородном фоне.

6. Связь физических переменных X и T с решениями $K(t)$. Используя решения $K(t)$ уравнения (2.5), указанные в п. **5** решения для малых времен можно продлить на конечные промежутки времени.

Рассмотрим интегральную кривую уравнения (2.5) в области $\operatorname{Re} K > 0$, $\operatorname{Im} K < 0$, выходящую из узла $K = 1 + a^2$ и пересекающую экстремальную окружность в двух точках в нижней полуплоскости K. В первой точке пересечения угол ее наклона $\beta = \arg(-dK/dt) = \arg\Omega(K)$ имеет локальный минимум $\beta = \beta_{\min}$, а во второй — локальный максимум $\beta = \beta_{\max}$. Примем первую точку пересечения в качестве начальной точки интегральной кривой $K = K_0$, $t = 0$. Тогда отрезок интегральной кривой, расположенный между начальной точкой и узлом $K = 1 + a^2$, соответствует отрицательным временам $t < 0$, а часть интегральной кривой, расположенная слева от начальной точки, — положительным временам $t > 0$.

Пара точек K_- и K_+ на интегральной кривой с одинаковыми значениями β, $\beta_- = \beta_+$ определяет действительные значения

$$X = \sqrt[3]{\Omega(K_-)/\Omega(K_+)}, \qquad T = t_+ - t_-. \tag{6.1}$$

Значения $t_\pm$ определяются равенством

$$t_\pm = -\frac{1}{3}\int\limits_{K_0}^{K_\pm} \frac{dK}{\Omega(K)}. \tag{6.2}$$

Величины X и T являются координатами точки на физической плоскости (X, T), для которой, используя уравнения Гамильтона, можно найти волновое число и показатель усиления.

Точка K_0 является точкой перегиба на интегральной кривой. Следовательно, если на интегральной кривой выбрать некоторую точку K_-, соответствующую отрицательным значениям t_- и не очень удаленную от точки K_0, то по другую сторону от точки K_0 найдется точка K_+ ($t = t_+ > 0$), касательная в которой имеет то же направление, что и в точке K_-. Найдем $\Delta X = X - 1$ и T для случая, когда точки K_- и K_+ расположены вблизи точки K_0. Полагая в первом приближении ΔX малым, из (6.1), (6.2) получаем

$$\Delta X = \sqrt[3]{\frac{\Omega - \Omega'\Delta K_-}{\Omega + \Omega'\Delta K_+}} = -\frac{1}{3}\,\frac{\Omega_0'}{\Omega_0}\,\Delta K, \qquad T = -\frac{1}{3}\,\frac{\Delta K}{\Omega_0}. \tag{6.3}$$

Здесь $\Delta K_- = K_- - K_0$; $\Delta K_+ = K_+ - K_0$; $\Delta K = K_+ - K_-$; $\Omega' = d\Omega/dK$; индекс “0” означает, что соответствующая функция вычисляется при $K = K_0$. Из равенств (6.3) следует, что “скорость” в начальной точке определяется соотношением

$$\frac{\Delta X}{T} = \Big(\frac{d\Omega}{dK}\Big)_0,$$

т. е. соответствует результатам для случая возмущений на однородном фоне.

Пары точек с одинаковыми значениями β, расположенные на малом расстоянии друг от друга, могут находиться в окрестности либо точки минимума, либо точки максимума β. Если значение β увеличивается начиная от $\beta_{\min}$, то точки K_+ и K_- будут удаляться по интегральной кривой от точки ее пересечения с экстремальной окружностью. При этом движении точек K_+ и K_- по интегральной кривой точка с координатами (X, T) описывает некоторую кривую на физической плоскости. При $T = 0$ кривая выходит из начальной точки $X = X_0 = 1$. Начальная “скорость” $(dX/dT)|_{T=0}$ при $t = 0$ определяется производной $d\Omega/dK$ (см. (3.2)), которая является действительной на экстремальной окружности и уменьшается с увеличением полярного угла θ относительно точки $K = 1$.

В случае если $a > \sqrt{3}$, при всех K_0 на экстремальной окружности $dX/dT > 0$. При $a < \sqrt{3}$ часть интегральных кривых может иметь отрицательную начальную скорость в зависимости от выбора K_0.

Рассмотрим интегральные кривые, выходящие из узла K_A и в двух точках пересекающие экстремальную окружность в нижней полуплоскости. Область, в которой расположены эти интегральные кривые, ограничена сверху интегральной кривой, сначала идущей из узла по действительной оси от точки $K = K_A$ до точки $K = 1$, а затем покидающей действительную ось. Обозначим через H точку пересечения этой интегральной кривой с экстремальной окружностью (рис. 3). Рассматриваемые интегральные кривые расположены выше интегральной кривой, касающейся экстремальной окружности в точке L. Возможны два варианта поведения функции β на этих интегральных кривых (рис. 4).

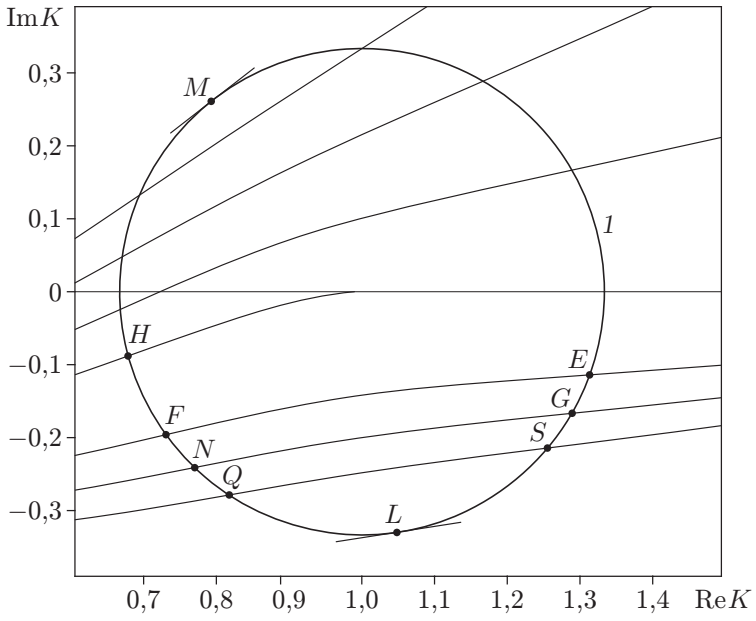

Рис. 3. Интегральные кривые в окрестности точки $K = 1$:
1 — экстремальная окружность

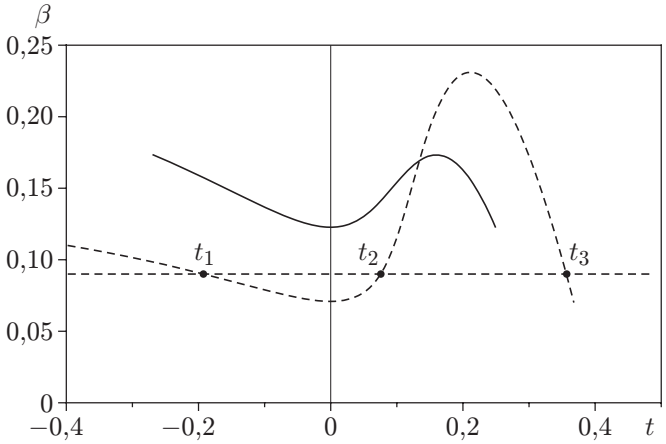

Рис. 4. Варианты поведения функции $\beta = \arg\Omega(K)$ на интегральных кривых $K(t)$

Рассмотрим вариант, когда на некоторой интегральной кривой, проходящей через точки E и F (см. рис. 3), локальный максимум $\beta = \beta_{\max}$, достигаемый во второй точке пересечения окружности, больше предельного значения β_A в узле уравнения (2.5) при $K = K_A = 1 + a^2$. Это условие выполняется, если первая точка пересечения (точка E на рис. 3) лежит выше (при большем значении $\operatorname{Im} K_0$) некоторой точки G ($\theta_G \simeq -\pi/3$) на экстремальной окружности (для этого случая функция β на интегральных кривых показана на рис. 4 штриховой линией). Точка G определяется из условия, что на интегральной кривой, проведенной через эту точку, $\beta_{\max} = \beta_A$.

На интегральных кривых, первая точка пересечения которых с экстремальной окружностью расположена ниже точки G, выполняется неравенство $\beta_{\max} < \beta_A$ (как это имеет место на кривой, проходящей через точки Q и S).

На некотором интервале значений β на интегральной кривой $K(t)$ имеются три точки K_1, K_2, K_3, соответствующие значениям $t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3$, в которых $\beta(K)$ принимает

одно и то же значение. Каждой из трех пар точек соответствует точка с координатами (X, T) на физической плоскости. Координаты этих точек вычисляются с использованием равенств (6.1). Если физические координаты X, T, определяемые парами K_1, K_2; K_2, K_3; K_1, K_3, обозначить через X_1, T_1, X_2, T_2, X_3, T_3, то в силу (6.1) для этих координат получаем соотношения

$$X_3 = X_1 X_2, \qquad T_3 = T_1 + T_2.$$

В случае $\beta_A < \beta_{\max}$ при увеличении β от $\beta_{\min}$ до β_A точки K_1 и K_2 расходятся по интегральной кривой, причем точка K_2 остается внутри экстремальной окружности, а точка K_1 приближается к точке A — узлу уравнения (2.5), при этом $T_1 \to \infty$, $X_1 \to 0$. В этом случае точка $X_1(\beta)$, $T_1(\beta)$ движется по некоторой кривой, начинающейся в начальной точке $X_1 = 1$, $T = 0$ и с увеличением β асимптотически приближающейся к оси T. Также при увеличении β точка $X_3(\beta)$, $T_3(\beta)$ асимптотически при $T \to \infty$ приближается к оси T, однако ее движение начинается в некоторой точке $X_3(\beta_{\min}) \neq 1$, $T_3(\beta_{\min}) \neq 0$. При $\beta = \beta_{\min}$ точки K_1 и K_2 совпадают, поэтому совпадают также точки (X_3, T_3) и (X_2, T_2). При увеличении β точка (X_3, T_3) уходит, как описано выше, в бесконечность вдоль оси T, а точка (X_2, T_2) приближается к начальной точке $X = 1$, $T = 0$ и при $\beta = \beta_{\max}$ совпадает с ней.

Таким образом, если на интегральной кривой $\beta_A < \beta_{\max}$, т. е. $\operatorname{Im} K_0 > \operatorname{Im} K_G$ в точке G (см. рис. 3), то рассматриваемой интегральной кривой на плоскости K соответствуют две кривые на плоскости (X, T), уходящие в бесконечность при приближении к оси T. Обе эти кривые выходят из начальной точки $X_1 = 1$, $T = 0$, одна из них представляет собой траекторию точки $X_1(\beta)$, $T_1(\beta)$, другая состоит из траекторий точек $X_2(\beta), T_2(\beta)$ и $X_3(\beta), T_3(\beta)$, которые соединяются при $\beta = \beta_{\min}$.

Направление касательной, с которой линия $X_1(\beta), T_1(\beta)$ с увеличением β выходит на плоскости (X, T) из начальной точки $X_1 = 1$, $T = 0$, определяется равенством $dX/dT = d\Omega/dK$, в котором производная вычисляется в точке K_0. Линия $X_2(\beta), T_2(\beta)$ с ростом β приходит к начальной точке с касательной, вычисленной по той же формуле во второй точке пересечения интегральной кривой с экстремальной окружностью. В соответствии с п. **5** эта касательная составляет с осью X угол, величина которого меньше величины угла между касательной к линии $X_1(\beta), T_1(\beta)$ и осью X.

На плоскости (X, T) интегральным кривым с $\beta_{\max} > \beta_A$ соответствуют указанные выше два семейства кривых $X(T)$, заполняющих области *1* и *2* на рис. 5. Область *1* соответствует кривым $X_1(\beta), T_1(\beta)$, область *2* — кривым, составленным из траекторий $X_2(\beta), T_2(\beta)$ и $X_3(\beta), T_3(\beta)$.

Между областями *1* и *2* на плоскости (X, T) расположена область *3*, соответствующая интегральным кривым, на которых $\beta_{\max} < \beta_A$. На рис. 3 эти кривые расположены ниже интегральной кривой, проходящей через точки G и N, и выше интегральной кривой, проходящей через точку касания L интегральной кривой и экстремальной окружности. Функция β, соответствующая этому случаю, качественно представлена сплошной кривой на рис. 4. На этих интегральных кривых при увеличении β от значения $\beta_{\min}$ точка K_1 не доходит по интегральной кривой до узла A, поскольку соответствующая ей точка K_2 исчезает, сливаясь с точкой K_3 при $\beta = \beta_{\max}$. Паре K_2, K_3 на плоскости (X, T) соответствует точка (X_2, T_2), которая по мере сближения точек K_2 и K_3 при $\beta \to \beta_{\max}$ стремится к начальной точке.

Таким образом, при $\beta_{\max} < \beta_A$ траектории точек на плоскости (X, T), соответствующие парам K_1, K_2; K_2, K_3; K_1, K_3, образуют на плоскости (X, T) замкнутую кривую. Эта кривая при $\beta = \beta_{\min}$ и $\beta = \beta_{\max}$ подходит к начальной точке с координатами $X = 1$, $T = 0$. Значения dX/dT в начальной точке различны и определяются точками пересечения рассматриваемой интегральной кривой на плоскости с экстремальной окружностью (см.

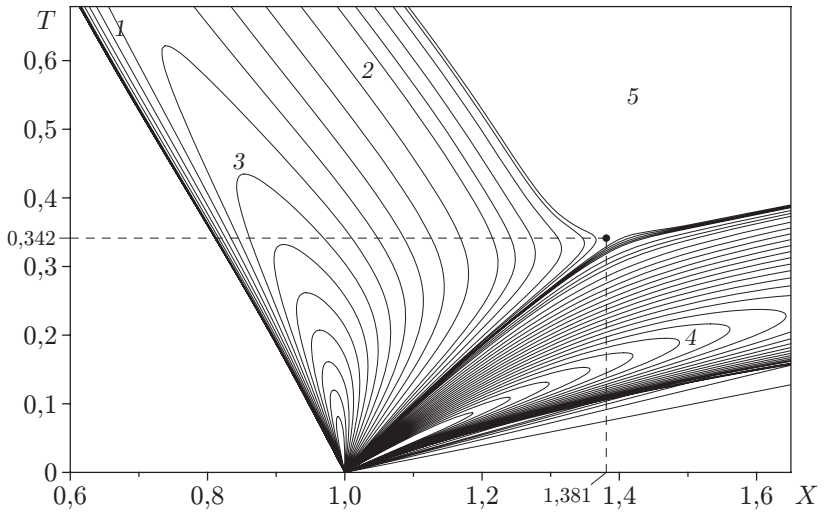

Рис. 5. Зависимости $X(T)$, соответствующие интегральным кривым $K(t)$:
1–5 — области интегральных кривых, соответствующие различному характеру развития возмущений поверхности тангенциального разрыва

п. **5**). При этом dX/dT при $\beta = \beta_{\min}$ меньше, чем при $\beta = \beta_{\max}$. На рис. 5 показана также область *3* на плоскости (X, T), заполненная описанными выше замкнутыми кривыми (петлями), соответствующими различным интегральным кривым. Интегральные кривые, проходящие на плоскости K вблизи точки L, образуют малые петли, а интегральные кривые, находящиеся вблизи точек G и N, — неограниченно большие петли.

Рассмотрим интегральные кривые $K(t)$, расположенные выше интегральной кривой, проходящей через $K = 1$, и пересекающие экстремальную окружность в двух точках. На этих кривых также имеются минимум и максимум β в точках пересечения интегральной кривой с экстремальной окружностью. При этом $\beta = \beta_{\min}$ соответствует меньшим значениям времени t на интегральной кривой, чем $\beta = \beta_{\max}$. При промежуточных значениях β имеются три точки K_1, K_2, K_3, соответствующие $t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3$ с равными значениями β. Как и выше, каждой паре этих точек соответствует точка на плоскости (X, T), каждой интегральной кривой на плоскости K соответствует замкнутая кривая (петля), которую составляют траектории трех указанных выше точек на плоскости (X, T) при изменении β.

Интегральным кривым, близким к точке касания с экстремальной окружностью, соответствуют малые петли. Их размер неограниченно увеличивается для интегральных кривых, близких к кривой $K(t)$, проходящей через точку $K = 1$. При этом на всех петлях время T остается ограниченным, в то время как их размер в направлении X неограниченно увеличивается для последовательности интегральных кривых, приближающихся к предельной кривой, проходящей через точку $K = 1$.

Рассмотрим две бесконечно близкие интегральные кривые, начальные точки которых расположены по разные стороны от точки H. Как указывалось выше, интегральная кривая $K(t)$ с начальной точкой, расположенной ниже точки H, проходящая вблизи действительной оси, соответствует кривой $X(T)$, такой что $X \to 0$ при $T \to \infty$. Интегральным кривым, проходящим вблизи и выше действительной оси, соответствуют кривые $X(\beta), T(\beta)$ в виде петель, ограниченных по T и не ограниченных по X.

Таким образом, двум бесконечно близким интегральным кривым $K(t)$, одна из которых проходит ниже $K = 1$, а вторая — выше, при $\beta < \beta_{\max}$ соответствуют линии, которые сначала также близки, а в предельном случае совпадают. Этому случаю на плоскости (X, T) соответствует линия, исходящая из точки $X = 1$, $T = 0$ и расщепляющаяся

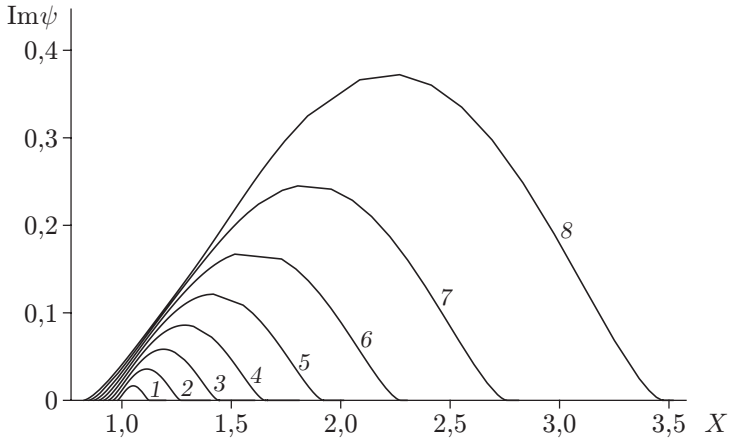

Рис. 6. Зависимость показателя усиления возмущений $\operatorname{Im}\psi$ от координаты X в различные моменты времени T:
1 — $T = 0{,}04$, *2* — $T = 0{,}08$, *3* — $T = 0{,}12$, *4* — $T = 0{,}16$, *5* — $T = 0{,}20$, *6* — $T = 0{,}24$, *7* — $T = 0{,}28$, *8* — $T = 0{,}32$

в некоторой точке на две линии, одна из которых стремится по координате T в бесконечность при $X \to 0$, а другая ограничена по переменной T, но стремится в бесконечность по X. Заметим, что обе линии соответствуют интегральным кривым $K(T)$, имеющим отрезки, на которых выполняется условие $\operatorname{Im} K \neq 0$.

На плоскости (X, T) комплексным интегральным кривым уравнения (2.5), в котором под $\Omega(K)$ понимается $\Omega_+(K)$, а t считается действительным, соответствуют области *1–4* на рис. 5. Ниже этих областей расположены точки, соответствующие отрезкам интегральных кривых с действительными K. В этих областях выполняется условие $\operatorname{Im}\psi = 0$. На линиях, отделяющих эти области от областей *1* и *4*, также выполняется равенство $\operatorname{Im}\psi = 0$.

7. Результаты численных исследований. Кривые на плоскости (X, T) (см. рис. 5) получены численно с помощью описанного в п. **6** способа. На этих кривых для достаточно большого множества точек вычислялись показатели усиления $\operatorname{Im}\psi$ с использованием равенства (4.3). Далее путем интерполяции значений $\operatorname{Im}\psi$ эти величины были перенесены на линии постоянных значений T. Значения $\operatorname{Im}\psi$ для моментов безразмерного времени $T = 0{,}04, 0{,}08, \ldots, 0{,}32$ представлены на рис. 6. Графики амплитуд возмущений практически подобны (точное подобие отсутствует), а характерные размеры со временем увеличиваются по нелинейному закону. Линии $T = \text{const}$ при $t > 0{,}33$ пересекают область *5* на рис. 6.

В настоящей работе ограничимся рассмотрением возмущений на интервале безразмерного времени $0 \leqslant T \leqslant 0{,}32$, так как из дисперсионного уравнения (1.5), не учитывающего диссипативные процессы, можно получить большие значения $\operatorname{Im}\omega$ при больших x. В то же время при больших значениях k, когда частота ω является действительной, величина $d\omega/dk$ принимает неограниченно большие значения при конечных x и $k \to \infty$. Этим, вероятно, обусловлено то, что в расчетах помимо области роста возмущений (см. рис. 6) существует область быстрого роста возмущений, расположенная при малых T в области значений X, существенно бóльших показанных на рис. 5. При увеличении T эта область роста движется в направлении уменьшения X и при $T > 0{,}32$ приближается к возмущениям, возникающим в точке с координатами $X = 1$, $T = 0$. При описании данного явления необходимо учитывать влияние факторов (например, вязкости), гасящих коротковолновые возмущения, что является существенно более сложной задачей и в настоящей работе не рассматривается.

8. О решениях в области, соответствующей значениям $T > 0{,}32$. Области *5* на плоскости (X, T) (см. рис. 5) не соответствуют интегральные кривые уравнения (2.5) с действительными t при $\Omega(K) = \Omega_+(K)$. Границами области *5* являются кривые $X(K)$, соответствующие интегральным кривым $K(t)$, проходящим по разным сторонам разреза римановой поверхности функции $\Omega(K)$ (разрез проведен по действительной оси K от точки ветвления $K = 1$ до точки $K = \infty$). На границах области *5* величина $\operatorname{Im}\psi \neq 0$.

Рассмотрим возможность непрерывного продолжения решения через границы области *5*. Изменим линию разреза на плоскости K, проведя его от точки $K = 1$ ниже оси $\operatorname{Re} K$, и исследуем некоторую точку K_0, расположенную ниже действительной оси, но выше линии разреза, т. е. на листе римановой поверхности, на котором $\Omega(K) = \Omega_-$. Поскольку $\Omega(K)$ принимает действительные значения на действительной оси K, справедливо равенство $\Omega(K) = \bar{\Omega}(\bar{K})$ и интегральные кривые в области значений $\operatorname{Im} K < 0$ комплексно сопряжены с интегральными кривыми в области значений $\operatorname{Im} K > 0$ (следовательно, $\arg\Omega(K_0) = -\arg\Omega(\bar{K})$). Интегральная кривая, проходящая через точку K_0, расположена на другом листе римановой поверхности и не близка к интегральным кривым, соответствующим Ω_+. Для того чтобы получить непрерывное продолжение значений X и T при переходе точки K_0 из верхней полуплоскости K в нижнюю, следует допустить, что в уравнении (2.5) изменения времени t не всегда действительны, необходимо только, чтобы было действительным изменение t от начального до конечного значения. Решение уравнения (2.5) можно найти в виде зависимости t от K:

$$t = -\frac{1}{3}\int\limits_{K_0}^{K} \frac{dK}{\Omega(K)}. \tag{8.1}$$

При этом интегральные кривые уравнения (2.5), соответствующие действительным t, рассматриваются как линии $\operatorname{Im} t = \mathrm{const}$ на комплексной плоскости K и переход с одной интегральной кривой на другую соответствует изменению $\operatorname{Im} t$. Если изменять верхний предел в (8.1), смещая K ортогонально интегральным кривым, то приращения времени t, являющегося аналитической функцией K, будут чисто мнимыми.

Выберем точку K_0 ($\operatorname{Im} K_0 < 0$) вблизи действительной оси K при $1 < \operatorname{Re} K_0$ выше линии разреза. Если интеграл в правой части равенства (8.1) вычислять от K_0 до $\bar{K}$, его значения будут чисто мнимыми. Продолжим интегрирование по интегральной кривой уравнения (2.5). При этом $\operatorname{Im} t$ не меняется, а t увеличивается при уменьшении $\operatorname{Re} K(t)$. После прохождения точки $K(t)$ через окрестность точки $K = 1$ будем проводить интегрирование по линии, всюду ортогональной интегральным кривым, до точки, в которой $\operatorname{Im} t$ обращается в нуль. Через эту точку проходит интегральная кривая $K(t)$, на которой величина t (равенство (8.1)) действительна. Для того чтобы значения x на этой кривой были действительными, следует найти точку, в которой $\arg\Omega = \arg\Omega(K_0)$. Эта точка, являющаяся конечной точкой интегрирования в интеграле (8.1), определяет действительные значения X, T и позволяет найти $\operatorname{Im}\psi$ по формуле (4.3). Очевидно, что при $\operatorname{Im} K_0 \to 0$ конечная точка при интегрировании и соответственно ω, ψ, X, T примут значения, соответствующие предельному действительному значению K_0.

Если сначала точку K_0 поместить в верхнюю полуплоскость K, а затем уменьшать значение $\operatorname{Im} K_0$, то точка (X, T) будет двигаться на плоскости (X, T) в направлении границы области *5* (см. рис. 5) и при $\operatorname{Im} K_0 = 0$ пересечет ее. Подобный анализ можно выполнить, если линию разреза на плоскости провести выше действительной оси, а точку K_0 перемещать по плоскости K снизу вверх, так чтобы она пересекла действительную ось K. В этом случае точка (X, T) пересечет границу между областями *2* и *5*.

Заключение. В работе с использованием методов комплексной геометрической оптики при учете поверхностного натяжения исследовано развитие возмущений поверхности тангенциального разрыва, возникающего при столкновении потоков жидкостей различной плотности. Развитие растущих возмущений на неустойчивом фоне рассчитывалось с помощью комплексных уравнений Гамильтона. Установлено, что в некоторых случаях при решении уравнений Гамильтона комплексной величиной необходимо считать не только x, но и t.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Маслов В. П.** Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1965.
2. **Рухадзе А. А., Силин В. П.** Метод геометрической оптики в электродинамике неоднородной плазмы // Успехи физ. наук. 1964. Т. 82, № 3. С. 499–535.
3. **Михайловский А. Б.** Теория плазменных неустойчивостей: В 2 т. М.: Атомиздат, 1970.
4. **Иорданский С. В.** Устойчивость неоднородных состояний и континуальные интегралы // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1988. Т. 94, № 7. С. 180–189.
5. **Куликовский А. Г., Лозовский А. В., Пащенко Н. Т.** О развитии возмущений на слобонеоднородном фоне // Прикл. математика и механика. 2007. Т. 71, № 5. С. 761–774.
6. **Куликовский А. Г.** О развитии возмущений на стационарном неоднородном фоне. Комплексные уравнения Гамильтона // Прикл. математика и механика. 2017. Т. 81, № 1. С. 3–17.
7. **Куликовский А. Г., Шикина И. С.** О развитии возмущений на границе раздела двух жидкостей // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1977. № 5. С. 46–49.
8. **Lord Kelvin.** The influence of wind on waves in water supposed frictionless // Philos. Mag. 1871. V. 42. P. 368–374.
9. **Бетчов Р.** Вопросы гидродинамической устойчивости / Р. Бетчов, В. Криминале. М.: Мир, 1971.
10. **Федорюк М. В.** Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
11. **Berk H. L., Mc Cay Nevins W., Roberts K. V.** New Stokes' lines in WKB theory // J. Math. Phys. 1982. V. 23. P. 988–1002.
12. **Лаврентьев М. А.** Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М.: Наука, 1965.
13. **Федорюк М. В.** Метод перевала. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию 19/XI 2018 г.,
после доработки — 19/XI 2018 г.
Принята к публикации 26/XI 2018 г.