

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О СТОЛКНОВЕНИИ ОБЛАКОВ РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ

В. А. Енальский, В. С. Имшенник

(Москва)

Задача о взаимопроникновении двух облаков разреженной плазмы интересна во многих вопросах физики плазмы, астрофизики и геофизики. Если скорость относительного движения этих плазменных облаков достаточно велика по сравнению с тепловыми скоростями, то линейная теория предсказывает неустойчивость по отношению к продольным электростатическим колебаниям [1]. Первоначальная энергия направленного относительного движения облаков плазмы в той или иной мере переходит в энергию колебательного движения, в которую уже существенно входит энергия электрического поля. В принципе такое превращение энергии может быть настолько полным, что взаимопроникновение облаков плазмы будет носить характер неупругого удара. Если облака имели равную массу и одно из них покоилось, то это означает, что половина энергии направленного движения диссипировала в энергию колебательного движения. В разреженной плазме столкновения частиц не играют роли, и поэтому не следует ожидать, что диссипировавшая доля энергии распределится по закону Максвелла среди частиц плазмы, а электрические поля исчезнут. Однако нелинейные взаимодействия в спектре колебаний значительно ускоряют процессы хаотизации и максвеллизации колебательного движения плазмы. Изучение нелинейной задачи о взаимопроникновении облаков плазмы возможно только численными методами. Ниже предлагается модель плазмы, которая допускает численное исследование этой задачи. Подобная модель уже ранее использовалась в других задачах разреженной плазмы Бьюнеманом [2] и Даусоном [3], а при расчете действия объемного заряда в ускорителе — Ломневым [4]. Приближенное решение задачи о взаимопроникновении облаков плазмы на основе линейной теории дано Паркером [5], но в этой работе основные выводы мало обоснованы. В данной работе приводятся некоторые результаты численных расчетов задачи. Ради простоты рассмотрена одномерная задача, где направление выделено скоростью относительного движения облаков плазмы. В конкретных расчетах в качестве ионов фигурировали протоны, т. е. $M/m = 1837$.

§ 1. Дискретная модель плазмы и исходные уравнения. Запишем исходное одномерное кинетическое уравнение α -компоненты плазмы ($\alpha = i, e$ — ионы и электроны) в виде

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + \frac{p}{m_\alpha} \frac{\partial F_\alpha}{\partial x} + e_\alpha E \frac{\partial F_\alpha}{\partial p} = 0 \quad (1.1)$$

где случайная величина

$$F_\alpha = \sum_i \delta[x - x_i^\alpha(t)] \delta[p - p_i^\alpha(t)] \quad (1.2)$$

вычисляется суммированием по всем элементарным частицам плазмы произведений двух δ -функций. Необходимым и достаточным условием того, чтобы функция $F_\alpha(x, p, t)$ удовлетворяла уравнению (1.1), является выполнение уравнений механики для каждой i -й частицы

$$p_i^\alpha(t) = e_\alpha E, \quad \dot{x}_i^\alpha(t) = \frac{1}{m_\alpha} p_i^\alpha(t) \quad (1.3)$$

В качестве силы в уравнении (1.1) учтено лишь электрическое поле E , хотя это ограничение не обязательно.

Из уравнения (1.1), точнее, из его трехмерного аналога, могут быть получены все известные кинетические уравнения плазмы путем введения

усредненных функций распределения, как это было показано Климонтовичем [6]. Впервые Бьюнеман [2] предложил моделировать плазму системой конечного числа уравнений (1.3) и изучать при помощи ее численного решения нелинейные процессы в электростатических колебаниях плазмы.

Согласно предыдущему, это эквивалентно решению кинетического уравнения (1.1), которое является исходным и для кинетического уравнения плазмы, учитывающего эффект парных взаимодействий. Поэтому модель плазмы из ограниченного числа макрочастиц, что соответствует конечному числу уравнений (1.3), не только описывает движение плазмы в самосогласованном электрическом поле, но и, очевидно, включает эффект парных взаимодействий. В трехмерном случае для макрочастиц с массой qm_e , зарядом qe и скоростью v_0 длина пробега, определенная, как обычно, равна

$$l_0 \approx \frac{m_e^2 v_0^4}{ne^4 L} \frac{1}{q} \quad (1.4.1)$$

Здесь L — кулоновский логарифм, предполагаемый существенно большим единицы, n — плотность электронов плазмы. Для решения вопроса об эффекте парных взаимодействий в рассматриваемой ниже модели плазмы достаточно ограничиться случаем макроэлектронов в (1.4.1). В одномерной задаче сохраняется формула (1.4.1), только вместо кулоновского логарифма войдет постоянная величина $4\pi^2$. Если v_0 — скорость движения макрочастиц — равна скорости электронов плазмы, то длина пробега макрочастиц оказывается, согласно (1.4.1), в q раз меньше длины пробега электронов плазмы. Другими словами, эффективность парных взаимодействий возрастает в q раз. С другой стороны, в этой же модели характеристики коллективных движений плазмы (длина волны, частота и т. п.) не изменяются. В результате этого в модели искажается реальное соотношение эффектов коллективных и парных взаимодействий. Следовательно, модель описывает удовлетворительным образом нелинейные электростатические колебания плазмы, если эффект парных взаимодействий мал. Сформулируем соответствующее условие. Характерная длина волны колебаний должна быть значительно меньше длины пробега l_0 из (1.4.1), т. е. $v_0 / \Omega_0 \ll l_0$. Отношение этих величин, если ввести число макрочастиц на новую единицу длины $v_0 / k\Omega_0$, равно

$$\frac{v_0}{\Omega_0 l_0} = \frac{1}{4k^3 a^3} \ll 1, \quad a = \left(\frac{n}{q}\right)^{1/3} \frac{v_0}{k\Omega_0} \quad (1.4.2)$$

В рассматриваемой ниже задаче $a = \ln n_0^* = 4$ и $k = 2^{-1}$ (см. § 2), полученное отношение равно 32^{-1} . По-видимому, подобный критерий слишком жесткий, так как не учитывает величины самосогласованного поля, значительно превышающего электрическое поле одной макрочастицы в данной задаче. Из (1.4.2) следует естественный вывод о необходимости достаточно большого числа макрочастиц на единицу длины, чтобы парные взаимодействия макрочастиц не играли существенной роли¹.

Законы сохранения импульса и энергии непосредственно следуют из уравнения (1.1). Импульс и кинетическая энергия частиц определяются через функцию F_α

$$I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p \sum_{\alpha} F_{\alpha}(x, p, t) dx dp, \quad W(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p^2}{2} \sum_{\alpha} \frac{F_{\alpha}(x, p, t)}{m_{\alpha}} dx dp \quad (1.5)$$

Если электрическое поле удовлетворяет уравнениям Максвелла и обращается в нуль на бесконечности, т. е. отсутствует внешнее поле, а функции F_α равны нулю при $|p| \rightarrow \infty$ (точнее, $p^2 F_\alpha \rightarrow 0$ при $|p| \rightarrow \infty$), то имеют место законы сохранения импульса и энергии

$$\frac{\partial I}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(W + \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E^2 dx \right) = 0 \quad (1.6)$$

¹ Пренебрежение эффектом парных взаимодействий в плазме приводит к более мягкому критерию

$$\frac{v_0}{\Omega_0 l_0 q} = \frac{1}{4a^3 k^3 q} \ll 1 \quad (a \sim n^{-1/3})$$

При этом электрическое поле связано с плотностью частиц

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi \sum_{\alpha} e_{\alpha} f_{\alpha}, \quad f_{\alpha} = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\alpha} dp \quad (1.7)$$

Дальнейшая задача состоит в переходе к решению ограниченного возможностями вычислительных машин конечного числа уравнений (1.3), которые все же моделируют реальную плазму. Для этого соседние в фазовом пространстве частицы объединяются в укрупненные макрочастицы, число которых, согласно предыдущему (см. (1.4.2)), должно быть достаточно велико.

Введем понятие макрочастицы, содержащей q элементарных частиц с одной и той же скоростью и координатой. Сперва будем считать все макрочастицы имеющими одно и то же значение q . Для электропно-протонной плазмы получим из (1.3) и (1.7) систему уравнений

$$m \frac{d^2 x_{ei}}{dt^2} = -eE, \quad M \frac{d^2 x_{pi}}{dt^2} = eE \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi e q (n_p - n_e) \quad (1.9)$$

Здесь n_p , n_e — плотности макрочастиц протонов и электронов, i — порядковый номер макрочастицы электронов или протонов. Если проинтегрировать уравнение (1.9), то, учитывая обращение в нуль электрического поля на бесконечности $E(-\infty) = 0$, получим

$$E(x, t) = 4\pi e q (N_p - N_e) \quad (1.10)$$

Здесь введено обозначение

$$N_{\alpha}(x, t) = \int_{-\infty}^x n_{\alpha}(x', t) dx' \quad (1.11)$$

числа макрочастиц α -компоненты плазмы, находящихся левее точки с координатой x в столбике с единичной площадью поперечного сечения.

Перейдем в уравнениях (1.8) и (1.10) к безразмерным единицам времени и длины. Пусть

$$\tau = k\Omega_0 t, \quad \xi = \frac{k\Omega_0 x}{v_0}, \quad \Omega_0 = \left(\frac{4\pi e^2 q n_0}{m} \right)^{1/2} \quad (1.12)$$

Здесь Ω_0 — электронная плазменная частота, n_0 — характерная плотность макрочастиц, v_0 — характерная скорость, k — произвольный численный коэффициент. При помощи (1.12) получим в безразмерных переменных из (1.8) и (1.10) две группы уравнений

$$\frac{d^2 \xi_{ei}}{d\tau^2} = -\frac{\Omega_0}{v_0 n_0 k} (N_p - N_e), \quad \frac{d^2 \xi_{pi}}{d\tau^2} = \frac{m}{M} \frac{\Omega_0}{v_0 n_0 k} (N_p - N_e) \quad (1.13)$$

В рассматриваемой одномерной задаче естественно говорить о макрослоях, объединяя все макрочастицы с одинаковой координатой x в одну. По существу это новое понятие ничего не изменяет, кроме размерности величин n_0 и N_{α} . Поэтому по-прежнему сохраним за макрослоями название макрочастиц. Теперь только под n_0 будем понимать характерную линейную плотность макрочастиц¹. Если, наконец, для каждой

¹ В Ω_0 , конечно, как и раньше под n_0 , нужно понимать объемную плотность макрочастиц.

макрочастицы ввести самодействие, понимая под ξ_i координату ее центра инерции, то окончательная форма уравнений (1.13) будет иметь вид

$$\frac{d^2 \xi_{ei}}{d\tau^2} = -\frac{1}{b} \left[N_p(\xi_{ei}) - N_e(\xi_{ei}) - \frac{1}{2} \right] \quad (1.14)$$

$$\frac{d^2 \xi_{pi}}{d\tau^2} = \frac{m}{M} \frac{1}{b} \left[N_p(\xi_{pi}) + \frac{1}{2} - N_e(\xi_{pi}) \right] \quad (1.15)$$

В уравнениях (1.14) и (1.15) фигурируют величины

$$b = k^2 n_0^*, \quad n_0^* = n_0 \frac{v_0}{k\Omega_0} \quad (1.16)$$

Здесь n_0^* — характерная линейная плотность макрочастиц, отнесенная к введенной в (1.12) единице длины.

Первоначальный тепловой разброс в каждой точке пространства можно учесть, подразделяя как электронную, так и протонную макрочастицы на l более мелких макрочастиц с весом q_s для s -го сорта (здесь $s = 1, \dots, l$). Если нормировать q_s условием

$$q_1 + \dots + q_l = 1 \quad (1.17)$$

то уравнения движения для i -й макрочастицы s -го сорта, как нетрудно понять, будут иметь вид

$$\frac{d^2 \xi_{ei}}{d\tau^2} = \frac{q_{ei}}{2b} + \frac{1}{b} \left[\sum_{s=1}^l q_s N_e^s(\xi_{ei}) - \sum_{s=1}^l q_s N_p^s(\xi_{ei}) \right] \quad (1.18)$$

$$\frac{M}{m} \frac{d^2 \xi_{pi}}{d\tau^2} = \frac{q_{pi}}{2b} + \frac{1}{b} \left[\sum_{s=1}^l q_s N_p^s(\xi_{pi}) - \sum_{s=1}^l q_s N_e^s(\xi_{pi}) \right] \quad (1.19)$$

Входящие в (1.18) суммы имеют следующий смысл:

$$\sum_{s=1}^l q_s N_e^s(\xi_{ei}) \text{ — сумма весов всех электронных макрочастиц,}$$

$$\sum_{s=1}^l q_s N_p^s(\xi_{ei}) \text{ — сумма весов всех протонных макрочастиц, находящихся левее макроэлектрона с координатой } \xi_{ei}.$$

Тот же смысл имеют суммы и в (1.19), с той лишь разницей, что суммирование весов частиц ведется здесь по всем частицам, находящимся левее макропротона с координатой ξ_{pi} .

Таким образом, видим общность в правых частях (1.18) и (1.19). Если еще считать, что все частицы (независимо от того — электрон это или протон) пронумерованы в порядке возрастания их координаты, то возможна объединенная запись (1.18) и (1.19) в виде

$$\lambda \frac{d^2 \xi_i}{d\tau^2} = \frac{\gamma_i}{2b} + \frac{1}{b} \sum_{\mu=1}^{i-1} \gamma_\mu \quad (i = 1, 2, \dots, 2lN) \quad (1.20)$$

Здесь $2lN$ — число всех частиц, γ_i — вес i -й частицы, причем

$$\gamma_i = \begin{cases} q_i & \text{— для электронной частицы,} \\ -q_i & \text{— для протонной частицы,} \end{cases}$$

$$\lambda = \begin{cases} 1 & \text{, если } \xi_i \text{ — координата электрона,} \\ -M/m & \text{, если } \xi_i \text{ — координата протона.} \end{cases}$$

Важную роль в ходе решения задачи имеют законы сохранения импульса и энергии (1.6), которые для дискретной модели плазмы при-

обретают вид

$$\frac{d}{d\tau} \left[\sum_{i=1}^{2lN} \gamma_i \lambda \frac{d\xi_i}{d\tau} \right] = 0 \quad (1.21)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2lN} \gamma_i \lambda \left(\frac{d\xi_i}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{2b} \sum_{i=1}^{2lN} \gamma_i \xi_i \left(\gamma_i + 2 \sum_{\mu=1}^{i-1} \gamma_\mu \right) \right] = 0 \quad (1.22)$$

Уравнения (1.21), (1.22) непосредственно следуют из (1.20). В законе сохранения энергии фигурирует безразмерная электростатическая энергия

$$\varepsilon = \frac{1}{2b} \sum_{i=1}^{2lN} \gamma_i \xi_i \left(\gamma_i + 2 \sum_{\mu=1}^{i-1} \gamma_\mu \right) \quad (1.23)$$

Легко показать, что ε из (1.23) равно

$$\varepsilon = \frac{1}{mqv_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E^2}{8\pi} dx \quad (1.24)$$

причем E определено в (1.10).

§ 2. Постановка задачи о столкновении облаков плазмы и выбор метода счета. Идеализированная задача о столкновении двух облаков плазмы может быть сформулирована применительно к полученной в конце § 1 системе уравнений. Прежде всего идеализация состоит в том, что оба облака не ограничены в направлениях, перпендикулярных к оси ξ . Далее, в данной постановке не может быть учтена роль магнитного поля. Наконец, развитие колебаний в косых волнах (вектор $\mathbf{k}$ не совпадает по направлению со скоростью v_0) также не принимается во внимание. Однако все эти ограничения физического смысла задачи не играют решающего значения.

Рассмотрим часть вещественной оси $-L < \xi < L$ и разделим ее на $2N$ равных отрезков. Пусть в момент времени $\tau = 0$ при $-L < \xi < 0$ (первое облако) в каждом из этих отрезков находится по одному макроэлектрону и одному макропротону. Они движутся со средней скоростью -1 и имеют небольшой тепловой разброс, который описывается раздроблением макрочастиц описанным выше способом на более мелкие макрочастицы. В отрезке длиной L/N находится l протонных и l электронных макрочастиц. Их координаты и их порядок расположения в отрезке случайны, но они сосредоточены в δ -окрестности центра отрезка. Аналогично при $0 < \xi < L$ распределяется второе облако, частицы которого в среднем покоятся, имея тот же самый тепловой разброс. Расставленные таким образом частицы нумеруются в порядке возрастания координат.

Случайное распределение частиц в отрезке достигается алгебраическим сложением координаты середины отрезка со случайными числами, нормированными так, что новая координата не выходит из δ -окрестности центра.

В последующие моменты времени ($\tau > 0$) начинается процесс взаимопроникновения облаков. Взаимодействие с развитием продольных электростатических колебаний начинается с небольших нарушений электронейтральности случайного характера, возникающих из-за описанного разброса макрочастиц. Другими словами, при $\tau = 0$ задается $\varepsilon = \varepsilon_0 \neq 0$, причем ε_0 , согласно физическим представлениям, не должно превышать начальной тепловой энергии электронов.

Происхождение величины ε_0 , вообще говоря, связано с флуктуационными процессами в плазме.

Таким образом, в начальные условия задачи входит существенный параметр L , толщина облака плазмы, и несущественные параметры теплового разброса макрочастиц и начальной электростатической энергии ϵ_0 , пока они достаточно малы. Входящий в уравнение параметр $b = k^2 N / L$ выражается через L . Заданное число макрочастиц N определяет точность аппроксимации непрерывной плазмы и фактически определяется возможностями вычислительных машин, а параметр k находится в нашем распоряжении.

Окончательно для решения поставленной задачи требуется численно сосчитать однопараметрическое семейство вариантов. Роль определяющего параметра играет безразмерная толщина облака плазмы L , которая изменяется в таких широких пределах, что при $\min L$ практически не происходит взаимодействия даже между электронными компонентами плазменных облаков, а при $\max L$ взаимодействие уже велико между протонными компонентами. В случае $\max L$ имеет место неупругий удар. Если тепловой разброс невелик, то варьирование его не обязательно. Во всех вариантах он задан следующим образом: максвелловское рас-

Облако	$s=1$ $q_1=1/4$	$s=2$ $q_2=1/3$	$s=3$ $q_3=1/3$	$s=4$ $q_4=1/4$
$v_0 = -1$	-0.8	-0.9	-1.1	-1.2
$v_0 = 0$	-0.2	-0.1	0.1	0.2

пределение аппроксимируется четырьмя макрочастицами в каждой точке, т. е. число сортов $l = 4$.

Полагая температуры протонов и электронов равными, задаем тепловой разброс по скоростям у протонных макрочастиц меньше в $(M/m)^{1/2}$ раз. Тепловой разброс электронов обоих облаков здесь задан в табличке слева (q_s и $\xi_e(0)$).

В целях обеспечения одинаковой точности счета во всех вариантах (различные L) была задана постоянная плотность макрочастиц $N/L = 1$. Было принято $k = 2^{-1}$. Тогда величина b постоянна и равна 4^{-1} .

Время окончания счета должно превышать время эффективного взаимодействия облаков, которое, естественно, определяется условием их наложения в пространстве:

$$\tau = 2L$$

Таким образом, $\tau_k \geq 2L$. Для определения последующего развития колебаний разумно несколько продлить счет.

Для получения численного решения уравнений (1.20) можно было либо использовать известные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, либо осуществить точный счет, т. е. счет с учетом каждого пересечения траекторий любых двух соседних частиц.

Первый из этих путей весьма прост, но в случае данной задачи имеет существенный недостаток: полная энергия системы не сохраняется. Последнее объясняется тем, что переход от (1.20) к закону сохранения полной энергии (1.22) возможен лишь при точном учете пересечений. Вообще же из (1.20) следует несколько иное выражение

$$\frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2LN} \gamma_i \lambda \left(\frac{d\tilde{\epsilon}_i}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{2b} \sum_{i=1}^{2LN} \gamma_i \xi_i \left(\gamma_i + 2 \sum_{\mu=1}^{i-1} \gamma_\mu \right) \right] = - \frac{1}{2b} \sum_{i=1}^{2LN} 2\gamma_i \xi_i \frac{d}{d\tau} \sum_{\mu=1}^{i-1} \gamma_\mu \quad (2.1)$$

В правую часть (2.1) входит сумма, которая, очевидно, равна нулю, если пересечений частиц за данный интервал времени нет, и отлична от нуля, если пересечения происходили.

При численном интегрировании (1.20) имеющимися разностными методами при наличии устойчивости и аппроксимации в известном смысле (см. [7]) для полученного численного решения будет справедлив разностный аналог (2.1).

Предположим, что в промежутке $\Delta\tau$ отсутствуют многократные пересечения частиц, и рассмотрим две пересекающиеся частицы¹ с координатами ξ' и ξ'' и весами γ' и γ'' . Предположим, что в промежутке $\Delta\tau$ нет никаких других пересечений и что до момента пересечения τ_0

$$\xi' < \xi'', \quad \xi' > \xi'' \quad \text{при } \tau > \tau_0$$

Тогда правая часть (2.1), равная нулю при $\tau < \tau_0$, приближенно равна при $\tau > \tau_0$

$$-\frac{1}{2b} \sum_{i=1}^{2lN} 2\gamma_i \xi_i \frac{d}{d\tau} \sum_{\mu=1}^{i-1} \gamma_\mu \approx -\frac{\gamma' \gamma''}{b \Delta\tau} (\xi' - \xi'') \Big|_{\tau > \tau_0} \quad (2.2)$$

Отсюда следует, что в разностном счете полная энергия системы возрастает в результате пересечения разноименных зарядов и убывает с пересечением одноименных частиц.

Можно ожидать, что в рассматриваемой задаче пересечений разноименных зарядов будет значительно больше, чем одноименных. В таком случае будет наблюдаться рост полной энергии систем, что и имело место при счете (см. § 3). Так как число пересечений резко возрастает с ростом времени, то значительное нарушение закона сохранения полной энергии следует ожидать на дальних этапах счета.

Отметим, что в законе сохранения полного импульса системы, который также служит критерием точности счета, отсутствует дифференцирование разрывных величин. Этот закон при счете всех вариантов выполнялся в восьми знаках.

Метод точного учета пересечений также обладает весьма существенным недостатком: в простой реализации, т. е. когда шаг по времени равен промежутку времени между двумя ближайшими пересечениями, счетное время варианта растет до таких пределов, что интегрирование уравнений (1.20) этим методом теряет смысл.

С целью разумного компромисса метод точного учета пересечений комбинировался с методом разностного решения (1.20). С заданным $\Delta\tau$ по известным $(d\xi/d\tau)^n$, ξ^n разностным методом находились значения $(d\xi/d\tau)^{n+1}$, ξ^{n+1} . Затем проверялось, имели ли место пересечения частиц за интервал $\Delta\tau$. Если имели место, то значения $(d\xi/d\tau)^{n+1}$, ξ^{n+1} у таких частиц пересчитывались с учетом точного времени пересечения. Оказалось возможным точно учитывать и два последовательных пересечения любой частицы. Однако от учета трех и более пересечений одной частицы за $\Delta\tau$ пришлось отказаться, так как логика такого учета весьма сложна, и резко возрастает время счета одного шага. Шаг по времени $\Delta\tau$ во всех вариантах выбирался равным $1/100$ п, а максимально возможное в программе число частиц было равно 1960.

§ 3. Обсуждение результатов. Осуществлена серия расчетов со значениями параметра $L = 10, 30, 50, 70, 100$. Результаты расчетов были представлены в виде нескольких интегральных и средних величин в зависимости от времени. В качестве таких величин выбраны импульс и кинетическая энергия электронов соответственно

$$I_e = \sum_i q_i \xi_{ei}, \quad W_e = \frac{1}{2} \sum_i q_i (\xi_{ei})^2$$

средние скорости электронов, первоначально принадлежавших движущимся

¹ Возможное одновременное пересечение частицы с несколькими другими частицами можно назвать многократным. В этом случае основной вывод после формулы (2.2) сохраняется, но доказательство более громоздко.

щемся или покоящемся облаку, v_{e1} и v_{e2} соответственно

$$v_{ej} = \sum q_i \xi_{ei} / \sum q_i \quad (i \in j)$$

электростатическая энергия ε , определенная по формуле (1.23), наконец, скорости протонов v_{p1} и v_{p2} , имеющие тот же смысл, что и аналогичные скорости электронов. Кроме того, вычислялись величины полного импульса и полной энергии всей системы, которые должны быть постоянными, согласно законам сохранения. Последние служили для контроля точности численного счета. Информация о локальном распределении величин в данной серии расчетов не обрабатывалась.

Основной результат расчетов: показано существование интенсивного коллективного взаимодействия плазменных облаков с самого начала их взаимного проникновения. Этот результат соответствует предсказаниям линейной теории, но следует подчеркнуть, что рамки применимости последней в рассматриваемой задаче очень узки.

Изложим качественную картину процесса, следующую из линейной теории [5], указывая одновременно ее ограниченность. В области взаимного проникновения плазменных облаков прежде всего развивается коллективное взаимодействие между обоими электронными компонентами. Плотности обоих облаков одинаковы, поэтому их взаимодействие может за несколько периодов плазменных колебаний хаотизировать относительное движение электронов. Функция распределения электронов в конце этой стадии взаимодействия не может быть определена на основе линейной теории. Дальнейшее развитие коллективных процессов связано с взаимодействием обобществленного электронного облака с обоими протонными компонентами, имеющими почти монохроматические функции распределения. Это взаимодействие приводит к передаче энергии от протонов к электронам. Переданная энергия во много раз превышает энергию хаотического движения электронов, возникающего в конце стадии электрон-электронного взаимодействия. Такой процесс передачи энергии вновь существенно изменяет электронную функцию распределения и также не может быть описан в рамках линейной теории.

После того как электроны приобрели энергию порядка энергии направленного движения протонов, возникают условия для развития непосредственного взаимодействия протонных компонент облаков между собой — возбуждения низкочастотных ионных колебаний. Нужно только заметить, что на этой стадии исходное состояние протонных компонент существенно отличается от их начального состояния, потому что энергия направленного движения протонов движущегося облака уже в значительной мере перешла в энергию электронно-ионных колебаний. Следовательно, этап развития ионных колебаний снова не может быть количественно описан линейной теорией. В ионные колебания переходит остаток энергии направленного движения, и этим заканчивается интересный нас процесс взаимодействия плазменных облаков. Последующее состояние системы, возможно, связано с длительным процессом затухания возбужденных колебаний, подобно тому, что получено в [3]. Если размеры облаков L недостаточно велики, то указанный процесс развития взаимодействий обрывается, когда облака вновь оказываются разделенными в пространстве.

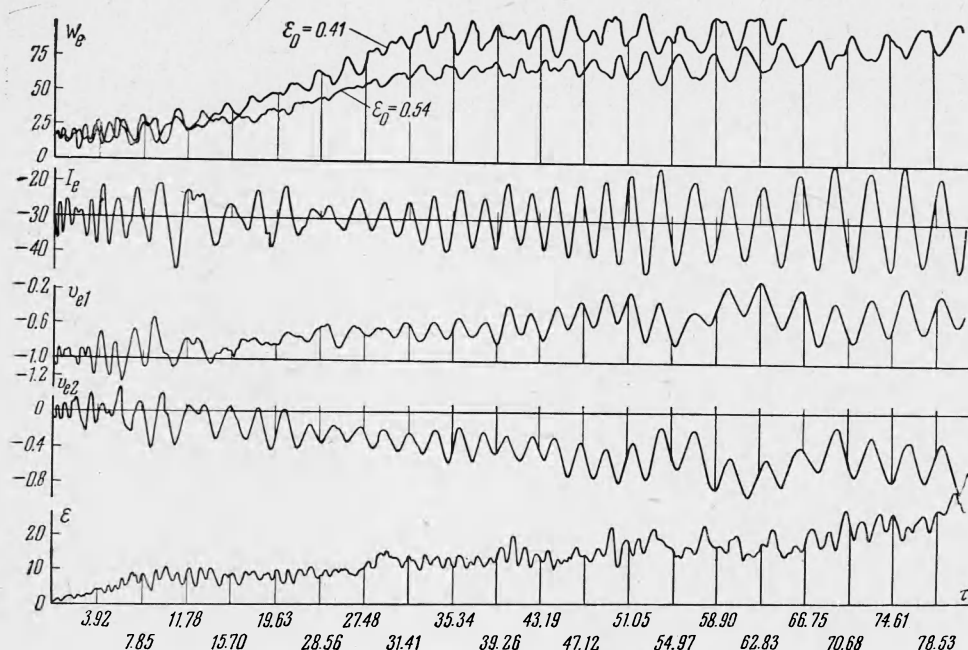
В данной работе не ставилась задача детального сравнения численного счета с результатами линейной теории, как это делал, например, Даусон [3], потому что, во-первых, это малоэффективно из-за узких рамок применимости линейной теории и, во-вторых, очень трудоемко из-за пространственного характера задачи в отличие от [3]. Однако общие представления о характере процесса взаимодействия, следующие из линейной теории (например, упомянутые различные стадии взаимодействия), полезны и в основном подтвердились в численных расчетах.

Перейдем непосредственно к обсуждению полученных результатов. На фиг. 1 приводится группа графиков величин для варианта $L = 30$ в зависимости от времени ($\tau_k \approx 80$): W_e , I_e , v_{e1} , v_{e2} , ε . На фиг. 1 даны два графика W_e , относящиеся к нескольким различным начальным электростатическим энергиям ε_0 и совершенно различным начальным разбросам частиц (см. § 2). Следует признать, что картина процесса в общих чертах одинакова. Кинетическая энергия электронов в 4—5 раз превышает первоначальную кинетическую энергию направленного и теплового движения, а электростатическая энергия возрастает в 30—40 раз по сравнению

с ϵ_0 . Увеличение энергии $W_e + \epsilon$ происходит за счет уменьшения энергии протонов. Скорости электронов v_{e1} и v_{e2} в среднем стремятся к величине -0.5 , что соответствует обобществлению электронов. Можно определить период колебаний $T \approx 2.3$ при $\tau \approx 30-50$ и $T \approx 3.1$ при $\tau \approx 50-70$ (график I_e). С другой стороны, период плазменных колебаний в электронной плазме с удвоенной плотностью равен

$$\tau^* = k\Omega_0 \frac{2\pi}{\sqrt{2}\Omega_0} \approx 2.24$$

и с нормальной плотностью $\tau^* \approx 3.18$. Согласно линейной теории, именно таков основной период электронно-ионных колебаний [8]. Общая упо-



Фиг. 1

рядочность движения электронов, характерная для стадии электронно-ионных взаимодействий и все возрастающая по мере увеличения L , свидетельствует, что колебания достаточно однородны по всему размеру облака. Совсем иное можно сказать о начальной стадии взаимодействия до $\tau \approx 10-20$, где все кривые имеют весьма неправильный характер. Здесь, согласно линейной теории, вероятно, происходит так называемый пространственный рост колебаний. Следует отметить, что существенной поляризации облаков в процессе колебаний не происходит. В самом деле, если характерная скорость электронов ~ 1 , то за полупериод колебаний ~ 1.5 электроны сместятся относительно положения протонов на величину ~ 1.5 , что значительно меньше толщины облаков $L = 30$.

Наконец, интересную особенность имеют графики при $\tau \gtrsim 70$, т. е. когда облака плазмы уже разделились в пространстве. Хорошо заметна тенденция W_e и ϵ к некоторому небольшому росту. Подобная картина наблюдалась и в варианте $L = 10$. Одновременно с ростом W_e и ϵ имеет место усиление колебаний протонной скорости. По-видимому, сильные

колебания электронной компоненты, возникшие при взаимодействии облаков, обуславливают в каждом облаке дальнейшую диссипацию энергии направленного движения протонов в электронно-ионные колебания.

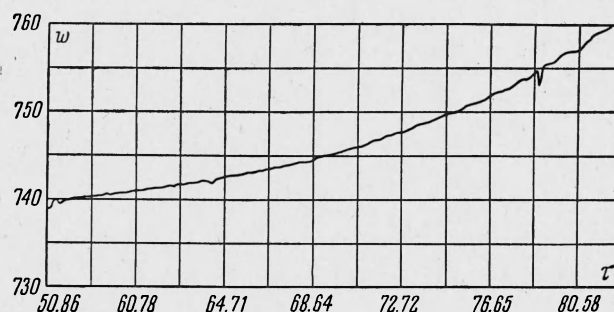
Как указывалось выше, закон сохранения энергии служил для контроля точности численного счета. Предполагалось, что все полученные результаты имеют смысл, пока выполнено неравенство

$$W_e + \varepsilon \gg \Delta W \quad (\Delta W = W(\tau) - W_0) \quad (3.1)$$

Здесь ΔW характеризует нарушение закона сохранения энергии, W_0 — начальная полная энергия системы. Неравенство (3.1) гораздо более сильное требование, чем тривиальное условие

$$W \gg \Delta W \quad (3.2)$$

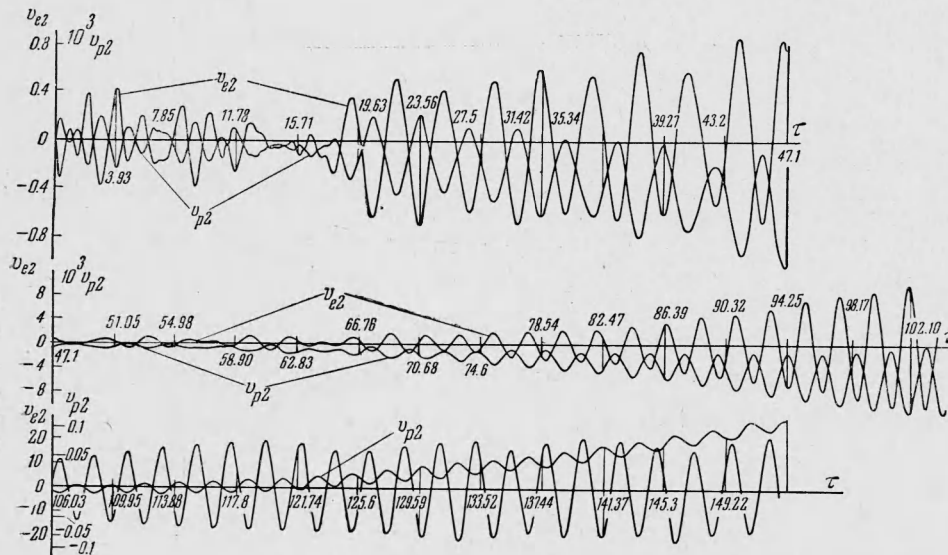
потому что доля энергии электронов в сумме с электростатической энергией весьма мала по сравнению с энергией протонов. Например, в обсуж-



Фиг. 2

даемом варианте $L = 30$ имеем $W_e + \varepsilon \approx 0.004 W$ к концу процесса. При выполнении условия (3.1) можно утверждать, что рост энергии электронов в электронно-ионных колебаниях происходит за счет энергии протонов (кстати, напомним, что в процессе счета $\Delta W > 0$). Условие (3.1) проверялось во всех рассчитанных вариантах. Условие (3.1) нарушалось к моменту времени $\tau \approx 80$ для вариантов $L = 70$ и $L = 100$ одинаково, когда кинетическая энергия электронов превышала их начальную энергию примерно в 50 раз. В варианте $L = 100$, досчитанном до $\tau \approx 180$, к концу счета нарушилось также условие (3.2), но энергия электронов к этому времени стала по порядку величины равной W_0 . Однако последний результат, по-видимому, нужно оценивать как чисто качественный. На фиг. 2 изображена величина $W(\tau)$ в относительных единицах. График начинается с того момента времени ($\tau \approx 60$), когда энергия W отличается от $W_0 = 739$ уже в третьем знаке. Обращает на себя внимание плавный рост $W(\tau)$ по сравнению с другими колеблющимися величинами. Такой характер роста можно ожидать на основе приведенного в § 2 объяснения. С целью качественной иллюстрации процесса упорядоченных колебаний приводится график v_{e2} и v_{p2} для варианта $L = 100$ (фиг. 3). Масштаб v_{p2} сначала в 10^3 раз крупнее, чем масштаб v_{e2} . На фиг. 3 видно, что колебания скорости протонов смещены по фазе на π относительно колебаний скорости электронов. Кроме того, кривая v_{p2} испытывает низкочастотные колебания с периодом в несколько десятков единиц. Отметим, что ионный плазменный период с нормальной плотно-

стью составляет $T \approx 130$. Вполне возможно, что численный счет обнаруживает развитие ионных колебаний, тем более, что ход v_{p1} коррелирован с ходом v_{p2} . К $\tau \approx 180$ скорость протонов v_{p2} достигает 0.4, т. е. скорость колебательного движения сравнивается со скоростью направленного движения.



Фиг. 3

Для получения обоснованных количественных выводов в вариантах $L = 70$ и $L = 100$ желательно проделать новые расчеты, свободные от указанного выше недостатка — нарушения закона сохранения энергии.

В заключение пользуемся случаем поблагодарить Э. З. Тарумова, Б. К. Шембеля и Н. Н. Яненко за интерес к данной работе и полезные обсуждения.

Поступила 29 VIII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Nexsen W. E., Cummins W. F., Coensgen F. H., Sherman A. E. Collision of two plasma streams, Phys. Rev., 1960, vol. 119, p. 1457.
2. Buneman O. Dissipation of currents in ionized media. Phys. Rev., 1959, vol. 115, p. 503.
3. Dawson J. Investigation of the doublestream instability, 1961, In. at. energy agency, Salzburg.
4. Ломнев С. П. Расчет фазовых траекторий заряженных частиц с учетом кулоновского взаимодействия в группирователе линейного электронного ускорителя. Докл. АН СССР, 1960, т. 135, № 4.
5. Parker E. N., Suprathermal particles. III electrons. Phys. Rev., 1958, vol. 112, p. 1429.
6. Климонтович Ю. Л. Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. Изд. МГУ, М., 1964.
7. Годунов С. К., Рябенский В. С. Введение в теорию разностных схем. Физматгиз, 1963.
8. Имшенник В. С., Морозов Ю. И. Анализ неустойчивости пучка заряженных частиц в электронной плазме. Ж. техн. физ., 1961, т. 31, стр. 640.