УДК 532.527 + 532.516

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНОГО ВИХРЯ С ДЕФОРМИРОВАННЫМ ЯДРОМ

В. А. Владимиров, Л. Я. Рыбак, В. Ф. Тарасов

(*Новосибирск*)

В работе описаны эксперименты и математическая модель неустойчивости линейного вихря, подверженного деформации так, что линии тока оказываются близки к эллипсам с малыми эксцентриситетами. Опыты проводились с течением типа стокового вихря в цилиндрическом сосуде эллиптического сечения. Измерены длины волн и скорости вращения неустойчивых мод. Предложена аналитическая модель неустойчивости, основанная на линейной теории с применением теории возмущений по малости деформации. Согласно этой модели, механизм наблюдаемой неустойчивости аналогичен неустойчивости волны конечной амплитуды при трехволновом взаимодействии [1,2]. Предсказания модели неплохо объясняют результаты экспериментов.

Представленные опыты могут рассматриваться как обобщение экспериментов [3, 4] по устойчивости начально твердотельного вращения внутри эллиптического цилиндра после его остановки. Предлагаемая теория явления также может рассматриваться как обобщение работы [5], в которой исследовался вопрос устойчивости линейного вихря в безграничной жидкости. Ядро вихря считалось подверженным деформации так, что форма его поперечного сечения близка к эллипсу с малым эксцентриситетом. Метод решения [5] используется ниже. В [3, 4] теория для уже упомянутых экспериментов строилась на основе предположения о постоянстве завихренности. В отличие от данной работы применялся метод Галеркина. Таким образом, результаты [3—5] являются двумя различными предельными случаями рассматриваемой задачи.

1. Рассмотрим плоское стационарное течение идеальной жидкости, представляющее собой линейный вихрь с ядром постоянной завихренности, находящийся внутри цилиндрического сосуда. Вне ядра течение потенциально. Формы линий тока и границы нормального сечения сосуда мало отличаются от окружностей. Мерой этого отличия служит величина $\varepsilon \ll 1$. В цилиндрической системе координат (r, θ, z) зададим течение в виде разложений по степеням параметра ε:

$$\left.\begin{aligned} &U(r,\theta) = -\varepsilon r \sin 2\theta + O(\varepsilon^2),\\ &V(r,\theta) = r - \varepsilon r\cos 2\theta + O(\varepsilon^2),\\ &P(r,\theta) = (1/2)r^2 + O(\varepsilon^2), \end{aligned}\right\} 0 < r \leqslant R_1(\theta), \tag{1.1}$$

$$\Phi(r,\ \theta) = \theta - (\varepsilon/4)(r^2 - r^{-2})\sin 2\theta + O(\varepsilon^2),\ R_1(\theta) \leqslant r \leqslant R_2(\theta),$$

где $R_1(\theta)$, $R_2(\theta)$ дают границы ядра завихренности и сосуда:

$$\begin{aligned} &R_1(\theta) = 1 + (\varepsilon/2)\cos 2\theta + O(\varepsilon^2),\\ &R_2(\theta) = b[1 + (\varepsilon/4)B\cos 2\theta + O(\varepsilon^2)]. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Через U, V, P обозначены радиальная и угловая компоненты скорости и давление внутри ядра завихренности; Φ — потенциал скорости вне этого ядра; b — постоянная, равная радиусу сосуда в нулевом приближении ($b \geqslant 1$); $B = b^2 + b^{-2}$. Используется система единиц, в которой завихренность в ядре равна двум, а невозмущенный радиус ядра — единице. В (1.1), (1.2) явно выписаны первые два члена разложения точного решения, полученного в [6] (цит. по [5]). Эти разложения могут быть получены и непосредственным решением уравнений движения последовательными приближениями с выполнением условий непротекания при $r = R_2(\theta)$.

Если отбросить члены порядка ε^2 и выше, вид функции $R_2(\theta)$ совпадет с аналогичным представлением для эллипса с малым эксцентриситетом. Пусть a_0 и $b_0 (a_0 > b_0)$ — полуоси этого эллипса. Тогда

$$b^2 = 2a_0^2b_0^2/(a_0^2 + b_0^2),\quad \varepsilon = \frac{2\varepsilon_0}{B},\quad \varepsilon_0 \equiv \frac{a_0^2 - b_0^2}{a_0^2 + b_0^2}. \tag{1.3}$$

Отметим, что параметр малости ε_0 определяется только геометрией сосуда, а ε — также и отношением b размеров сосуда и ядра вихря.

Перейдем к формулировке задачи устойчивости течения (1.1), (1.2). Поведение бесконечно малых возмущений описывается линеаризованной системой уравнений движения. Для области внутри ядра завихренности эти уравнения имеют вид

$$(1.4)\qquad Lu+\frac{\partial U}{\partial r}u+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}v-\frac{2Vv}{r}=-\frac{\partial p}{\partial r},$$

$$Lv+\frac{\partial V}{\partial r}u+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}v+\frac{1}{r}(Uv+Vu)=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta},$$

$$Lw=-\frac{\partial p}{\partial z},\quad \frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

для области снаружи ядра

$$(1.5)\qquad \Delta\varphi=0.$$

Через u, v, w, p, φ обозначены поля возмущений r, θ, z-компонент скорости, давления и потенциала скорости, $L=\partial/\partial t+U\partial/\partial r+(1/r)V\partial/\partial\theta$. Граничные условия для возмущений состоят в требовании непротекания при $r=R_2(\theta)$, отсутствии особенностей при $r=0$ и выполнении кинематического и динамического условий на границе между ядром завихренности и потенциальным потоком. Вид этих условий громоздок и в данной работе не приводится.

Пользуясь независимостью основного течения (1.1) от z и t, полагаем

$$(1.6)\qquad (u, v, w, p, \varphi)=(u_a, v_a, w_a, p_a, \varphi_a)e^{\omega t+ikz}$$

с амплитудами u_a, v_a, w_a, p_a, φ_a, зависящими только от r и θ. После подстановки (1.6) в (1.4), (1.5) и граничные условия получаем задачу на определение амплитуды и собственных значений ω. Если существует хотя бы одно ω с $\operatorname{Re}\omega>0$, то течение неустойчиво.

2. Задача определения собственных значений ω в сформулированной постановке очень сложна и будет решаться методом последовательных приближений с учетом малости величины ε. Вычисления проделаны для нулевого и первого приближений.

Предполагая решения аналитическими функциями ε (в окрестности $\varepsilon=0$), выпишем их в виде рядов ($\nu=0, 1, 2,\ldots$)

$$(2.1)\qquad (u_a, v_a, w_a, p_a, \varphi_a, \omega)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon^{\nu}(u_\nu, v_\nu, w_\nu, p_\nu, \varphi_\nu, \omega_\nu).$$

Кроме того, положим $k=k_0+\varepsilon k_1$. Последнее представление принято потому, что величина k_0 удовлетворяет некоторой совокупности дисперсионных соотношений и случаям неустойчивости будет соответствовать дискретный набор значений k_0. Величина k_1 позволит рассматривать значения k, близкие к k_0. Подстановка (2.1) в (1.4), (1.5) и приравнивание членов при одинаковых степенях ε дают

$$(2.2)\qquad \left.\begin{aligned}
&L_0u_\nu-2v_\nu+\frac{\partial p_\nu}{\partial r}=G_{1\nu},\\
&L_0v_\nu+2u_\nu+\frac{1}{r}\frac{\partial p_\nu}{\partial\theta}=G_{2\nu},\\
&L_0w_\nu+ik_0p_\nu=G_{3\nu},\\
&\frac{\partial u_\nu}{\partial r}+\frac{u_\nu}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\nu}{\partial\theta}+ik_0w_\nu=G_{4\nu},
\end{aligned}\right|\; 0<r<1,$$

$$\frac{\partial^2\varphi_\nu}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi_\nu}{\partial\theta^2}-k_0^2\varphi_\nu=G_{5\nu},\qquad 1<r<b.$$

Здесь $L_0\equiv-\omega_0+\partial/\partial\theta$. При $\nu=0$ правые части $G_{l0}=0$ для всех l ($l=1, 2, 3, 4, 5$). В уравнениях первого приближения ($\nu=1$) G_{l1} содержат линейно функции нулевого приближения, а при $l = 1, 2, 3$ — также линейно величину ω_1:

$$G_{11} \equiv \omega_1 u_0 + (r\partial u_0/\partial r + u_0)\sin 2\theta + (\partial u_0/\partial\theta)\cos 2\theta.$$

Кинематическое и динамическое граничные условия для нулевого и первого приближений при $r = 1$ имеют вид

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial r} - u_0 = 0, \quad p_0 + \omega_0\varphi_0 + \frac{\partial\varphi_0}{\partial\theta} = 0, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} - u_1 = \left(-\frac{\partial\varphi_0}{\partial\theta} + v_0\right)\sin 2\theta + \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial r^2} + \frac{\partial u_0}{\partial r}\right)\cos 2\theta,$$

$$p_1 + \omega_0\varphi_1 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta} = -\omega_1\varphi_0 + \frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\sin 2\theta +$$

$$+\frac{1}{2}\left(2\frac{\partial\varphi_0}{\partial\theta} - \omega_0\frac{\partial\varphi_0}{\partial r} - \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial r\partial\theta} - \frac{\partial p_0}{\partial r}\right)\cos 2\theta.$$

Условие непротекания на границе цилиндра при $r = b$ приводит к условиям:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = -\frac{B}{2}\left[\frac{b}{2}\cos 2\theta\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial r^2} + \frac{1}{b}\sin 2\theta\frac{\partial\varphi_0}{\partial\theta}\right], \tag{2.4}$$

которые обычным образом «снесены» с реальных границ (1.2) на близкие к ним окружности $r = 1$ и $r = b$. Еще одно условие состоит в ограниченности решений любого приближения при $r = 0$.

3. Рассмотрим задачу (2.2)—(2.4) нулевого приближения. Ее решения представляют собой инерционные волны на линейном вихре с круговым ядром постоянной завихренности. Граница сосуда — окружность $r = b$. Эти волны при $b = \infty$ изучались еще Кельвином [7]. Для гармоники, пропорциональной $e^{im\theta}$, из (2.2) получаем

$$p_0 = \beta J_m(\eta_m r)e^{im\theta} \quad \text{при } 0 < r < 1, \tag{3.1}$$

$$\varphi_0 = \alpha\Psi_m(k_0 r)e^{im\theta} \quad \text{при } 1 < r < b,$$

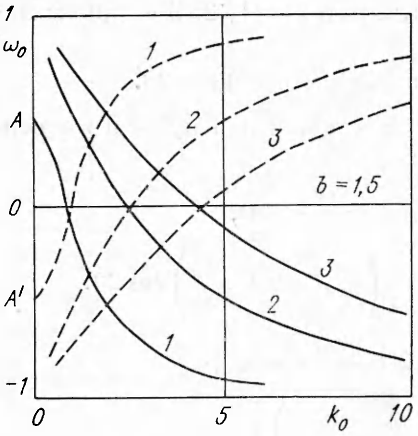
где $\Psi_m(x) \equiv K_m(x) - \varkappa_m I_m(x)$; $\varkappa_m \equiv K'_m(k_0 b)/I'_m(k_0 b)$; $K'_m(x) \equiv dK_m(x)/dx$; J_m, N_m, K_m, I_m — функции Бесселя, Неймана и модифицированные функции Бесселя индекса m; α, β — комплексные постоянные; $\eta_m^2 \equiv -k_0^2\Delta_m/\sigma_m^2$; $\Delta_m \equiv \sigma_m^2 + 4$; $\sigma_m \equiv \omega_0 + im$. В (3.1) учтены граничное условие при $r = b$ и отсутствие особенностей при $r = 0$. Привлечение граничных условий при $r = 1$ (2.3) дает дисперсионную связь между ω_0 и k_0:

$$k_0 J_m\Psi'_m(k_0) - \frac{\sigma_m}{\Delta_m}\Psi_m(k_0)\left[\sigma_m\eta_m J'_m + 2imJ_m\right] = 0, \tag{3.2}$$

где $J_m \equiv J_m(\eta_m)$. Постоянные α и β также оказываются связанными. Можно показать, что спектр $i\omega_0$, задаваемый (3.2), веществен и $m - 2 < i\omega_0 < m + 2$.

4. Для задачи (2.2)—(2.4) первого приближения вид решений и значение ω_1 могут быть получены при помощи несложных, но громоздких вычислений. Смысл их сводится к определению поправок к инерционным волнам (3.1), обусловленных отличием геометрии от круговой. Наиболее сложным этапом является решение неоднородных уравнений (2.2). Поскольку аналогичные вычисления проделывались в [5] для случая $b = \infty$, не останавливаясь на них, изложим результаты.

Если выбрать нулевое приближение в форме гармоники (3.1) с любым m, то величина ω_1 всегда чисто мнимая. Это соответствует устойчивости в первом приближении. Более содержателен случай вырождения, когда возмущение нулевого приближения, характеризующееся частотой ω_0 и волновым вектором k_0, имеет вид суперпозиции нескольких мод с различными m (m_1 и m_2). Для этого случая показано, что если $m_1 - m_2 \neq \pm 2$, то ω_1



Фиг. 1

опять чисто мнимая. Неустойчивость ($\operatorname{Re}\omega_1 > 0$) может иметь место только при $m_1 - m_2 = \pm 2$. Этот результат является следствием угловой зависимости основного течения (1.1), входящего в первые части (2.2). Из вида спектра задачи нулевого приближения п. **3** следует, что вырождение в этом случае может быть лишь двукратным и «опасные» возмущения в нулевом приближении имеют вид

$$(4.1)\qquad \begin{aligned} p_0 &= \beta J_{n+1}(\eta_{n+1}r)e^{i(n+1)\theta} + \\ &+ \bar\beta J_{n-1}(\eta_{n-1}r)e^{i(n-1)\theta}, \\ \varphi_0 &= \alpha\Psi_{n+1}(k_0r)e^{i(n+1)\theta} + \\ &+ \bar\alpha\Psi_{n-1}(k_0r)e^{i(n-1)\theta}. \end{aligned}$$

Здесь функции p_0 и φ_0 определены при $0 < r < 1$ и $1 < r < b$ соответственно; α, $\bar\alpha$, β, $\bar\beta$ — комплексные постоянные; черта сверху обозначает независимую величину, а не операцию комплексного сопряжения; n — произвольное целое число.

Ниже будем изучать неустойчивость только на аналитически самом простом примере $n = 0$. Этот случай соответствует возмущениям с изгибом оси вращения и оказывается наиболее важным с точки зрения экспериментальной реализации. Результаты для $n \neq 0$ в случае $b = 1$ изложены в [8]. Сделаем несколько пояснений о значениях (ω_0, k_0), при которых возможно вырождение (4.1). Дисперсионные соотношения для входящих при $n = 0$ в (4.1) гармоник даются подстановкой $m = \pm 1$ в (3.2). В силу вырождения рассматриваются точки пересечения кривых (3.2) с $m = 1$ и $m = -1$ на плоскости k_0, $i\omega_0$. Пересекающиеся семейства этих кривых сосредоточены на полосе $-1 < i\omega_0 < 1$; их вид для $b = 1{,}5$ приведен на фиг. 1. Сплошные линии соответствуют гармонике $m = 1$, штриховые — гармонике $m = -1$. На фиг. 1 приведено только по три первых из счетного набора кривых для каждой гармоники, номера кривых соответствуют числу нулей функции $u_0(r)$ на $0 < r \leqslant b$. Каждую точку пересечения обозначим парой целых чисел (q; s), соответствующих номерам пересекающихся кривых семейств $m = 1$ и $m = -1$. Точки с $q = s$, как и в [8], назовем главными точками пересечения, с $q \neq s$ — боковыми точками пересечения. Кривые $m = \pm 1$ получаются друг из друга отражением относительно оси $i\omega_0 = 0$, поэтому главные точки пересечения находятся на этой оси. Через A и A' на фиг. 1 обозначены точки нулевых кривых, соответствующие плоским полям возмущений ($k_0 \to 0$). Расстояние от A и A' до начала координат равно $1/b^2$. При $b = \infty$ эти кривые выходят из точки $i\omega_0 = 0$, $k_0 = 0$, при $b = 1$ — из точек $i\omega_0 = \pm 1$, $k_0 = 0$. Сводка координат точек пересечения для $b = 1; 1{,}5; 2; 4; 6$ дана в табл. 1, в каждой клетке которой верхнее число дает значение $i\omega_0$, нижнее — k_0.

Вычисления величины ω_1 в точках вырождения ($i\omega_0$, k_0) дают

$$(4.2)\qquad \omega_1 = -\frac{1}{2}k_0k_1(c + \bar c) \pm \sqrt{\omega_{\max}^2 + \left[\frac{1}{2}k_0k_1(c - \bar c)\right]^2},$$

где $c \equiv g/f$; $\bar c \equiv \bar g/\bar f$; $\omega_{\max}^2 \equiv h\bar h/f\bar f$; через f, $\bar f$, g, $\bar g$, h, $\bar h$ обозначены различные функции величин $i\omega_0$, k_0, b, вид которых приведен в приложении. Из (4.2) следует, что неустойчивость ($\operatorname{Re}\omega_1 > 0$) может иметь место, если

$$\omega_{\max}^2 > -[(1/2)\,k_0k_1(c - \bar c)]^2.$$

Поскольку c и $\bar c$ — чисто мнимые величины, наибольший декремент роста $\omega_1 = \omega_{\max}$ достигается при $k_1 = 0$. При этом неустойчивым оказывается

Таблица 1

Точки пересечения \ b	1	1,2	1,5	2	4	6
(1; 1)	0,0 1,579	0,0 1,245	0,0 0,878	0,0 0,573	0,0 0,229	0,0 0,140
(2; 2)	0,0 3,286	0,0 2,761	0,0 2,552	0,00 2,508	0,0 2,505	0,0 2,505
(3; 3)	0,0 5,061	0,0 4,457	0,0 4,356	0,0 4,349	0,0 4,349	0,0 4,349
(1; 2)	0,292 2,203	0,297 1,789	0,342 1,488	0,386 1,324	0,406 1,264	0,406 1,264
(1; 3)	0,435 2,630	0,449 2,185	0,495 1,907	0,522 1,778	0,528 1,750	0,528 1,750
(2; 3)	0,165 4,046	0,174 3,481	0,185 3,323	0,186 3,301	0,187 3,300	0.187 3,300

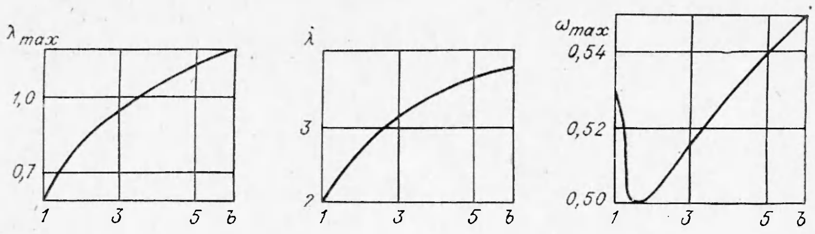
Таблица 2

Точки пересечения \ b	1	1,2	1,5	2	4	6
(1; 1)	0,531 0,958	0,522 0,811	0,506 0,748	0,502 0,781	0,529 1,157	0,548 1,576
(2; 2)	0,554 2,325	0,549 2,045	0,556 2,047	0,567 2,122	0,571 2,145	0,571 2,145
(3; 3)	0,559 3,701	0,560 3,409	0,567 3,487	0,569 3,517	0,569 3,518	0,569 3,518
(1; 2)	0,111	0,059	0,004	0,014	0,003	0,004
(1; 3)	0,114	0,043	0,001	0,001	0,004	0,004
(2; 3)	0,161	0,033	0,005	0,007	0,007	0,007

целый интервал волновых чисел:

$$|k_1| < k_{\max} = |2\omega_{\max}/(k_0(c - \bar{c}))|. \tag{4.3}$$

Значение $|k_1| = k_{\max}$ соответствует границе области неустойчивости, на которой $\mathrm{Re}\,\omega_1 = 0$. В табл. 2 приведены значения $\omega_{\max}$ во всех точках пересечения, присутствующих на фиг. 1. Для главных точек пересечения верхнее число в каждой клетке таблицы дает величину $\omega_{\max}$, нижнее — $k_{\max}$. Видно, что все точки пересечения соответствуют неустойчивым модам. В то же время декременты нарастания в главных точках пересечения ($i\omega_0 = 0$) на один — два порядка больше, чем в боковых. То же на основании (4.3) можно сказать и о ширинах зон неустойчивости $k_{\max}$. Исходя из этого, в опытах следует ожидать наблюдения невращающихся ($i\omega_0 = 0$) возмущений.



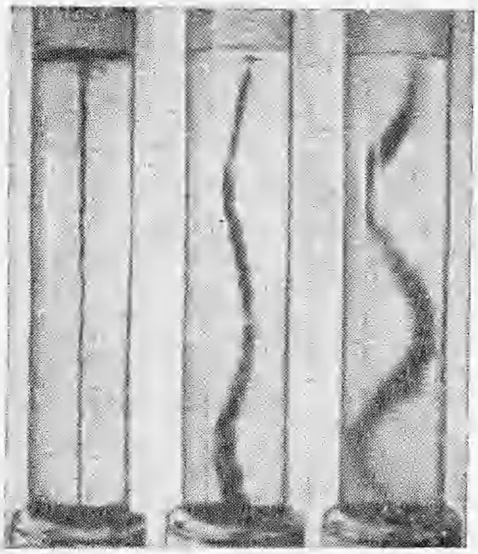
Фиг. 2

В экспериментах наиболее существенной окажется неустойчивость, соответствующая точке пересечения (1;1). На фиг. 2 приведены зависимости от b длины полуволны $\lambda = \pi/k_0 b$, ширины зоны неустойчивых длин волн $\lambda_{\max} = (2k_1/k_0 B)\lambda$ и декремента роста $\omega_{\max}$ в этой точке. Здесь длины отнесены к величине b, т. е. измерены в единицах невозмущенного радиуса сосуда; $\lambda_{\max}$ определена так, что неустойчивые моды лежат в интервале от $\lambda - \varepsilon_0\lambda_{\max}$ до $\lambda + \varepsilon_0\lambda_{\max}$ (см. (1.3)). Поскольку при $1 < b < 6$ (см. фиг. 2) $\omega_{\max} \approx 0{,}5$, то реальный декремент $\varepsilon\omega_{\max} = (2\varepsilon_0/B)\omega_{\max}$ с ростом b падает как $1/b^2$. Отметим еще, что при $b \to \infty$ следует $k_0 \to 0$. При этом длина волны λ не стремится к конечному пределу, а слабо, но неограниченно растет, так что $\varkappa_1 \approx \ln k_0 - 1/4$ (см. (3.1)).

5. Был проведен ряд опытов по регистрации описанной неустойчивости. Использовалась установка, представляющая собой заполненный водой круглый цилиндрический сосуд высотой 120 см и диаметром 18 см, помещенный на вращающийся стол. Вращение происходит вокруг оси симметрии. Внутрь сосуда помещалась жестко закрепленная вставка в виде тонкостенного эллиптического цилиндра, изготовленного из пластины тонкого целлулоида. Большая ось эллипса длины $2a_0$ совпадала с диаметром сосуда, малая — варьировалась в интервале $2b_0 = 13{,}5 - 17$ см. Течение внутри эллиптического цилиндра наблюдалось через прозрачные стенки. Типичный эксперимент выглядел следующим образом. Сосуд с водой, налитой до уровня $L + \delta L$, приводился в состояние твердотельного вращения со скоростью Ω. Затем открывалось отверстие диаметра d, расположенное в центре дна сосуда. Образующийся линейный вихрь (типа вихря в ванной) визуализировался введением краски. При понижении уровня до высоты L отверстие закрывалось и через время Δt сосуд резко останавливался. Интервал Δt необходим для перестройки течения от стокового вихря к линейному вихрю с нулевой составляющей осевой скорости. После остановки в некоторых диапазонах L вихрь остается прямым, а в других наблюдается неустойчивость изгибного типа (фиг. 3). Регистрировалось два параметра неустойчивой моды — скорость ее вращения $i\omega_0$ и длина λ. Приведем результаты серии опытов с $\Omega = 0{,}625$ об/с; $\varepsilon_0 \simeq 0{,}17$; $\delta L = 15$ см; $d = 3$ мм; $\Delta t = 2$с.

Последовательность картины на фиг. 3 соответствует моментам времени 0; 12; 25 с после остановки при $L = 90$ см. На фиг. 4 даны картины неустойчивости при различных L (50; 80; 92 см). Оказалось, что во всех случаях изгибы ядра вихря покоятся в лабораторной системе координат, изменяясь только по амплитуде. Этому соответствует $i\omega_0 = 0$, т. е. как раз случай главных точек пересечения (см. п. 4). Слабые отличия $i\omega_0$ от нуля наблюдались только при больших амплитудах изгибов, когда ядро вихря почти касалось стенки сосуда. Результаты измерений диапазонов L для неустойчивых мод приведены на левой половине фиг. 5. Заштрихованные участки дают значения L/b, в которых наблюдается неустойчивость. Каждая зона неустойчивости обозначена цифрой $n_0 = 1; 2; 3; 4$, соответствующей гармонике $n_0\lambda$. При $n_0 = 1$ наблюдается полуволна, при $n_0 = 2$ — целая волна и т. д. Для сравнения на правой половине фиг. 5 приведены данные [3, 4] о неустойчивости начально твердотельного вращения после остановки сосуда при том же ε_0.

Прямые измерения радиуса a ядра вихря и завихренности $\Omega_я$ в нем для рассматриваемой серии опытов дают значения $a \simeq 2$ см, $\Omega_я \simeq 34$ 1/с.

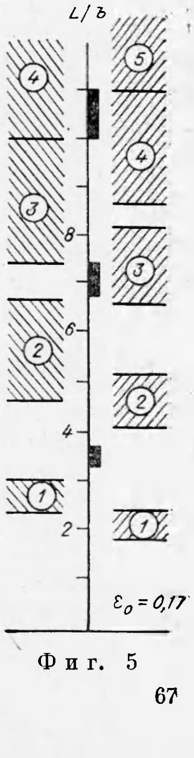


Фиг. 3

Фиг. 4

Способы измерений состояли в регистрации движения частиц на свободной поверхности и подкрашивании ядра. Теоретически предсказываемые для этих параметров зоны неустойчивости (1; 1) нанесены на оси L/b (см. фиг. 5) утолщенными отрезками ($n_0 = 1$; 2; 3). Видно, что теория верно отражает основной результат проведенных опытов, состоящий в увеличении длин волн неустойчивых мод λ по сравнению со случаем начально твердотельного вращения [3, 4]. В то же время теоретически предсказанная величина λ (см. фиг. 5) несколько больше измеренной, а ширина зоны неустойчивости λ_{max} несколько меньше.

Проводились также опыты с другими значениями параметров ε_0, d, Ω, δL, Δt. Полученные результаты аналогичны приведенным. При изменениях перечисленных параметров, приводящих к увеличению b, неустойчивость проявляется все слабее. В теории этому соответствует уменьшение декремента нарастания $\varepsilon\omega_{max} \sim 1/b^2$. В опытах с $b \gtrsim 10$ неустойчивости вовсе нет.



Фиг. 5

Сделаем еще несколько замечаний.

1. Для всех главных точек пересечения декремент нарастания почти одинаков. Для объяснения доминирующей роли неустойчивости (1; 1) необходимо, по-видимому, привлекать нелинейную теорию. Интуитивно нелинейные ограничения для других неустойчивостей, соответствующих главным точкам, ясны: для их реализации вихревые линии в соседних цилиндрических слоях должны поворачиваться в противоположные стороны, в то время как неустойчивость (1; 1) дает поворот оси вращения для всего течения в целом.

2. Вычисления смещений главных точек пересечения дисперсионных кривых показывают, что различие между теорией и экспериментом может быть объяснено имеющей место в опытах непотенциальностью окружающего ядро потока. Учет его непотенциальности также приведет, по-видимому, к наблюдаемому уширению зон неустойчивости.

3. Представленная модель может объяснить имеющие место в [3, 4] отклонения теоретических предсказаний длин волн неустойчивых мод от экспериментальных результатов. Для этого следует учесть, что остановка сосуда приводит к быстрой перестройке профиля скорости

посредством турбулентного перемешивания, вызванного центробежной неустойчивостью. Поэтому постоянная завихренность имеет место не во всем течении, а лишь в некотором его ядре, вне которого завихренность существенно меньше. Такая перестройка потока может привести только к увеличению λ (см. фиг. 2), что необходимо для достижения согласования в [3, 4].

4. Постановка опытов отличается от теоретической модели п. **1**, **2** наличием свободной поверхности. Контрольные опыты с твердой крышкой показали, что, по крайней мере для постановки типа [3, 4] с начально твердотельным вращением, в диапазоне $0{,}25$ об/с $< \Omega < 1{,}25$ об/с влияние свободной поверхности на параметры неустойчивости оказалось слабым.

5. В постановке опытов присутствует лишняя операция перекрытия отверстия. Она проводилась для выполнения предположения (п. **1**) о равенстве нулю осевой составляющей скорости основного течения. При остановке сосуда без перекрытия отверстия тоже наблюдается неустойчивость стокового вихря типа приведенной на фиг. 3, 4. Однако тут необходима более сложная теория.

Приложение. Для боковых точек пересечения ($i\omega_0$, k_0) справедливы представления

$$f = -A\Psi - H_1\Psi_r + \frac{\sigma}{\Delta}\Psi\left[-\eta\left(\sigma^2 + \frac{8i}{\sigma}\right)J_0 + (4\eta^2 + \bar\sigma^2)J_1\right], \tag{П.1}$$

$$g = \frac{\sigma}{k_0}A\rho_1 + \frac{1}{k_0}J_1\rho_2 - H_2\Psi_r + \Psi\left(J_1 - \frac{\mu}{\sigma\eta}J_0\right),$$

$$h = -\rho_3\bar A + \rho_4\bar J_1 + i\omega_0 Q\bar\eta S H_3 - \frac{1}{4}\Psi_r(\bar\eta\bar J_0 - \bar J_1) +$$

$$+ \frac{\sigma\Psi}{4\Delta}[-\bar\sigma\bar\eta\bar J_0 + \sigma(i\bar\sigma - \bar\eta^2)\bar J_1].$$

Кроме каждой из величин σ, η, μ, Δ, J_m, N_m, A, H_1, H_2, H_3, ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, f, g, h, существует другая величина, обозначенная той же буквой с чертой сверху. Связывающие их аналитические выражения остаются верными, если каждую из величин без черты (с чертой) заменить на величину, обозначенную той же буквой с чертой (без черты) и мнимую единицу i заменить на $-i$. Примем $\sigma \equiv \sigma_1$; $\bar\sigma \equiv \sigma_{-1}$; $\eta \equiv \eta_1$; $\bar\eta \equiv \eta_{-1}$; $\Delta \equiv \Delta_1$; $\bar\Delta \equiv \Delta_{-1}$; $\mu \equiv \sigma + 2i$; $\Psi \equiv \Psi(k_0)$; $\Psi_r \equiv \frac{d}{dr}\Psi(k_0 r)|_{r=1}$; $Q \equiv 2\pi k_0^2/(\sigma^2\bar\sigma^2)$; J_m и N_m — функции Бесселя и Неймана от аргумента η; $\bar J_m$ и $\bar N_m$ — от аргумента $\bar\eta$; $A \equiv (1/\Delta)(-\sigma\eta J_0 + \bar\sigma J_1)$;

$$H_1 \equiv \frac{4k_0^2}{\eta\sigma^3}rJ_0; \quad H_2 \equiv -\frac{\Delta}{\sigma^2\eta}rJ_0; \quad H_3 \equiv \Psi_r N_1 + \frac{\sigma\Psi}{\Delta}(-\sigma\eta N_0 + \bar\sigma N_1);$$

$$\rho_1 \equiv f_0(1) - \frac{M(b)I_1(k_0)}{k_0 I_1'(k_0 b)}; \quad \rho_2 \equiv M(1) - \frac{M(b)I_1'(k_0)}{I_1'(k_0 b)};$$

$$\rho_3 \equiv \frac{i}{2}\Psi + \frac{\sigma}{4}\left[\Psi_r + \frac{BF(b)I_1(k_0)}{k_0 I_1'(k_0 b)}\right]; \quad \rho_4 \equiv \frac{\sigma}{4\bar\sigma}\left[2F(1) - \frac{BF(1)I_1'(k_0)}{I_1'(k_0 b)}\right];$$

$$f_0(r) \equiv K_0(k_0 r) + \varkappa_1 I_0(k_0 r); \quad M(r) \equiv f_0(r) - k_0 r\Psi_0(k_0 r);$$

$$F(r) \equiv -\frac{r}{2}\Psi_{rr}(k_0 r) + \frac{1}{r}\Psi(k_0 r); \quad S \equiv \int_0^1 t^2 J_0(\bar\eta t)J_1(\eta t)\,dt.$$

Для главных точек пересечения ($\omega_0 = 0$) величины k_0 вычисляются из уравнения

$$\Psi_r J_1 + (1/3)\Psi(\eta J_0 + J_1) = 0, \ \eta = \sqrt{3}k_0.$$

Выражения для f и g следуют из (П. 1):

$$f = -\bar{f} = \frac{2i}{3}\left\{-2\eta J_0\Psi_r + \frac{1}{3}\Psi\left[(2\eta^2+1)J_1 - 2\eta J_0\right]\right\},$$

$$g = \bar{g} = \frac{\rho_1}{3k_0}(\eta J_0 + J_1) + \frac{\rho_2}{k_0}J_1 - \frac{3}{\eta}J_0\Psi_r + \left(J_1 - \frac{3}{\eta}J_0\right)\Psi.$$

В то же время величина h в (П. 1) не дает правильного предела при $\omega_0 \to 0$. Это связано с тем, что в промежуточных вычислениях существенно используется $\omega_0 \neq 0$. Отдельные вычисления, в которых с самого начала полагается $\omega_0 = 0$, дают

$$h = \bar{h} = \rho_5(\eta J_0 + J_1) + \rho_6 J_1 -$$
$$-(1/4)(3\eta J_0 - J_1)\Psi_r - (\eta/4)(J_0 - \eta J_1)\Psi,$$

$$\rho_5 = \frac{1}{12}\left[2\Psi + \Psi_r + \frac{BF(b)\,I_1(k_0)}{k_0 I_1'(k_0 b)}\right], \quad \rho_6 \equiv -\frac{1}{2}\left[F(1) - \frac{BF(b)\,I_1'(k_0)}{2I_1'(k_0 b)}\right].$$

Поступила 12 V 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Филлипс О. М.** Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1980.
2. **Yih C.-S.** Instability of surface and internal waves.— Adv. Appl. Mech., 1976, vol. 16, p. 369.
3. **Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В. и др.** Экспериментальное и теоретическое исследование устойчивости движения жидкости внутри эллиптического цилиндра.— Изв. АН СССР. ФАО, 1975, т. 11, № 10.
4. **Гледзер Е. Б., Обухов А. М., Пономарев В. М.** Об устойчивости движения жидкости в сосудах эллиптического сечения.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 1.
5. **Tsai C.-Y., Widnall S. E.** The stability of short waves on a straight vortex filament in a weak externally imposed strain field.— J. Fluid Mech., 1976, vol. 73, N 4.
6. **Moore D. V., Saffman P. G.** Structure of a line vortex in an imposed strain.— In: Proc. Symp. Aircraft Wake Turbulence, Seattle. Washington, 1971.
7. **Kelvin Lord.** Vibrations of a columnar vortex.— Phil. Mag., 1880, vol. 10, p. 155.
8. **Владимиров В. А.** К устойчивости течения идеальной несжимаемой жидкости с постоянной завихренностью в эллиптическом цилиндре.— ПМТФ, 1983, № 4.

УДК 532.529.2

О КОНВЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ЖИДКОСТИ В ПОЧТИ ШАРОВОЙ ПОЛОСТИ ПРИ ПОДОГРЕВЕ СНИЗУ

Ю. К. Братухин, Л. Н. Маурин

(*Пермь, Иваново*)

1. Как известно [1], жидкость может находиться в механическом равновесии при неоднородном подогреве только в том случае, если градиент температуры в ней вертикален и имеет постоянное значение. Такая ситуация может осуществляться, например, в шаровой полости, ограниченной твердым массивом, с заданным на бесконечности вертикальным (вниз) градиентом температуры.

Рассмотрим влияние на конвективную устойчивость слабого отклонения формы полости от шаровой. Пусть уравнение поверхности полости имеет вид $r = 1 + sP_2^{(1)}\cos\varphi$ ($P_e^{(m)}(\vartheta)$ — присоединенные полиномы Лежандра; r, ϑ, φ — полярные координаты; радиус R_0 недеформированного шара принят за единицу; $s \ll 1$). Выбор такой специальной формы полости связан с тем, что $P_2^{(1)}\cos\varphi$ — одна из самых крупномасштабных сферических гармоник, наличие которой в спектре функции, задающей форму реальной полости, приводит к искривлению изотерм в жидкости и, следовательно, к появлению конвективного движения уже при сколь угодно малых градиентах температуры.