УДК 532.516

МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ ЖИДКОСТИ В ВЕРТИКАЛЬНОМ КОНУСЕ ПРИ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ВЯЗКОСТИ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Г. Палани, Е. Ж. Лалит Кумар*, К.-Й. Ким**

Государственный колледж искусств, 600039 Ченнай, Тамилнад, Индия
* Колледж искусств и наук Объединения институтов им. Шри Рамасвами, Канчипурам, Тамилнад, Индия
** Университет Инха, 402-751 Инчеон, Республика Корея
E-mails: gpalani32@yahoo.co.in, ejlalithkumar@gmail.com, kykim@inha.ac.kr

Рассматривается течение вязкой несжимаемой жидкости вдоль нагретого вертикального конуса с учетом зависимости вязкости и теплопроводности от температуры. Вязкость и теплопроводность жидкости считаются экспоненциальной и линейной функциями температуры соответственно. Исходные уравнения для ламинарной свободной конвекции жидкости приводятся к безразмерным дифференциальным уравнениям с частными производными, которые решаются с использованием неявной конечно-разностной схемы Крэнка — Николсона. Получены зависимости параметров течения от вязкости и теплопроводности жидкости.

Ключевые слова: свободная конвекция, изменяющиеся вязкость и теплопроводность, вертикальный конус.

DOI: 10.15372/PMTF20160311

Введение. Интерес к исследованию свободной конвекции под влиянием гравитационных сил обусловлен тем, что это явление встречается в природе и используется в различных технических устройствах. Если нагретая поверхность контактирует с жидкостью, то вследствие различия их температур возникают силы плавучести, которые и порождают свободную конвекцию. Причиной перемещений воздушных масс в атмосфере (ураганы, снежные бури, муссоны) является свободная конвекция. В основном задачи теплопереноса возникают при проектировании ядерных реакторов, солнечных батарей, силовых трансформаторов, парогенераторов и т. д. Существует большое количество работ, в которых рассматривалась задача свободной конвекции в потоке вдоль вертикального конуса. В [1, 2] получены автомодельные решения для случая изотермического конуса, в [3] — для случая, когда температура стенки конуса задается в виде степенной функции расстояния от вершины до стенки вдоль образующей. В работе [4] для случая, описанного в [3], проведено исследование течений жидкостей с малым числом Прандтля, получены численные решения задачи конвекции для жидких металлов и сделан вывод, что для жидкостей с меньшим числом Прандтля толщина пограничного слоя больше. В [5] изучена ламинарная свободная конвекция в вертикальном конусе. В [6] исследован стационарный смешанный конвективный поток через вертикальный конус при значениях числа Прандтля

$\mathrm{Pr} = 0{,}733$ (воздух) и $\mathrm{Pr} = 6{,}8$ (вода). В работах [7, 8] представлены результаты расчетов для случая свободной конвекции потока пограничного слоя жидкости на вращающемся конусе при постоянной или изменяющейся температуре его поверхности. В [9] получены решения задачи о переходной свободной конвекции в ламинарном потоке вязкой несжимаемой жидкости на неизотермическом конусе. Исходные уравнения в безразмерном виде решены методом Крэнка — Николсона. В [10] рассмотрена естественная конвекция потока на неизотермическом вертикальном конусе при воздействии магнитного поля и теплового излучения, с использованием неявной конечно-разностной схемы Крэнка — Николсона решены нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных.

Во всех указанных выше работах вязкость и теплопроводность жидкости считались постоянными вдоль всего потока. Однако известно, что при изменении температуры физические свойства жидкости могут существенно меняться [11]. Для более полного изучения поведения потока необходимо учитывать изменения вязкости и теплопроводности при изменении температуры. Зависимости различных физических характеристик жидкостей от температуры приведены в [12]. В работе [13] рассмотрена задача о быстром нагреве или охлаждении потока ньютоновской жидкости в канале, в случае когда зависимость вязкости от температуры имеет полиномиальный или экспоненциальный характер. В [14] исследовано течение вязкой несжимаемой жидкости вдоль нагретой вертикальной пластины с изменяющимися вязкостью и теплопроводностью. Система обыкновенных дифференциальных уравнений решалась аналитически и численно. В [15] изучено течение вязкой несжимаемой жидкости вдоль нагретой вертикальной пластины с учетом изменяющейся вязкости и теплопроводности при наличии магнитного поля. В работе [16] численно исследованы тепловое излучение и теплоперенос в потоке оптически плотной вязкой жидкости через изотермический клин. В [17] изучено влияние теплового излучения и вязкости на свободную конвекцию нестационарного потока на полубесконечной плоской пластине, находящейся в однородном магнитном поле. В [18] исследовано стационарное течение ньютоновской жидкости с вязкостью, зависящей от температуры, при наличии включения, которое равномерно нагревается или охлаждается относительно окружающей среды. Зависимости плотности, вязкости и теплопроводности от температуры в случае свободной конвекции ламинарного стационарного течения в пограничном слое при наличии теплового излучения и значительном изменении температуры изучены в работе [19]. В [20] исследован поток несжимаемой вязкой жидкости на непрерывно движущейся полубесконечной пластине с учетом изменения вязкости и температуры. Влияние теплового излучения и теплопроводности на теплоперенос через растягивающуюся поверхность с изменяющимся тепловым потоком изучено в [21]. В [22] исследованы течение и теплоперенос вязкой несжимаемой электропроводящей жидкости через непрерывно движущуюся бесконечную вертикальную пластину с учетом изменяющейся вязкости. Изменение вязкости и теплопроводности в потоке через нагретую непрерывно движущуюся пористую пластину при наличии магнитного поля изучены в [23]. В работе [24] исследовано влияние скорости химических реакций, термофореза, зависимости вязкости от температуры, а также теплового излучения на тепломассоперенос при свободной конвекции в магнитогидродинамическом потоке вязкой несжимаемой электропроводящей жидкости на внезапно начинающей движение бесконечной наклонной пористой пластине. В [25] проведено численное исследование течения жидкости вдоль вертикальной пластины при изменяющихся вязкости и теплопроводности. Безразмерные исходные уравнения решались численно.

Влияние зависимости вязкости и теплопроводности от температуры проявляется в изменении профилей скорости и температуры. При этом изменяются коэффициенты трения и теплопереноса. В настоящей работе рассматривается задача о свободной конвекции потока вязкой несжимаемой жидкости с изменяющимися вязкостью и теплопроводностью вдоль изотермического вертикального конуса. Предполагается, что вязкость и теплопроводность жидкости являются экспоненциальной и линейной функциями температуры соответственно. Безразмерные исходные уравнения решаются численно с использованием неявной конечно-разностной схемы. Получены зависимости скорости, температуры, напряжения сдвига и коэффициента теплопереноса от вязкости и теплопроводности.

1. Постановка задачи. Ниже формулируется задача о двумерной нестационарной свободной конвекции ламинарного потока вязкой несжимаемой жидкости с изменяющимися вязкостью и теплопроводностью в вертикальном конусе.

При постановке задачи использованы следующие предположения:

1. Координата x задает расстояние вдоль поверхности конуса от его вершины ($x = 0$), а координата y — расстояние вдоль внешней нормали к поверхности конуса.

2. Рассматривается изотермический вертикальный конус с локальным радиусом r, имеющий полуугол раствора φ. Стенки конуса имеют температуру T'_∞.

3. Температура окружающей жидкости равна T'_∞. При $t' > 0$ температура поверхности конуса равна $T'_w > T'_\infty$.

4. Вязкой диссипацией энергии пренебрегается.

5. Все физические свойства жидкости постоянны, за исключением вязкости, которая изменяется по экспоненциальному закону, теплопроводности, которая изменяется по линейному закону в зависимости от температуры жидкости, а также плотности, изменение которой оказывает существенное влияние на свободную конвекцию.

Исходные уравнения неразрывности, импульса и энергии для пограничного слоя рассматриваются в приближении Буссинеска.

С учетом принятых предположений уравнения сохранения в задаче о стационарном двумерном ламинарном пограничном слое записываются в виде

$$\frac{\partial (ru)}{\partial x} + \frac{\partial (rv)}{\partial y} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t'} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} = g\beta(T' - T'_\infty)\cos\varphi + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu\,\frac{\partial u}{\partial y}\Big); \tag{2}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} + u\,\frac{\partial T'}{\partial x} + v\,\frac{\partial T'}{\partial y} = \frac{1}{\rho C_p}\,\frac{\partial}{\partial y}\Big(k\,\frac{\partial T'}{\partial y}\Big), \tag{3}$$

где u, v — компоненты скорости в направлениях x и y соответственно; ρ — плотность жидкости; T' — температура жидкости в пограничном слое; t' — время; T'_∞ — температура на бесконечности; β — объемный коэффициент теплового расширения; C_p — удельная теплоемкость; μ — динамическая вязкость; g — ускорение свободного падения; k — теплопроводность жидкости.

Начальные и граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} t' \leqslant 0: &\qquad u = 0, \quad v = 0, \quad T' = T'_\infty, \\ t' > 0: &\qquad u = 0, \quad v = 0, \quad T' = T'_w \quad \text{при } y = 0, \\ &\qquad u = 0, \quad T' = T'_\infty \quad \text{при } x = 0, \\ &\qquad u \to 0, \quad T' \to T'_\infty \quad \text{при } y \to \infty. \end{aligned} \tag{4}$$

Зависимости вязкости и теплопроводности от безразмерной температуры T записываются следующим образом [13, 14, 18, 21, 26]:

$$\mu = \mu_0\,\mathrm{e}^{-\lambda T}; \tag{5}$$

$$k = k_0(1 + \gamma T). \tag{6}$$

Здесь λ, γ — параметры вязкости и теплопроводности соответственно; μ_0, k_0 — динамическая вязкость и теплопроводность при температуре T'_w.

Введем следующие безразмерные величины:

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}\,\mathrm{Gr}^{1/4}, \quad U = \frac{uL}{\nu}\,\mathrm{Gr}^{-1/2}, \quad V = \frac{vL}{\nu}\,\mathrm{Gr}^{-1/4}, \quad t = \frac{\nu t'}{L^2}\,\mathrm{Gr}^{1/2},$$
$$R = \frac{r}{L}, \quad T = \frac{T' - T'_\infty}{T'_w - T'_\infty}, \quad \mathrm{Gr} = \frac{g\beta L^3 (T'_w - T'_\infty)\cos\varphi}{\nu^2}, \quad \mathrm{Pr} = \frac{\mu_0 C_p}{k_0}, \quad \nu = \frac{\mu_0}{\rho} \tag{7}$$

(L — характерная длина; ν — кинематическая вязкость; Gr — число Грасгофа; Pr — число Прандтля; $r = x\sin\varphi$).

Уравнения (1)–(3) приводятся к безразмерной форме

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{U}{X} = 0; \tag{8}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\,\frac{\partial U}{\partial X} + V\,\frac{\partial U}{\partial Y} = T + \mathrm{e}^{-\lambda T}\,\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda T}\,\frac{\partial T}{\partial Y}\,\frac{\partial U}{\partial Y}; \tag{9}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U\,\frac{\partial T}{\partial X} + V\,\frac{\partial T}{\partial Y} = \frac{1+\gamma T}{\mathrm{Pr}}\,\frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} + \frac{\gamma}{\mathrm{Pr}}\Big(\frac{\partial T}{\partial Y}\Big)^2. \tag{10}$$

Соответствующие начальные и граничные условия имеют вид

$$\begin{gathered} t \leqslant 0: \qquad U = 0, \quad V = 0, \quad T = 0, \\ t > 0: \qquad U = 0, \quad V = 0, \quad T = 1 \quad \text{при } Y = 0, \\ U = 0, \quad T = 0 \quad \text{при } X = 0, \\ U \to 0, \quad T \to 0 \quad \text{при } Y \to \infty. \end{gathered} \tag{11}$$

Уравнения (8)–(10) с граничными условиями (11) описывают свободно-конвективный нестационарный ламинарный поток в пограничном слое с изменяющимися вязкостью и теплопроводностью вдоль изотермического полубесконечного вертикального конуса.

2. Численный метод. Двумерные нелинейные нестационарные дифференциальные уравнения в частных производных (8)–(10) с начальными и граничными условиями (11) решаются с помощью неявной конечно-разностной схемы Крэнка — Николсона, которая является быстросходящейся и безусловно устойчивой.

Ниже приведены конечно-разностные уравнения, соответствующие уравнениям (8)–(10):

$$\frac{U_{i,j}^{m+1} - U_{i-1,j}^{m+1} + U_{i,j}^{m} - U_{i-1,j}^{m} + U_{i,j-1}^{m+1} - U_{i-1,j-1}^{m+1} + U_{i,j-1}^{m} - U_{i-1,j-1}^{m}}{4\,\Delta X} +$$
$$+ \frac{V_{i,j}^{m+1} - V_{i,j-1}^{m+1} + V_{i,j}^{m} - V_{i,j-1}^{m}}{2\,\Delta Y} + \frac{U_{i,j}^{m+1} + U_{i,j-1}^{m+1} + U_{i,j}^{m} + U_{i,j-1}^{m}}{4i\,\Delta X} = 0; \tag{12}$$

$$\frac{U_{i,j}^{m+1} - U_{i,j}^{m}}{\Delta t} + U_{i,j}^{m}\,\frac{U_{i,j}^{m+1} - U_{i-1,j}^{m+1} + U_{i,j}^{m} - U_{i-1,j}^{m}}{2\,\Delta X} +$$
$$+ V_{i,j}^{m}\,\frac{U_{i,j+1}^{m+1} - U_{i,j-1}^{m+1} + U_{i,j+1}^{m} - U_{i,j-1}^{m}}{4\,\Delta Y} = \frac{1}{2}\,(T_{i,j}^{m+1} + T_{i,j}^{m}) +$$
$$+ \mathrm{e}^{-\lambda(T_{i,j}^{m+1} + T_{i,j}^{m})/2}\,\frac{U_{i,j-1}^{m+1} - 2U_{i,j}^{m+1} + U_{i,j+1}^{m+1} + U_{i,j-1}^{m} - 2U_{i,j}^{m} + U_{i,j+1}^{m}}{2(\Delta Y)^2} -$$
$$- \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda(T_{i,j}^{m+1} + T_{i,j}^{m})/2}\,\frac{T_{i,j+1}^{m+1} - T_{i,j-1}^{m+1} + T_{i,j+1}^{m} - T_{i,j-1}^{m}}{4\,\Delta Y}\,\frac{U_{i,j+1}^{m+1} - U_{i,j-1}^{m+1} + U_{i,j+1}^{m} - U_{i,j-1}^{m}}{4\,\Delta Y}; \tag{13}$$

Значения локального поверхностного трения τ и числа Нуссельта Nu в точке $X = 1{,}0$ для стационарного течения при $n = 0$, $\lambda = 0$, $\gamma = 0$, полученные в данной работе и работе [4]

Pr	τ		Nu	
	Данные [4]	Данные настоящей работы	Данные [4]	Данные настоящей работы
0,1	1,096 00	1,102 36	0,211 30	0,209 22
0,7	0,819 50	0,825 66	0,451 10	0,447 71
1,0	0,769 40	0,775 24	0,510 40	0,506 70

$$\frac{T_{i,j}^{m+1} - T_{i,j}^{m}}{\Delta t} + U_{i,j}^{m}\,\frac{T_{i,j}^{m+1} - T_{i-1,j}^{m+1} + T_{i,j}^{m} - T_{i-1,j}^{m}}{2\,\Delta X} + V_{i,j}^{m}\,\frac{T_{i,j+1}^{m+1} - T_{i,j-1}^{m+1} + T_{i,j+1}^{m} - T_{i,j-1}^{m}}{4\,\Delta Y} =$$
$$= \frac{1 + \gamma T_{i,j}^{m}}{\mathrm{Pr}}\,\frac{T_{i,j-1}^{m+1} - 2T_{i,j}^{m+1} + T_{i,j+1}^{m+1} + T_{i,j-1}^{m} - 2T_{i,j}^{m} + T_{i,j+1}^{m}}{2(\Delta Y)^2} +$$
$$+ \frac{\gamma}{\mathrm{Pr}}\Big(\frac{T_{i,j+1}^{m+1} - T_{i,j-1}^{m+1} + T_{i,j+1}^{m} - T_{i,j-1}^{m}}{4\,\Delta Y}\Big)^2. \qquad (14)$$

В качестве области интегрирования рассматривается прямоугольник со сторонами $X_{\max} = 1$ и $Y_{\max} = 16$. Граничные условия при $Y_{\max}$ соответствуют граничным условиям на бесконечности. Выбор значения $Y_{\max} = 16$ обусловлен тем, что при этом значении удовлетворяются два последних граничных условия (11). В (12)–(14) индекс i обозначает узел сетки в направлении X, j — в направлении Y, m — в направлении t.

Конечно-разностная система уравнений решается с помощью алгоритма Томаса [27].

3. Результаты исследования и их обсуждение. В расчетах значения параметров потока λ, γ, а также число Прандтля Pr выбирались в следующих интервалах [11, 14]: для воздуха $-0{,}7 \leqslant \lambda \leqslant 0$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 6$, $\mathrm{Pr} = 0{,}733$, для воды $0 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}6$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 0{,}12$, $0 \leqslant \mathrm{Pr} \leqslant 6$.

В таблице приведены значения локального поверхностного трения τ и локального числа Нуссельта Nu при различных значениях числа Прандтля (вязкость и теплопроводность являются постоянными ($\lambda = 0$, $\gamma = 0$)) в точке $X = 1{,}0$ для стационарного течения, а также результаты работы [4].

На рис. 1–8 показаны профили скорости вдоль координаты Y при $X = 1{,}0$ и различных значениях параметров вязкости, теплопроводности и числа Прандтля Pr. Видно, что скорость увеличивается, достигает максимального значения ($0 \leqslant Y \leqslant 1{,}5$) и затем постепенно уменьшается до нуля при $Y \to \infty$. Также замечено, что скорость и температура возрастают с увеличением времени и достигают локального максимума по времени, соответствующего стационарному состоянию.

На рис. 1, 2 представлены профили скорости и температуры вдоль координаты Y при $\gamma = 2$, $\mathrm{Pr} = 0{,}733$. Видно, что скорость со временем возрастает от нуля, достигает максимума $U = 0{,}469\,13$ при $t = 2{,}18$, а затем уменьшается до значения, соответствующего стационарному состоянию ($U = 0{,}452\,98$ при $t = 3{,}59$).

На рис. 3, 4 представлены профили скорости и температуры при $\lambda = -0{,}3$, $\mathrm{Pr} = 0{,}733$. Время, необходимое для достижения стационарного состояния, увеличивается с уменьшением γ. Следует отметить, что с увеличением γ происходит значительное увеличение скорости и температуры.

На рис. 5, 6 представлены профили скорости и температуры при $\gamma = 0{,}04$, $\mathrm{Pr} = 2$ и различных значениях λ. Из результатов численных расчетов следует, что время, необходимое для достижения локального максимума и стационарного состояния, уменьшается с увеличением параметра вязкости λ. Рост параметра вязкости λ приводит к увеличению скорости потока вблизи поверхности конуса, поскольку вязкость воды уменьшается.

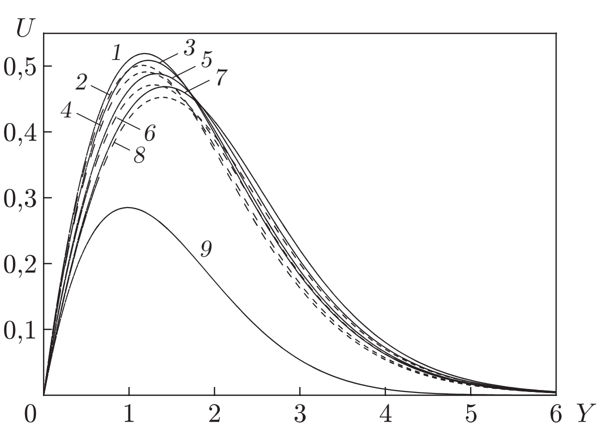

Рис. 1

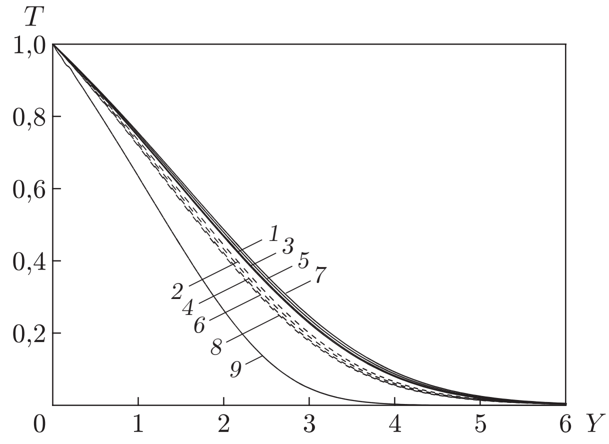

Рис. 2

Рис. 1. Распределения скорости по координате Y при $\gamma = 2$, $\mathrm{Pr} = 0{,}733$ и различных значениях параметров λ, t:

1, 2 — $\lambda = 0$ (*1* — $t = 2{,}09$, *2* — $t = 3{,}44$), *3, 4* — $\lambda = -0{,}1$ (*3* — $t = 2{,}12$, *4* — $t = 3{,}49$), *5, 6* — $\lambda = -0{,}3$ (*5* — $t = 2{,}18$, *6* — $t = 3{,}59$), *7, 8* — $\lambda = -0{,}5$ (*7* — $t = 2{,}24$, *8* — $t = 3{,}68$), *9* — $\lambda = 0$, $t = 0{,}82$; сплошные линии — неустановившийся режим, штриховые — установившийся режим

Рис. 2. Распределения температуры по координате Y при $\gamma = 2$, $\mathrm{Pr} = 0{,}733$ и различных значениях параметров λ, t:

1, 2 — $\lambda = -0{,}5$ (*1* — $t = 1{,}80$, *2* — $t = 3{,}68$), *3, 4* — $\lambda = -0{,}3$ (*3* — $t = 1{,}71$, *4* — $t = 3{,}59$), *5, 6* — $\lambda = -0{,}1$ (*5* — $t = 1{,}67$, *6* — $t = 3{,}49$), *7, 8* — $\lambda = 0$ (*7* — $t = 1{,}63$, *8* — $t = 3{,}44$), *9* — $\lambda = -0{,}5$, $t = 0{,}52$; сплошные линии — неустановившийся режим, штриховые — установившийся режим

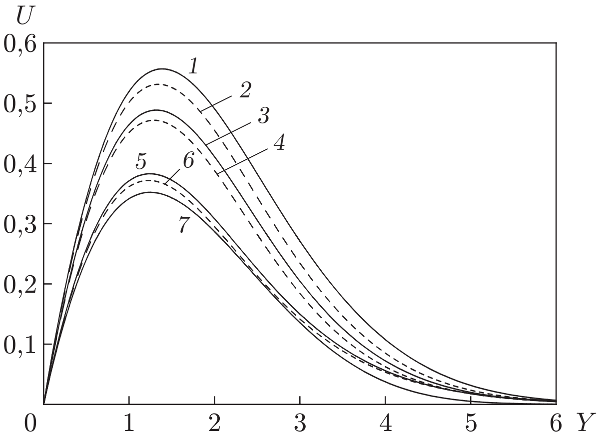

Рис. 3

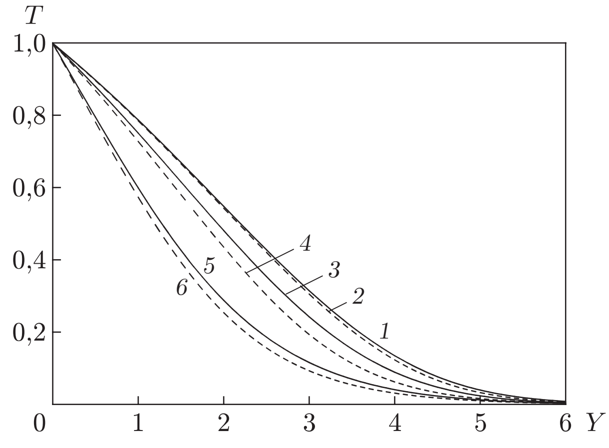

Рис. 4

Рис. 3. Распределения скорости по координате Y при $\lambda = -0{,}3$, $\mathrm{Pr} = 0{,}733$ и различных значениях параметров γ, t:

1, 2 — $\gamma = 4$ (*1* — $t = 1{,}79$, *2* — $t = 3{,}29$), *3, 4* — $\gamma = 2$ (*3* — $t = 2{,}18$, *4* — $t = 3{,}59$), *5, 6* — $\gamma = 0$ (*5* — $t = 2{,}66$, *6* — $t = 3{,}98$), *7* — $\gamma = 4$, $t = 0{,}75$; сплошные линии — неустановившийся режим, штриховые — установившийся режим

Рис. 4. Распределения температуры по координате Y при $\lambda = -0{,}3$, $\mathrm{Pr} = 0{,}733$ и различных значениях параметров γ, t:

1, 2 — $\gamma = 4$ (*1* — $t = 2{,}10$, *2* — $t = 3{,}29$), *3, 4* — $\gamma = 2$ (*3* — $t = 1{,}71$, *4* — $t = 3{,}59$), *5, 6* — $\gamma = 0$ (*5* — $t = 2{,}20$, *6* — $t = 3{,}98$); сплошные линии — неустановившийся режим, штриховые — установившийся режим

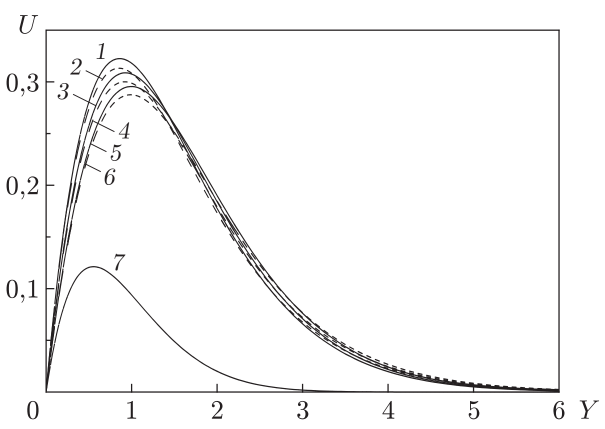

Рис. 5

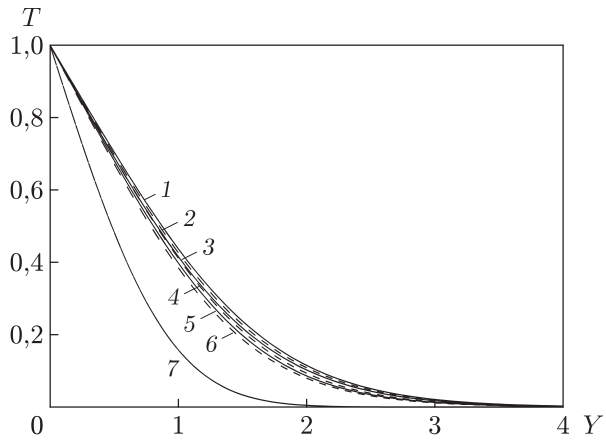

Рис. 6

Рис. 5. Распределения скорости по координате Y при $\gamma = 0{,}04$, $\Pr = 2$ и различных значениях параметров λ, t:
1, 2 — $\lambda = 0{,}4$ (*1* — $t = 2{,}96$, *2* — $t = 4{,}71$), *3, 4* — $\lambda = 0{,}2$ (*3* — $t = 3{,}05$, *4* — $t = 4{,}78$), *5, 6* — $\lambda = 0$ (*5* — $t = 3{,}18$, *6* — $t = 4{,}85$), *7* — $\lambda = 0{,}4$, $t = 0{,}75$; сплошные линии — неустановившийся режим, штриховые — установившийся режим

Рис. 6. Распределения температуры по координате Y при $\gamma = 0{,}04$, $\Pr = 2$ и различных значениях параметров λ, t:
1, 2 — $\lambda = 0$ (*1* — $t = 2{,}70$, *2* — $t = 4{,}85$), *3, 4* — $\lambda = 0{,}2$ (*3* — $t = 2{,}58$, *4* — $t = 4{,}78$), *5–7* — $\lambda = 0{,}4$ (*5* — $t = 2{,}49$, *6* — $t = 4{,}71$, *7* — $t = 0{,}50$); сплошные линии — неустановившийся режим, штриховые — установившийся режим

Из рис. 5 следует, что максимум скорости достигается вблизи поверхности конуса при больших значениях λ. Это обусловлено тем, что при переменной вязкости ($\lambda > 0$) вблизи нагретой поверхности жидкость движется быстрее, так как при $\lambda > 0$ вязкость жидкости меньше, чем в случае, когда она постоянна.

На рис. 6 видно, что с ростом λ температура уменьшается. Это согласуется с тем фактом, что максимальное значение скорости увеличивается с ростом λ.

На рис. 7, 8 показаны профили скорости и температуры при $\lambda = 0{,}3$, $\Pr = 2$ и различных значениях γ. Видно, что время, необходимое для достижения стационарного состояния, с увеличением значения γ уменьшается. Из рис. 7 следует, что с увеличением γ скорость возрастает. На поверхности конуса теплопроводность не меняется, однако на значительном расстоянии от него она меняется существенно. Кроме того, с увеличением значения γ температура жидкости возрастает.

Важными характеристиками потока являются напряжение сдвига и скорость теплообмена на поверхности конуса.

Локальное напряжение сдвига на поверхности конуса определяется формулой

$$\tau_x = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big|_{y=0}. \tag{15}$$

Подставляя безразмерные величины из уравнений (5), (6) в (15), получаем выражение для поверхностного трения в безразмерном виде

$$\tau_X = \mathrm{e}^{-\lambda} \operatorname{Gr}^{3/4} \left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)\Big|_{Y=0}. \tag{16}$$

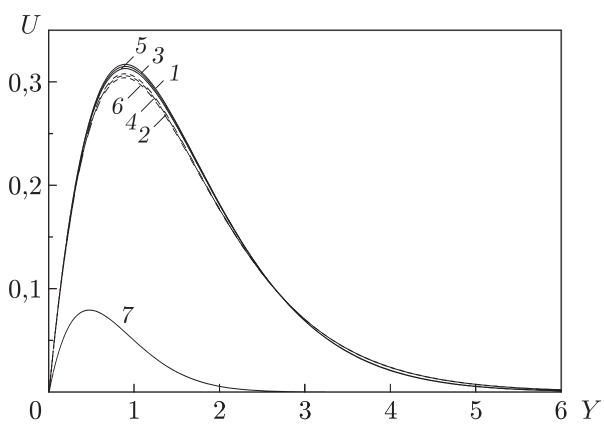

Рис. 7

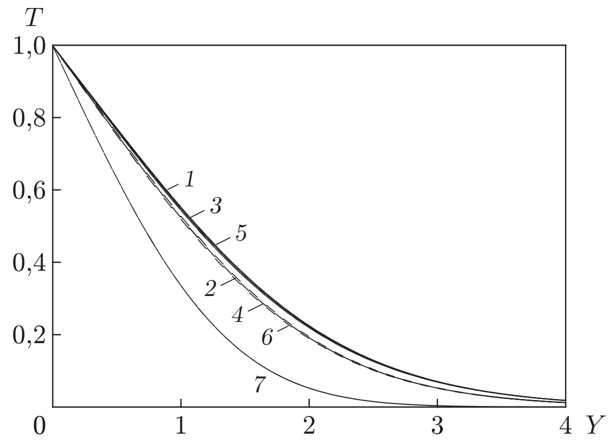

Рис. 8

Рис. 7. Распределения скорости по координате Y при $\lambda = 0{,}3$, $\mathrm{Pr} = 2$ и различных значениях параметров γ, t:
1, 2 — $\gamma = 0{,}06$ (*1* — $t = 2{,}99$, *2* — $t = 4{,}73$), *3, 4* — $\gamma = 0{,}03$ (*3* — $t = 3{,}01$, *4* — $t = 4{,}75$), *5, 6* — $\gamma = 0$ (*5* — $t = 3{,}03$, *6* — $t = 4{,}77$), *7* — $\gamma = 0{,}06$, $t = 0{,}50$; сплошные линии — неустановившийся режим, штриховые — установившийся режим

Рис. 8. Распределения температуры по координате Y при $\lambda = 0{,}3$, $\mathrm{Pr} = 2$ и различных значениях параметров γ, t:
1, 2 — $\gamma = 0{,}06$ (*1* — $t = 2{,}51$, *2* — $t = 4{,}73$), *3, 4* — $\gamma = 0{,}03$ (*3* — $t = 2{,}51$, *4* — $t = 4{,}75$), *5, 6* — $\gamma = 0$ (*5* — $t = 2{,}55$, *6* — $t = 4{,}77$), *7* — $\gamma = 0{,}06$, $t = 0{,}60$; сплошные линии — неустановившийся режим, штриховые — установившийся режим

Уравнение для среднего поверхностного трения в безразмерной форме записывается следующим образом:

$$\bar{\tau} = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\mathrm{Gr}^{3/4}\int\limits_0^1 \Big(\frac{\partial U}{\partial Y}\Big)\Big|_{Y=0}\,dX. \tag{17}$$

Локальное число Нуссельта определяется формулой

$$\mathrm{Nu}_x = -\frac{-L}{k_0(T'_w - T'_\infty)}\,\Big(k\,\frac{\partial T'}{\partial y}\Big)\Big|_{y=0}. \tag{18}$$

Подставляя безразмерные переменные из уравнений (5), (7) в (18), получаем выражение для локального числа Нуссельта

$$\mathrm{Nu}_X = -\,\mathrm{Gr}^{1/4}(1+\gamma)\Big(\frac{\partial T}{\partial Y}\Big)\Big|_{Y=0}. \tag{19}$$

Среднее число Нуссельта определяется формулой

$$\overline{\mathrm{Nu}} = -2\,\mathrm{Gr}^{1/4}(1+\gamma)\int\limits_0^1 \Big(\frac{\partial T}{\partial Y}\Big)\Big|_{Y=0}\,dX. \tag{20}$$

Производные, входящие в уравнения (16), (17), (19), (20), вычисляются по формуле пятиточечной аппроксимации, а интегралы — по замкнутой формуле Ньютона — Котеса.

На рис. 9 приведена зависимость локального поверхностного трения, вычисленного из уравнения (16), от координаты X при различных значениях параметров λ, γ, Pr. Видно,

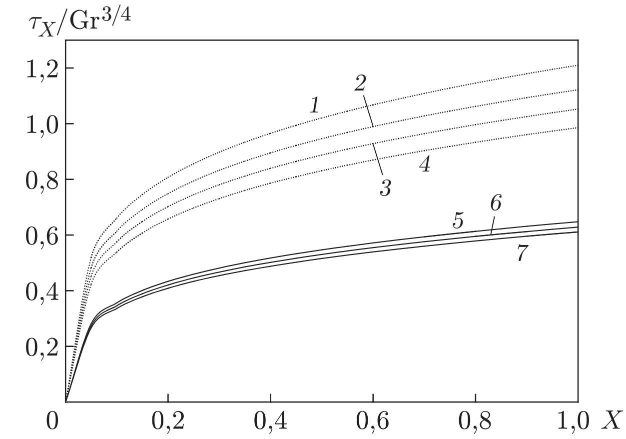

Рис. 9

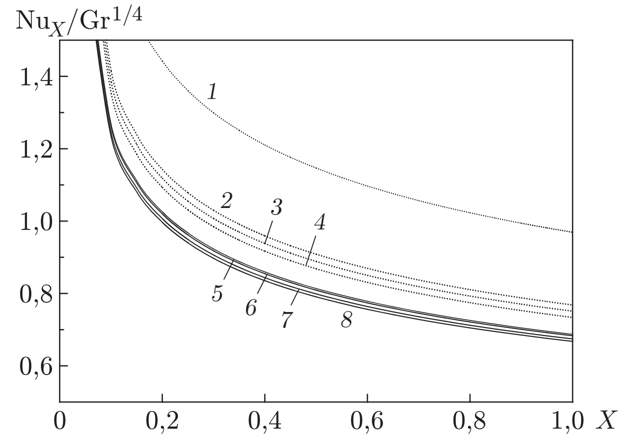

Рис. 10

Рис. 9. Распределения локального поверхностного трения по координате X при различных значениях Pr, γ, λ:
1–4 — Pr = 0,733 (*1* — $\lambda = -0{,}5$, $\gamma = 4$; *2* — $\lambda = -0{,}5$, $\gamma = 2$; *3* — $\lambda = -0{,}3$, $\gamma = 2$; *4* — $\lambda = -0{,}1$, $\gamma = 2$), *5–7* — Pr = 2 (*5* — $\lambda = 0{,}2$, $\gamma = 0{,}04$; *6* — $\lambda = -0{,}3$, $\gamma = 0{,}3$; *7* — $\lambda = 0$, $\gamma = 0{,}04$)

Рис. 10. Распределения локального числа Нуссельта по координате X при различных значениях Pr, γ, λ:
1–4 — Pr = 0,733 (*1* — $\lambda = -0{,}5$, $\gamma = 4$; *2* — $\lambda = -0{,}5$, $\gamma = 2$; *3* — $\lambda = -0{,}1$, $\gamma = 2$; *4* — $\lambda = -0{,}3$, $\gamma = 2$), *5–8* — Pr = 2 (*5* — $\lambda = 0{,}2$, $\gamma = 0{,}04$; *6* — $\lambda = 0{,}4$, $\gamma = 0{,}04$; *7* — $\lambda = 0{,}3$, $\gamma = 0{,}06$; *8* — $\lambda = 0{,}3$, $\gamma = 0{,}03$)

что с увеличением X локальное поверхностное трение возрастает. Заметим, что поверхностный сдвиг уменьшается с увеличением значения параметра вязкости λ. С ростом значения параметра теплопроводности γ локальное поверхностное трение увеличивается. На рис. 10 показана зависимость локального числа Нуссельта от координаты X для стационарного течения при различных значениях параметров λ, γ. Видно, что с увеличением параметров вязкости и теплопроводности локальная скорость теплопереноса увеличивается.

На рис. 11 представлена зависимость средних значений поверхностного трения, вычисленных из уравнения (17), от времени при различных значениях параметров вязкости и теплопроводности для воздуха и воды. Видно, что среднее поверхностное трение увеличивается со временем и через некоторый промежуток времени достигает значения, соответствующего стационарному течению. С увеличением параметра вязкости λ величина среднего поверхностного трения уменьшается, а с увеличением параметра теплопроводности γ — увеличивается. На рис. 12 показана зависимость среднего значения числа Нуссельта от времени. Видно, что при уменьшении λ и γ среднее значение числа Нуссельта уменьшается.

Заключение. Проведено численное исследование ламинарного свободноконвективного потока жидкости через изотермический вертикальный конус при изменяющихся вязкости и теплопроводности. Предполагалось, что вязкость жидкости изменяется как экспоненциальная функция температуры, а теплопроводность — как линейная функция. Исходные уравнения в безразмерном виде решались с использованием эффективной неявной конечно-разностной схемы Крэнка — Николсона. Проведено сравнение результатов численных расчетов, полученных в настоящей работе, с известными данными. Показано, что они хорошо согласуются. Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы.

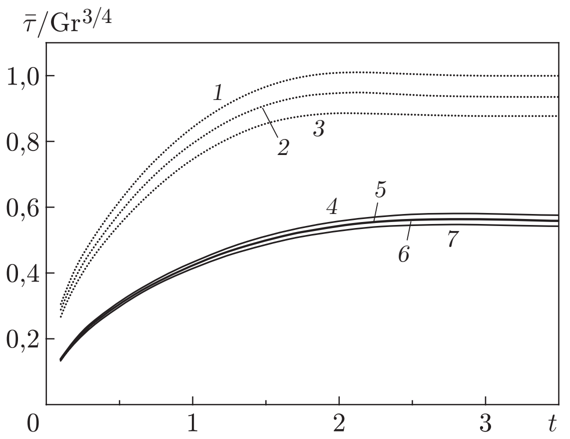

Рис. 11

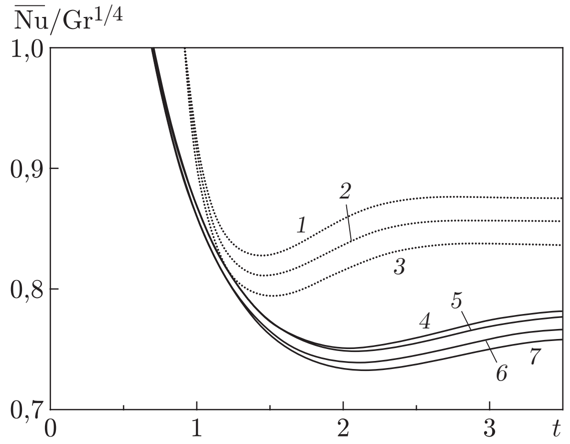

Рис. 12

Рис. 11. Зависимость средних значений поверхностного трения от времени при различных значениях Pr, γ, λ:
1–3 — Pr = 0,733 (*1* — $\lambda = -0{,}5$, $\gamma = 2$; *2* — $\lambda = -0{,}3$, $\gamma = 2$; *3* — $\lambda = -0{,}1$, $\gamma = 2$), *4–7* — Pr = 2 (*4* — $\lambda = 0{,}2$, $\gamma = 0{,}04$; *5* — $\lambda = 0{,}3$, $\gamma = 0{,}03$; *6* — $\lambda = 0{,}3$, $\gamma = 0{,}06$; *7* — $\lambda = 0{,}4$, $\gamma = 0{,}04$)

Рис. 12. Зависимость среднего значения числа Нуссельта от времени при различных значениях Pr, γ, λ:
1–3 — Pr = 0,733 (*1* — $\lambda = -0{,}1$, $\gamma = 2$; *2* — $\lambda = -0{,}3$, $\gamma = 2$; *3* — $\lambda = -0{,}5$, $\gamma = 2$), *4–7* — Pr = 2 (*4* — $\lambda = 0{,}4$, $\gamma = 0{,}04$; *5* — $\lambda = 0{,}3$, $\gamma = 0{,}06$; *6* — $\lambda = 0{,}3$, $\gamma = 0{,}03$; *7* — $\lambda = 0{,}2$, $\gamma = 0{,}04$)

С увеличением параметра λ (вязкость воздуха уменьшается) скорость U вблизи поверхности конуса возрастает, а на значительном расстоянии от нее уменьшается.

Влияние теплопроводности на скорость и температуру является более существенным в начальный период.

Различие значений локального максимума скорости и максимума скорости, соответствующего стационарному состоянию, возрастает с увеличением параметра теплопроводности γ, однако для профилей температуры наблюдается обратная зависимость.

С ростом параметров вязкости и теплопроводности локальная скорость теплопереноса увеличивается.

Пренебрежение зависимостью вязкости и теплопроводности жидкости от температуры приводит к возникновению существенных погрешностей. Таким образом, для получения более точных результатов расчетов необходимо учитывать эту зависимость.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Merk H. J., Prins S. J.** Thermal convection in boundary layer. 1 // Appl. Sci. Res. 1953. V. 4A. P. 11–24.
2. **Merk H. J., Prins S. J.** Thermal convection in boundary layer. 2 // Appl. Sci. Res. 1953. V. 4A. P. 195–206.
3. **Hering R. G., Grosh R. J.** Laminar free convection from a non-isothermal cone // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1962. V. 8. P. 1059–1068.
4. **Hering R. G.** Laminar free convection from a non-isothermal cone at low Prandtl numbers // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1965. V. 8. P. 1333–1337.

5. **Alamgir M.** Overall heat transfer from vertical cones in laminar free convection: an approximate method // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1989. V. 101. P. 174–176.
6. **Kumar M., Pop I.** Free convection over a vertical rotating cone with constant heat flux // J. Appl. Mech. Engng. 1998. V. 3. P. 451–464.
7. **Wang T. T.** General analysis of thermal convection heat transfer on a vertical cone // J. Chinese Soc. Mech. Engng. 1991. V. 12. P. 227–232.
8. **Wang T. T., Kleinstreuer C., Chiang H.** Mixed convection from a rotating cone with variable surface temperature // Numer. Heat Transfer. Pt A. 1994. V. 25. P. 75–83.
9. **Bapuji Pullepul J., Ekambavannan K., Pop I.** Finite difference analysis of laminar free convection flow past a non isothermal vertical cone // Heat Mass Transfer. 2008. V. 44. P. 517–526.
10. **Thandapani E., Ragavan A. R., Palani G.** Finite difference solution of unsteady natural convection flow past a non isothermal cone under the influence of magnetic field and thermal radiation // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2012. V. 53, N 2. P. 408–421.
11. **Schlichting H.** Boundary layer theory. N. Y.: McGraw Hill, 1979.
12. **Kays W. M.** Convective heat and mass transfer / W. M. Kays, M. E. Crawford. N. Y.: McGraw Hill, 1980.
13. **Ockendon H., Ockendon J. R.** Variable-viscosity flows in heated and cooled channels // J. Fluid Mech. 1977. V. 83, N 1. P. 177–190.
14. **Elbashbeshy E. M. A., Ibrahim F. N.** Steady free convection flow with variable viscosity and thermal diffusivity along a vertical plate // J. Phys. D: Appl. Phys. 1993. V. 26, N 12. P. 2137–2143.
15. **Elbashbeshy E. M. A.** Free convection flow with variable viscosity and thermal diffusivity along a vertical plate in the presence of the magnetic field // Intern. J. Engng Sci. 2000. V. 38. P. 207–213.
16. **Elbashbeshy E. M. A., Dimian M. F.** Effect of radiation on the flow and heat transfer over a wedge with variable viscosity // Appl. Math. Comput. 2002. V. 132. P. 445–454.
17. **Seddeek M. A.** Effect of variable viscosity on a MHD free convection flow past a semi-infinite at flat plate with an aligned magnetic field in the case of unsteady flow // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2002. V. 45. P. 931–935.
18. **Wilson S. K., Duffy B. R.** Strong temperature-dependent-viscosity effects on a rivulet draining down a uniformly heated or cooled slowly varying substrate // Phys. Fluids. 2003. V. 15, N 4. P. 827–840.
19. **Abo-Eldahab E. M.** The effects of temperature-dependent fluid properties on free convective flow along a semi-infinite vertical plate by the presence of radiation // Heat Mass Transfer. 2004. V. 41, N 2. P. 163–169.
20. **Soundalgekar V. M., Takhar H. S., Das U. N., et al.** Effect of variable viscosity on boundary layer flow along a continuously moving plate with variable surface temperature // Heat Mass Transfer. 2004. V. 40. P. 421–424.
21. **Seddeek M. A., Abdelmeguid M. S.** Effects of radiation and thermal diffusivity on heat transfer over a stretching surface with variable heat flux // Phys. Lett. A. 2006. V. 348, N 3–6. P. 172–179.
22. **Mahmoud M. A. A.** Variable viscosity effects on hydromagnetic boundary layer flow along a continuously moving vertical plate in the presence of radiation // Appl. Math. Sci. 2007. V. 1, N 17. P. 799–814.
23. **Tsai R., Huang K. H., Huang J. S.** The effects of variable viscosity and thermal conductivity on heat transfer for hydromagnetic flow over a continuous moving porous plate with Ohmic heating // Appl. Thermal Engng. 2009. V. 29. P. 1921–1926.

24. **Alam M. S., Rahman M. M., Sattar M. A.** Transient magnetohydrodynamic free convective heat and mass transfer flow with thermophoresis past a radiate inclined permeable plate in the presence of variable chemical reaction and temperature dependent viscosity // Nonlinear Anal. Modelling Control. 2009. V. 14, N 1. P. 3–20.
25. **Palani G., Kwang Yong Kim.** Numerical study on a vertical plate with variable viscosity and thermal conductivity // Arch. Appl. Mech. 2010. V. 80. P. 711–725.
26. **Slattery J. C.** Momentum, energy and mass transfer in continua. N. Y.: McGraw Hill, 1972.
27. **Carnahan B.** Applied numerical methods / B. Carnahan, H. A. Luther, J. O. Wilkes. N. Y.: John Wiley and Sons, 1969.

Поступила в редакцию 27/III 2014 г.,
в окончательном варианте — 29/IV 2014 г.