УДК 517:9:539:3

НОВЫЙ ВАРИАНТ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ СОГЛАСОВАННОЙ МОДЕЛИ МАКСВЕЛЛОВСКОЙ ВЯЗКОСТИ

С. К. Годунов

Институт математики им. С. Л. Соболева, 630090 Новосибирск
E-mail: godunov@math.nsc.ru

Описана формализация эволюционных уравнений механики сплошной среды в виде галилеево-инвариантной недивергентной гиперболической системы. Особое внимание уделено пополнению системы дополнительными уравнениями, необходимыми для справедливости законов сохранения. Предложен новый вариант максвелловских релаксационных членов, не противоречащих дополнительным уравнениям и обеспечивающих калибровочную инвариантность.

Ключевые слова: производящий потенциал, гиперболичность, тензор Бюргерса, калибровочная инвариантность.

Введение. Эта статья продолжает цикл работ (см. [1–3]), посвященных термодинамически согласованным уравнениям, инвариантным относительно преобразований Галилея.

Термин “термодинамически согласованные” означает наличие совместного с уравнениями дивергентного равенства, правая часть которого неотрицательна, а если уравнения описывают диссипативный процесс, то строго положительна. Это равенство должно моделировать закон неубывания энтропии.

Обычно предполагается гиперболичность уравнений, описывающих поведение сплошных сред при отсутствии диссипативных процессов или если эти процессы носят бездиффузионный релаксационный характер. Законы сохранения количества движения и энергии, как правило, включаются в систему. Эти соображения кладутся в основу при выделении в качестве специального объекта математического изучения *гиперболических систем, составленных из законов сохранения.*

В работах [4, 5] изучалась такого рода схематизация для уравнений теории упругости с максвелловской релаксацией, моделирующей необратимые процессы пластической деформации. Во время подготовки книги [5] к ее английскому переводу [6] я заметил в ней (особенно в схематизации из заключительной главы, введенной лишь во второе издание — 1997 г.) некоторые неточности при осуществлении описанной выше программы составления гиперболических систем из законов сохранения. Срочность работы не позволила детально разобраться в причинах, вызвавших эти неточности. Поэтому, сократив последнюю главу, я подготовил для английского перевода “дополнение”, где попытался наметить пути устранения замеченных неточностей.

Сложилось впечатление, что начиная составление системы, описывающей интересующие нас процессы, надо сначала обеспечить ее гиперболичность. Иными словами, надо добиться того, чтобы при записи уравнений в квазилинейном виде матрицы коэффициентов оказались симметричными. (Коэффициенты при производных по времени t должны составлять положительно-определенную матрицу.) Для гиперболических уравнений корректно поставлена локальная задача Коши при достаточно гладких начальных данных.

Для описания релаксационных диссипативных процессов используются специальные правые части уравнений, но вводить их можно далеко не во все уравнения системы. *Неко-*

торые из уравнений должны иметь правые части нулевыми, так как только при выполнении этого требования удается обеспечить выполнение на решениях законов сохранения энергии и количества движения. Дивергентные равенства, описывающие эти законы, в систему не включаются и оказываются *выполненными не на всех ее решениях,* а только на тех, которые отвечают начальным данным, подчиненным *дополнительным условиям,* в виде некоторых равенств.

Реализация намеченного в указанном "дополнении" подхода требует пересмотреть выработанные нами ранее модели вязкоупругих деформаций. В частности, нужно более внимательно отнестись к выбору уравнений, в которые включаются максвелловские релаксационные члены. В настоящей работе как раз и описываются приемы, позволяющие сконструировать вязкоупругую модель с учетом сделанных выше замечаний.

В п. **1** мы напоминаем нужные нам сведения из статей [1, 2] о галилеево-инвариантных гиперболических системах и приводим несколько сравнительно несложных систем, которые послужат деталями для дальнейших построений.

В п. **2** показывается, как эти детали могут быть объединены в составные гиперболические системы, совместные с законами сохранения. Приводимые системы удовлетворяют поставленным выше математическим требованиям.

Конечно, использование конструируемых уравнений для моделирования поведения тех или иных сред требует детальных физических исследований по выбору уравнений состояния и законов диссипации, а также проведения вычислительных и натурных экспериментов. Мы лишь предлагаем возможную математическую схему, в которую можно облекать результаты изучения конкретных сред.

Нужно отметить, что таким изучением активно и очень успешно занимаются механики в Томске под руководством академика В. Е. Панина. Созданная им и его сотрудниками Ю. В. Гриняевым, Н. В. Чертовой и др. полевая теория дефектов на мезоуровне (см. [7–9]) основана на тонких экспериментах. Эта теория, по-видимому, приводит к уравнениям, которые можно включить в описываемую нами абстрактную схему.

Широко используемая последнее время калибровочная инвариантность уравнений (см. [10–12]), связывающих микроскопические дефекты с напряжениями, нашла в проводимых ниже построениях свое отражение. Рассматривая геометрические и "эффективные упругие" деформации, восстановленные по полю напряжений, мы связываем неупругую часть напряжений не с различием самих геометрических и эффективных деформаций, а с тензором Бюргерса последних, для которых эффективные деформации являются потенциалами. Возможность неоднозначного выбора этих потенциалов не влияет на напряжения, что и означает *калибровочную инвариантность.* Указанные выше недостатки наших предыдущих работ как раз и возникли из-за того, что в них калибровочная инвариантность не была обеспечена.

В заключительном п. **3** кратно описываются еще два математически непротиворечивых варианта моделирования неупругих процессов. Один из них основан на явлении "сверхтекучести", использовавшемся В. Н. Доровским (см. [13, 14]), а другой возник у автора в процессе продумывания вариантов, свободных от противоречий, о которых шла речь выше. Он был кратко описан в [15, 16].

1. Примеры гиперболических уравнений, совместных с дополнительными законами сохранения. Описывая нужные нам гиперболические системы, сначала приведем список "деталей", из которых они собираются.

В [1] было показано, что уравнения следующего дивергентного вида ($i, k = 1, 2, 3$, u_k — компоненты скорости)

$$\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{q_0}}{\partial x_k} = 0,$$

$$\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{u_i}}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial L_{p_j}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{p_j}}{\partial x_k} = 0$$

являются галилеево-инвариантными, если производящий потенциал

$$L = L(q_0 - u_i u_i/2, p_1, p_2, \ldots)$$

инвариантен относительно вращений. При этом предполагается, что вектор, составленный из компонент p_j, при вращениях преобразуется по какому-либо представлению группы $SO(3)$ (или $SU(2)$). Впоследствии оказалось [3], что вводя вместо q_0 несколько неизвестных q_1, $q_2, \ldots, q_m$ с аналогичной зависимостью от них производящего потенциала

$$L = L(q_1 - u_i u_i/2, q_2 - u_i u_i/2, \ldots, q_m - u_i u_i/2, p_1, p_2, \ldots),$$

мы также можем построить галилеево-инвариантную систему из уравнений

$$\frac{\partial L_{q_l}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{q_l}}{\partial x_k} = 0,$$

$$\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{u_i}}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial L_{p_j}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{p_j}}{\partial x_k} = 0.$$

В работе [3] роль таких q_l играли химические потенциалы различных веществ или фаз, из которых состоит элемент среды. При этом L_{q_l} оказывались парциальными плотностями составляющих, а полная плотность среды ρ выражалась в виде суммы $\rho = \sum\limits_l L_{q_l}$.

Без труда проверяется, что квазилинейная запись

$$L_{r_i r_j} \frac{\partial r_j}{\partial t} + M^{(k)}_{r_i r_j} \frac{\partial p_j}{\partial x_k} = 0$$

уравнений используемого нами вида

$$\frac{\partial L_{r_i}}{\partial t} + \frac{\partial M^{(k)}_{r_i}}{\partial x_k} = 0$$

имеет симметрические матрицы коэффициентов. Если L — выпуклая функция своих аргументов, т. е. если $L_{r_i r_j}$ образуют положительно-определенную матрицу, то рассматриваемые уравнения — симметрические гиперболические по определению Фридрихса.

Конструирование более сложных галилеево-инвариантных систем (см. [2]) осуществляется добавлением в приведенные записи уравнений дополнительных слагаемых, содержащих только пространственные производные неизвестных функций. Коэффициенты в этих дополнительных слагаемых определяются по производящему потенциалу L. Добавленные слагаемые обязательно должны быть инвариантными относительно вращений координатной системы. При выполнении этого условия галилеева инвариантность будет обеспечена.

Приведем несколько возможных примеров сконструированных описанным способом систем уравнений и попутно сформулируем еще некоторые ограничения на них. Это ограничения, которые возникают при обеспечении совместности уравнений с дополнительными соотношениями, необходимыми для справедливости выполнения законов сохранения количества движения и энергии.

Первый пример, который можно использовать в виде канонической формы уравнений магнитной гидродинамики, выглядит так ($L = L(q_0 + u_i u_i/2, r_i r_i)$, $i, k = 1, 2, 3$):

$$\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{q_0}}{\partial x_k} = 0; \tag{1.1a}$$

$$\frac{\partial L_{r_i}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{r_i}}{\partial x_k} - L_{r_k}\,\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0; \tag{1.1б}$$

$$\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{u_i}}{\partial x_k} - L_{r_k}\,\frac{\partial r_i}{\partial x_k} = 0. \tag{1.1в}$$

Здесь недивергентные слагаемые добавлены в уравнениях (1.1б), (1.1в). То, что симметрия матрицы коэффициентов не нарушается при введении этих слагаемых, почти очевидно: в (1.1б) добавлены производные от u_i, а в (1.1в) — от r_i с одинаковыми коэффициентами L_{r_k}. Отметим, что уравнения (1.1в) не имеют вида закона сохранения и поэтому их нельзя толковать как закон сохранения импульса. Этот дефект исправляется следующим образом. Из равенств (1.1а) и (1.1б) следует, что

$$\frac{\partial L_{r_i}}{\partial t} + \frac{\partial\,(u_k L_{r_i} - u_i L_{r_k})}{\partial x_k} + u_i\,\frac{\partial L_{r_k}}{\partial x_k} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial L_{r_i}}{\partial x_i}\Big) + \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(u_k\,\frac{\partial L_{r_i}}{\partial x_i}\Big) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{L_{q_0}}\,\frac{\partial L_{r_i}}{\partial x_i}\Big) + u_k\,\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{1}{L_{q_0}}\,\frac{\partial L_{r_i}}{\partial x_i}\Big) = 0.$$

Отсюда очевидно, что система (1.1) совместна с дополнительным равенством

$$\frac{\partial L_{r_i}}{\partial x_i} = 0. \tag{1.2}$$

На решениях (1.1), подчиненных условию (1.2), уравнение (1.1б) можно заменить на закон сохранения

$$\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial\,[(u_k L)_{u_i} - r_i L_{r_k}]}{\partial x_k} = 0. \tag{1.3}$$

В магнитной гидродинамике он является законом сохранения количества движения. Если (1.1б), (1.1в) умножить на q_0, r_i соответственно, а (1.3) — на u_i и все произведения сложить, то придем еще к одному закону сохранения (сохранения энергии):

$$\begin{gathered}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial\,[u_k(\mathcal{E} + L) - u_i r_i L_{r_k}]}{\partial x_k} = 0,\\ \mathcal{E} = q_0 L_{q_0} + r_i L_{r_i} + u_i L_{u_i} - L.\end{gathered} \tag{1.4}$$

Приведенный пример показывает, что для симметрической гиперболической системы (1.1) законы сохранения (1.3), (1.4) не обязательно должны выполняться на всех ее решениях. Они справедливы при дополнительном условии (1.2). Для совместности (1.2) с исходными уравнениями существенно, что (1.1б), (1.1в) имеют нулевые правые части. Любые правые части, являющиеся гладкими функциями от неизвестных q_0, r_i, u_i, не нарушают гиперболичности системы, но не всегда дают возможность установить совместность (1.1) с (1.2), т. е. обосновать законы сохранения (1.3), (1.4).

Несложное обобщение разобранного примера может быть использовано при моделировании упругих процессов в изотропной среде. Для этого надо лишь заменить векторную переменную с компонентами r_i на тензорную r_{ij} (тензор r_{ij} не обязательно должен быть симметричным).

Приведем соответствующую гиперболическую систему

$$\begin{gathered}\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t} + \frac{\partial\,(u_k L)_{q_0}}{\partial x_k} = 0,\\ \frac{\partial L_{r_{ij}}}{\partial t} + \frac{\partial\,(u_k L)_{r_{ij}}}{\partial x_k} - L_{r_{kj}}\,\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial\,(u_k L)_{u_i}}{\partial x_k} - L_{r_{kj}}\,\frac{\partial r_{ij}}{\partial x_k} = 0,\end{gathered} \tag{1.5}$$

совместную с дополнительным равенством

$$\frac{\partial L_{r_{ij}}}{\partial x_i} = 0, \tag{1.6}$$

обеспечивающим справедливость законов сохранения

$$\begin{gathered}\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial\,[(u_k L)_{u_i} - r_{ij} L_{r_{kj}}]}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial\,[u_k(\mathcal{E} + L) - u_i r_{ij} L_{r_{kj}}]}{\partial x_k} = 0,\\ \mathcal{E} = q_0 L_{q_0} + r_{ij} L_{r_{ij}} + u_i L_{u_i} - L.\end{gathered} \tag{1.7}$$

Об интерпретации уравнений (1.7) и ряда других, приводимых ниже, речь пойдет в п. **2**.

Можно обобщить описанную конструкцию, введя еще одно новое векторное уравнение (закон сохранения)

$$\frac{\partial L_{r_i}}{\partial t} + \frac{\partial\,(u_k L)_{r_i}}{\partial x_k} = 0, \tag{1.8}$$

а последнее в (1.5) уравнение дополнить ненулевой правой частью

$$\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial\,(u_k L)_{u_i}}{\partial x_k} - L_{r_{kj}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_k} = r_{ij} L_{r_j}. \tag{1.9}$$

Из первого и второго равенств в (1.5) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{L_{q_0}} \frac{\partial L_{r_{ij}}}{\partial x_i}\Big) + u_k \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{1}{L_{q_0}} \frac{\partial L_{r_{ij}}}{\partial x_i}\Big) = 0,$$

а из (1.8) вместе с уравнением в первой строке (1.5) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{L_{q_0}}\, L_{r_j}\Big) + u_k \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{1}{L_{q_0}}\, L_{r_j}\Big) = 0.$$

Поэтому система (1.5), дополненная (1.8), совместна с соотношением

$$\frac{\partial L_{r_{ij}}}{\partial x_i} - L_{r_j} = 0, \tag{1.10}$$

которое в этом примере заменяет (1.6). Если соотношение (1.10) выполнено, то (1.9) обеспечивает справедливость законов сохранения:

$$\begin{gathered}\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial\,[(u_k L)_{u_i} - r_{ij} L_{r_{kj}}]}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial\,[u_k(\mathcal{E} + L) - u_i r_{ij} L_{r_{kj}}]}{\partial x_k} = 0,\\ \mathcal{E} = q_0 L_{q_0} + r_{ij} L_{r_{ij}} + r_i L_{r_j} - L.\end{gathered} \tag{1.11}$$

Запишем еще схожий с (1.5) пример:

$$\begin{gathered}\frac{\partial L_n}{\partial t} + \frac{\partial\,(u_k L_n + \varepsilon_{ijk} b_{ij})}{\partial x_k} = 0,\\ \frac{\partial L_{b_{ij}}}{\partial t} + \frac{\partial\,(u_k L_{b_{ij}} + \varepsilon_{ijk} n)}{\partial x_k} - L_{b_{kj}} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial\,(u_k L)_{u_i}}{\partial x_k} - L_{b_{kj}} \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k} = 0\end{gathered} \tag{1.12}$$

(ε_{ijk} — символ Леви-Чивиты, равный нулю, если среди i, j, k есть равные, и ± 1 при различных i, j, k в зависимости от четности или нечетности подстановки индексов).

Аналогично предыдущему проверяется, что система (1.12) совместна с дополнительным равенством

$$\frac{\partial L_{b_{kj}}}{\partial x_k} = 0, \tag{1.13}$$

позволяющим переписать уравнение (1.12) в дивергентном виде

$$\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial\,[(u_k L)_{u_i} - b_{ij} L_{b_{kj}}]}{\partial x_k} = 0, \tag{1.14}$$

а также вывести еще один закон сохранения

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial\,[u_k(\mathcal{E} + L) - u_i b_{ij} L_{b_{kj}} + n\varepsilon_{ijk} b_{ij}]}{\partial x_k} = 0, \tag{1.15}$$

$$\mathcal{E} = nL_n + b_{ij} L_{b_{ij}} + u_i L_{u_i} - L.$$

В заключение п. **1** приведем систему, составленную из предыдущих уравнений как из деталей. Кроме того, мы включим еще несколько дивергентных уравнений и новые переменные — температуру T и четырехиндексный тензор p_{ijlm}, предназначенный для модулей упругости, если будет рассматриваться неизотропная среда:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t} + \frac{\partial\,(u_k L)_{q_0}}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial L_{r_{ij}}}{\partial t} + \frac{\partial\,(u_k L)_{r_{ij}}}{\partial x_k} - L_{r_{kj}} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0, \\
\frac{\partial L_{r_i}}{\partial t} + \frac{\partial\,(u_k L)_{r_i}}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial L_n}{\partial t} + \frac{\partial\,(u_k L_n + \varepsilon_{ijk} b_{ij})}{\partial x_k} = 0, \\
\frac{\partial L_{b_{ij}}}{\partial t} + \frac{\partial\,(u_k L_{b_{ij}} + \varepsilon_{ijk} n)}{\partial x_k} - L_{b_{kj}} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial L_{p_{ijlm}}}{\partial t} + \frac{\partial\,(u_k L)_{p_{ijlm}}}{\partial x_k} = 0, \\
\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial\,(u_k L)_{u_i}}{\partial x_k} - L_{r_{kj}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_k} - L_{b_{kj}} \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k} = r_{ij} L_{r_j}, \qquad \frac{\partial L_T}{\partial t} + \frac{\partial\,(u_k L)_T}{\partial x_k} = 0.
\end{gathered} \tag{1.16}$$

Эта система совместна с дополнительными равенствами

$$\frac{\partial L_{r_{ij}}}{\partial x_i} - L_{r_j} = 0, \qquad \frac{\partial L_{b_{ij}}}{\partial x_i} = 0, \tag{1.17}$$

при выполнении которых на решениях справедливы законы сохранения импульса и энергии

$$\begin{gathered}
\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial\,[(u_k L)_{u_i} - r_{ij} L_{r_{kj}} - b_{ij} L_{b_{kj}}]}{\partial x_k} = 0, \\
\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial\,[(u_k(\mathcal{E} + L) + n b_{ij}\varepsilon_{ijk} - u_i(r_{ij} L_{r_{kj}} + b_{ij} L_{b_{kj}})]}{\partial x_k} = 0.
\end{gathered} \tag{1.18}$$

Через $\mathcal{E}$, как и в предыдущих примерах, обозначается преобразование Лежандра от производящего потенциала L по всем входящим в него аргументам

$$\mathcal{E} = q_0 L_{q_0} + r_i L_{r_i} + r_{ij} L_{r_{ij}} + nL_n + b_{ij} L_{b_{ij}} + p_{ijkl} L_{p_{ijkl}} + TL_T + u_i L_{u_i} - L. \tag{1.19}$$

2. Интерпретация уравнений и обсуждение допустимости включения в них диссипативных членов. Уравнения (1.16)–(1.18), приведенные в конце п. **1**, могут использоваться для описания упругих процессов в движущейся сплошной среде. При этом надо полагать, что $L_{u_i} = \rho u_i$ и что уравнения

$$\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t} + \frac{\partial\,(u_k L)_{q_0}}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial L_{r_{ij}}}{\partial t} + \frac{\partial\,(u_k L)_{r_{ij}}}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} L_{r_{kj}} = 0$$

представляют собой запись в других обозначениях ($L_{q_0} = \rho$, $L_{r_{ij}} = \rho c_{ij}$) уравнения неразрывности и уравнения эволюции дисторсии $c_{ij} = \partial x_i / \partial x_{j0}$ соответственно (x_i — эйлеровы, x_{j0} — лагранжевы координаты):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_k)}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial (\rho c_{ij})}{\partial t} + \frac{\partial (u_k \rho c_{ij})}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \rho c_{kj} = 0$$

(см. по этому поводу [5, 6, 17]). Вектор $L_{r_j} = \partial \rho c_{ij} / \partial x_i$ может оказаться отличным от нуля, если в начальных данных $\rho \neq \mathrm{const}$, $c_{ij} \neq \delta_{ij}$. Если же при $t = 0$ $\rho c_{ij} = r_{ij} = \mathrm{const}$, то равенство $\partial \rho c_{ij} / \partial x_i = r_i = 0$ будет сохраняться и при $t > 0$, как это следует из приведенных выше рассуждений. Введенная переменная T — температура, $L_T = \rho S$ — энтропия в единице объема, закон сохранения которой описывается последним в (1.16) уравнением. Тензор p_{ijkl} можно рассматривать как тензор модулей упругости.

Переменные b_{ij} введены в систему для того, чтобы описать континуальное поле дислокаций. При этом роль транспонированного тензора Бюргерса должен играть тензор, составленный из величин $L_{b_{ij}}$. Поле дислокаций характеризует отличие физической лагранжевой дисторсии $A^{\text{эфф}}$ от геометрической $A = C^{-1}$ (C — матрица с элементами $c_{ij} = \partial x_i / \partial x_{j0}$, $a_{ij} = \partial x_{i0} / \partial x_j$). Для геометрической лагранжевой дисторсии тензор Бюргерса $\mathcal{B}_{ji} = \varepsilon_{kli}\, \partial a_{jl} / \partial x_k$, очевидно, равен нулю. Тензор $L_{b_{ij}} = \mathcal{B}^{\text{эфф}}_{ji} = \varepsilon_{kli}\, \partial a^{\text{эфф}}_{jl} / \partial x_k$ уже не обязательно должен быть равным нулю, однако он обязательно должен удовлетворять дополнительному уравнению $\partial L_{b_{ij}} / \partial x_i = 0$, каков бы ни был закон изменения $A^{\text{эфф}}$, вызванный неупругими процессами, т. е. такими, при которых напряжения меняются не только вследствие геометрической деформации, описываемой при помощи изменения плотности ρ и тензора $L_{r_{ij}} = \rho c_{ij}$. По этой причине предлагаемые уравнения для $L_{b_{ij}}$ содержат производные от соответствующего “химического потенциала” n управляющего эволюцией тензора Бюргерса. Причем эти производные введены в уравнения так, чтобы обеспечить сохранение равенства $\partial L_{b_{ij}} / \partial x_i = 0$. Заметим, что здесь мы не приводим уравнений для $A^{\text{эфф}}_{ij}$, обеспечивая тем самым “калибровочную инвариантность”, т. е. независимость процесса деформации и величины поля напряжений $\sigma_{ik} = L - r_{ij} L_{r_{kj}} - b_{ij} L_{b_{kj}}$ от конкретного выбора $A^{\text{эфф}}_{ij}$, совместных с участвующими в уравнениях значениями $L_{b_{ij}}$ ($A^{\text{эфф}}_{ij}$ по отношению к тензору Бюргерса являются потенциалами).

В систему (1.16) не были введены слагаемые, отвечающие диссипативным процессам, и поэтому она их не моделирует. Мы сейчас включим в некоторые из уравнений релаксационные правые части. При этом надо соблюдать осторожность, чтобы эти правые части не нарушили совместности уравнений с дополнительными равенствами $\partial L_{r_{ij}} / \partial x_i = r_j$, $\partial L_{b_{ij}} / \partial x_i = 0$, необходимыми для обеспечения сохранения импульса и энергии. Проведем видоизменение только трех строк в записи системы (1.16), которые теперь будут выглядеть так:

$$\begin{gathered} \frac{\partial L_n}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_n + \varepsilon_{ijk} b_{ij})}{\partial x_k} = -\frac{\Phi_n}{\tau_1}, \\ \frac{\partial L_{p_{ijlm}}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{p_{ijlm}}}{\partial x_k} = -\frac{\Psi_{p_{ijlm}}}{\tau_2}, \qquad \frac{\partial L_T}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_T}{\partial x_k} = \frac{1}{T}\Big(\frac{n \Phi_n}{\tau_1} + \frac{p_{ijlm} \Psi_{p_{ijlm}}}{\tau_2}\Big). \end{gathered} \tag{2.1}$$

В (2.1) Φ и Ψ — диссипативные функции, для которых $n \Phi_n \geqslant 0$, $p_{ijlm} \Psi_{p_{ijlm}} \geqslant 0$, а положительные параметры $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$, зависящие от состояния среды, характеризуют скорость диссипации. Правая часть последней из видоизмененных строк подобрана таким образом, чтобы при описанном введении диссипативных членов не нарушился закон сохранения энергии, а произошло увеличение энтропии.

Мы здесь позволили параметрам p_{ijlm}, характеризующим упругие свойства среды, релаксировать, видоизменяться, тогда как, по существу, геометрические параметры $\rho = L_{q_0}$, $\rho c_{ij} = L_{r_{ij}}$ в описываемой модели релаксировать не могут. Модель, описанная в [4, 5] и в основной части их английской версии [6], была основана на введении максвелловской релаксации в уравнения для $\rho c_{ij} = L_{r_{ij}}$, которые там связывались не с реальными геометрическими, а с "эффективными упругими" деформациями. Как уже отмечалось во введении, это обстоятельство привело к несоблюдению всех нужных законов сохранения. Описанные в настоящей работе построения приводят к новому варианту вязкоупругой модели Максвелла, в которой указанный недостаток исправлен.

Отметим, что нами здесь перечислены не все допустимые варианты учета диссипативных процессов, совместных с калибровочной инвариантностью. Если, например, пятое из входящих в (1.16) равенство выбрать не с нулевой правой частью, а писать его в виде ($æ \geqslant 0$)

$$\frac{\partial L_{b_{ij}}}{\partial t} + \frac{\partial\,(u_k L_{b_{ij}} + \varepsilon_{ijk} n)}{\partial x_k} - L_{b_{kj}} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \varepsilon_{i\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \Big(æ \varepsilon_{\beta\gamma\delta} \frac{\partial b_{\delta j}}{\partial x_\gamma} \Big), \tag{2.2}$$

то не составит труда проверить, что оно совместно с необходимым для нас соотношением $\partial L_{b_{ij}} / \partial x_i = 0$. Правая часть в (2.2) введена для моделирования диффузии дислокационных дефектов. Одновременно с указанным видоизменением уравнений (1.16) следует вместо нулевых правых частей энергетического (второе в (1.18)) и энтропийного уравнений использовать соответственно

$$-\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \Big[b_{ij} æ \Big(\varepsilon_{\alpha i\beta} \varepsilon_{\beta\alpha\delta} \frac{\partial b_{\delta j}}{\partial x_\gamma} \Big) \Big], \qquad \frac{æ}{T} \sum_{\beta,j} \Big(\varepsilon_{\beta\gamma\delta} \frac{\partial b_{\delta j}}{\partial x_\gamma} \Big)^2.$$

Такие правые части описывают дополнительные поток энергии и приращение энтропии, вызванные диффузией дефектов.

3. Еще некоторые обобщения. Приведем еще один вариант термодинамически согласованных гиперболических уравнений, применимый в случае двухфазной среды, одна из фаз которой ведет себя подобно сверхтекучей жидкости. Эта модель навеяна работами В. Н. Доровского [13, 14], хотя и не буквально им следует. В модели используются два химических потенциала q_0 и q_1, относящихся соответственно к упругопластической и сверхтекучей фазам. При этом парциальные плотности этих фаз описываются при помощи производных L_{q_0}, L_{q_1} от производящего потенциала L. Парциальные плотности удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered} \frac{\partial L_{q_0}}{\partial t} + \frac{\partial\,(u_k L)_{q_0}}{\partial x_k} = -(L_{q_0} + L_{q_1}) \sum_s \nu_0^{(s)} \Big(\frac{\nu_0^{(s)} q_0 + \nu_1^{(s)} q_1}{\tau^{(s)}} \Big), \\ \frac{\partial L_{q_1}}{\partial t} + \frac{\partial\,(u_k L_{q_1} + v_k)}{\partial x_k} = -(L_{q_0} + L_{q_1}) \sum_s \nu_1^{(s)} \Big(\frac{\nu_0^{(s)} q_0 + \nu_1^{(s)} q_1}{\tau^{(s)}} \Big), \end{gathered} \tag{3.1}$$

правые части которых моделируют реакции обмена между фазами. Таких реакций может быть несколько, и каждая из них характеризуется своими стехиометрическими коэффициентами $\nu_0^{(s)}$, $\nu_1^{(s)}$ ($\nu_0^{(s)} + \nu_1^{(s)} = 0$) и своими параметрами $\tau^{(s)}$, определяющими скорость реакции. В этой формулировке мы следуем схематизации, описанной в [3]. Из (3.1) вытекает справедливость уравнения неразрывности

$$\frac{\partial\,(L_{q_0} + L_{q_1})}{\partial t} + \frac{\partial\,[u_k (L_{q_0} + L_{q_1}) + v_k]}{\partial x_k} = 0. \tag{3.2}$$

Участвующие в (3.1), (3.2) компоненты v_k задают вектор относительной к движению среды массовой скорости переноса сверхтекучей фазы.

Так же как и в предыдущих пп. **1, 2**, упругую или упругопластическую фазу будем описывать уравнениями

$$\begin{gathered}\frac{\partial L_{r_{ij}}}{\partial t}+\frac{\partial\,(u_kL)_{r_{ij}}}{\partial x_k}-\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\,L_{r_{kj}}=0,\\ \frac{\partial L_{r_i}}{\partial t}+\frac{\partial\,(u_kL)_{r_i}}{\partial x_k}=0,\qquad \frac{\partial L_n}{\partial t}+\frac{\partial\,(u_kL_n+\varepsilon_{ijk}b_{ij})}{\partial x_k}-\frac{\Phi_n}{\tau_1}=0,\\ \frac{\partial L_{b_{ij}}}{\partial t}+\frac{\partial\,(u_kL_{b_{ij}}+\varepsilon_{ijk}n)}{\partial x_k}-L_{b_{kj}}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}=0,\qquad \frac{\partial L_{p_{ijlm}}}{\partial t}+\frac{\partial\,(u_kL)_{p_{ijlm}}}{\partial x_k}=-\frac{\Psi_{p_{ijlm}}}{\tau_2}.\end{gathered}\tag{3.3}$$

Чтобы замкнуть систему, в нее надо включить уравнения, управляющие массовым потоком с компонентами v_i, уравнения для энтропии L_T, а также уравнения для компонент L_{u_i} импульса. На последних мы остановимся позднее, а остальные выберем так:

$$\begin{gathered}\frac{\partial L_{v_i}}{\partial t}+\frac{\partial\,(u_kL)_{v_i}}{\partial x_k}-\Bigl(L_{v_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}-L_{v_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\Bigr)+\frac{\partial q_1}{\partial x_k}=0,\\ \frac{\partial L_T}{\partial t}+\frac{\partial\,(u_kL)_T}{\partial x_k}=\frac{1}{T}\Bigl[(L_{q_0}+L_{q_1})\sum_s\tau^{(s)}(\nu_0^{(s)}q_0+\nu_1^{(s)}q_1)^2+\frac{n\Phi_n}{\tau_1}+\frac{p_{ijlm}\Psi_{p_{ijlm}}}{\tau_2}\Bigr]\geqslant 0.\end{gathered}\tag{3.4}$$

Как было показано, например, в [3], первая строка в (3.4) совместна с дополнительными уравнениями

$$\frac{\partial L_{v_i}}{\partial x_k}-\frac{\partial L_{v_k}}{\partial x_i}=0.\tag{3.5}$$

Равенства же (3.3) совместны с уравнениями

$$\frac{\partial L_{r_{ij}}}{\partial x_i}=L_{r_i},\qquad \frac{\partial L_{b_{ij}}}{\partial x_i}=0.\tag{3.6}$$

Недивергентное уравнение для импульса возьмем следующего вида:

$$\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t}+\frac{\partial\,(u_kL)_{u_i}}{\partial x_k}-L_{r_{kj}}\frac{\partial r_{ij}}{\partial x_k}-L_{b_{kj}}\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}+L_{v_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}-L_{v_k}\frac{\partial v_k}{\partial x_i}=r_{ij}L_{r_j}.\tag{3.7}$$

Система, составленная из (3.1), (3.3), (3.4), (3.7), будет симметрической гиперболической, если производящий потенциал — выпуклая функция своих аргументов. Мы не останавливаемся на проверке этого утверждения. Она состоит просто в повторении рассуждений, уже проводившихся выше и в [2] для “уравнений деталей”, из которых наша система составлена.

С помощью дополнительных соотношений (3.5), (3.6) уравнение (3.7) приводится к дивергентному виду:

$$\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t}+\frac{\partial\,[(u_kL)_{u_i}-r_{ij}L_{r_{kj}}-b_{ij}L_{b_{kj}}+v_kL_{v_i}-\delta_{ik}v_rL_{v_r}]}{\partial x_k}=0,\tag{3.8}$$

используя который, так же как и в примерах из п. **2** и настоящего пункта, выводится дивергентное равенство закона сохранения энергии. Мы его сейчас не приводим. Построенные уравнения галилеево-инвариантны, если L инвариантна относительно вращений, а ее зависимость от q_0, q_1, u_i такова:

$$L=L(q_0-u_iu_i/2,q_1-u_iu_i/2,\dots).$$

Заметим, что (3.8) естественно записать с использованием тензора напряжений

$$\frac{\partial L_{u_1}}{\partial t} + \frac{\partial\,[u_k L_{u_i} - \sigma_{ik}]}{\partial x_k} = 0,$$

$$\sigma_{ik} = -L + r_{ij} L_{r_{kj}} + b_{ij} L_{b_{kj}} + v_k L_{v_i} - \delta_{ik} v_r L_{v_r},$$

в котором в качестве слагаемых участвуют произведения $r_{ij} L_{r_{kj}}$, $b_{ij} L_{b_{kj}}$, $v_k L_{v_i}$, $-\delta_{ik} v_k L_{v_k}$, каждое из которых соответствует той или иной "детали", входящей в конструкцию. При построении разобранных нами моделей мы поочередно увеличивали число уравнений и описываемых ими процессов, каждый раз включая дополнительные слагаемые в закон сохранения импульса, т. е. видоизменяя тензор напряжений σ_{ik}.

Есть еще один способ включения новых неизвестных при конструировании термодинамически согласованных гиперболических систем (см. [15–17]). В качестве таких новых неизвестных можно выбрать дополнительные слагаемые γ_{ik}, включенные в тензор напряжений, вычисляемый по формуле

$$\sigma_{ik} = -L + r_{ij} L_{r_{kj}} + b_{ij} L_{b_{kj}} + v_k L_{v_i} - \delta_{ik} v_r L_{v_r} - \gamma_{ik}.$$

При этом, конечно, надо полагать, что γ_{ik} введены как дополнительные аргументы в производящий потенциал L.

Уравнения (3.7) должны теперь выглядеть так:

$$\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial\,[(u_k L)_{u_i} - \gamma_{ik}]}{\partial x_k} - L_{r_{kj}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_k} - L_{b_{kj}} \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k} + L_{v_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} - L_{v_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = r_{ij} L_{r_j}.$$

Кроме того, в систему надо добавить новые уравнения. Эти уравнения могут содержать диссипативные правые части:

$$\frac{\partial L_{\gamma_{ij}}}{\partial t} + \frac{\partial\,(u_k L)_{\gamma_{ij}}}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\Omega_{\gamma_{ij}}}{\tau_3}$$

(Ω — диссипативная функция), которые требуют включения дополнительного слагаемого $T^{-1}\gamma_{ij}\Omega_{\gamma_{ij}}$ в правую часть энтропийного уравнения. Читателю не составит труда убедиться, что и после описанного расширения наши уравнения обеспечивают выполнение дивергентного энергетического уравнения с нулевой правой частью. Конечно, при этом надо предполагать, что справедливы и дополнительные условия (3.5), (3.6).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Годунов С. К., Гордиенко В. М.** Простейшие галилеево-инвариантные и термодинамически согласованные законы сохранения // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 1. С. 3–16.
2. **Годунов С. К., Гордиенко В. М.** Усложненные структуры галилеево-инвариантных законов сохранения // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 2. С. 3–21.
3. **Годунов С. К.** Галилеево-инвариантная и термодинамически согласованная модель составной изотропной среды // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 5. С. 3–12.
4. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.
5. **Годунов С. К., Роменский Е. И.** Элементы механики сплошной среды и законы сохранения. Новосибирск: Науч. кн., 1998. (Унив. сер.; Т. 4).
6. **Godunov S. K., Romensky E. I.** Elements of continuum mechanics and conservation laws. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2003.
7. **Гриняев Ю. В., Панин В. Е.** Полевая теория дефектов на мезоуровне // Докл. РАН. 1997. Т. 353, № 1. С. 37–39.

8. **Гриняев Ю. В., Чертова Н. В.** Описание ползучести в рамках полевой теории дефектов // ПМТФ. 2002. Т. 41, № 3. С. 177–183.
9. **Физическая** мезомеханика и компьютерное конструирование материалов / Под ред. В. Е. Панина. Новосибирск: Наука, 1995. Т. I, II.
10. **Кадич А., Эделен Д.** Калибровочная теория дислокаций и дисклинаций. М.: Мир, 1985.
11. **Киселев С. П., Белай О. В.** Континуальная калибровочная теория дефектов при наличии диссипации энергии // Физ. мезомеханика. 1999. Т. 2, № 5. С. 69–72.
12. **Киселев С. П.** Модель упругопластического деформирования материалов на основе калибровочной теории дефектов с учетом диссипации энергии // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 2. С. 177–188.
13. **Доровский В. Н.** Континуальная теория фильтрации // Геология и геофизика. 1989. № 7. С. 39–45.
14. **Доровский В. Н., Перепечко Ю. В.** Феноменологическое описание двухскоростных сред с релаксирующими касательными напряжениями // ПМТФ. 1992. № 3. С. 56–62.
15. **Годунов С. К.** О задачах для сплошных сред с вязкостью Максвелла // Нелинейные задачи математической физики и смежные вопросы. II. В честь профессора О. А. Ладыженской. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2002. С. 179–184. (Междунар. математ. сер.; Т. 2).
16. **Godunov S. K.** Nonlinear problems in mathematical physics and related totocs. II. In honor of professor O. A. Ladyzhenskaya. N. Y.: Kluwer Acad. / Plenum Publ., 2002. P. 193–200.
17. **Godunov S. K.** The equations of elasticity with dissipation as a nontrivial example of thermodynamically consistent hyperbolic equations // J. Hyperb. Diff. Equations. 2004. V. 1, N 2. P. 1–15.

Поступила в редакцию 21/IV 2004 г.