

К ЗАДАЧЕ О ПЛАСТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ МАТЕРИАЛА
ПОД ЖЕСТКИМ ШЕРОХОВАТЫМ ШТАМПОМ ПРИ
ВНЕЦЕНТРЕННОМ НАГРУЖЕНИИ

Ю. И. Соловьев

(Новосибирск)

В предыдущей нашей статье [1] было получено поле напряжений в несжимаемой сыпучей среде, находящейся в состоянии предельного равновесия под давлением жесткого шероховатого штампа с произвольным нагружением. В настоящей работе преследуется цель на простом примере более подробно исследовать аналогичное решение для идеально-вязкой среды.

Будем считать штамп абсолютно жестким и шероховатым, а среду несжимаемой. Тогда, исходя из условий отсутствия проскальзываний и разрывов по контактной поверхности, нетрудно убедиться, что направление одного из семейств линий скольжения в точках контактной поверхности должно совпадать с направлением виртуальных скоростей в этих точках. Величина и направление виртуальных скоростей точек контактной поверхности определяются положением возможного мгновенного центра вращения штампа. Положение же мгновенного центра вращения зависит от условий нагружения штампа.

Задача о предельном равновесии штампа имеет два решения. Одно из них дает максимальное давление, при котором еще не происходит выпирания среды из-под штампа, другое дает минимальное давление, при котором штамп еще не выпирается средой. В целях краткости ниже будет исследована лишь задача о максимальном давлении. Задача о минимальном давлении исследуется аналогично.

Направим координатную ось x вниз, а ось y — вправо и примем обозначения: $\sigma_1 > \sigma_2$ — главные напряжения, k — коэффициент сцепления (предел текучести на сдвиг), φ — угол между главной осью напряжений и осью x , отсчитываемый против хода часовой стрелки, от положительного напряжения оси x , γ — объемный вес среды. Компоненты напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} считаются положительными, если на стороне элементарного прямоугольника, внешняя нормаль которой совпадает с направлением координатной оси, они имеют направления, противоположные направлениям соответствующих координатных осей.

Как известно [2], поле напряжений в пластической области определяется уравнениями теории пластичности

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \operatorname{tg} \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} + \operatorname{tg} \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$$

где

$$\xi = \chi + \varphi, \quad \eta = \chi - \varphi, \quad 2k\chi = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) - \gamma x \quad (1)$$

а компоненты напряжения в системе координат nt , повернутой относительно системы xy на угол α , — выражениями

$$\left. \begin{matrix} \sigma_n \\ \sigma_t \end{matrix} \right\} = k [2\chi \pm \cos 2(\varphi - \alpha)] + \gamma x, \quad \tau_{nt} = k \sin 2(\varphi - \alpha) \quad (2)$$

В общем случае задача может быть решена только численным или графическим методами интегрирования. В частном случае, когда одна из границ среды горизонтальна и на ней задано равномерно распределенное давление, решение может быть получено в замкнутом виде с помощью интегралов уравнений теории пластичности, найденных С. А. Христиановичем [3].

Поле виртуальных скоростей определяется соотношениями Г. Гейрингер [4] для скоростей вдоль линий скольжения

$$du - v d\theta = 0, \quad dv + u d\theta = 0 \quad (3)$$

где u, v — компоненты вектора скорости соответственно вдоль первого (α) и второго (β) семейств линий скольжения, θ — угол между осью x и направлением линии скольжения второго семейства. В дальнейшем принято семейство линий скольжения, составляющее с осью x угол $\varphi + 1/4\pi$, называть первым семейством, а семейство линий скольжения, составляющее с осью x угол $\varphi - 1/4\pi$ — вторым семейством линий скольжения.

Рассмотрим предельное напряженное состояние материала в области $OAGDB$ (фиг. 1), в которое он приходит от давления штампа, в предположении, что возможные перемещения точек контактной поверхности определяются поворотом штампа в направлении хода часовой стрелки вокруг некоторого мгновенного центра вращения $C(x_c, y_c)$, расположенного в пределах среды. При этом, если мгновенный центр вращения расположен так, что $|t_c| < b$ как, например, показано пунктиром на фиг. 1, то на контактной поверхности образуется участок $BE = b - |t_c|$, вдоль которого происходит отрыв подошвы штампа от поверхности среды, поскольку нормальная составляющая возможных перемещений точек подошвы штампа на этом участке направлена в сторону, противоположную среде. Тогда объемлющая линий скольжения начинается от точки E по касательной к подошве штампа. Если же $|t_c| \geq b$, то объемлющая линия скольжения проходит через ребро штампа B .

Пластическая область $OAGDB$ разбивается на три области различного напряженного состояния: OAG , OGD и ODB .

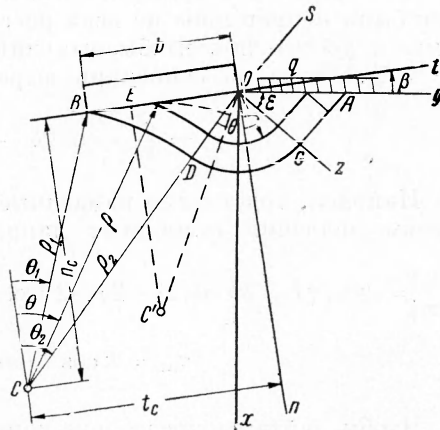
В области OAG имеет место равномерное максимальное напряженное состояние. Сетка линий скольжения состоит из отрезков двух ортогональных семейств параллельных прямых, наклоненных к оси x под углами $\varphi_1 \pm 1/4\pi$. Из уравнений (2) и граничных условий $\sigma_x = q, \tau_{xy} = k \sin 2\delta$ найдем

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \delta, \quad 2\chi_1 = \frac{q}{k} + \cos 2\delta, \quad \xi_1 = \text{const}, \quad \eta_1 = \text{const} \quad (4)$$

Положение прямой OG определено углом $\varepsilon = 1/4\pi + \delta$.

В области OGD (предполагается, что эта область существует) сетка линий скольжения образована отрезками пучка прямых, проходящих через точку O , и семейством дуг концентрических окружностей с центром в той же точке O . Вдоль каждой из радиальных прямых $\varphi_2 = \text{const}$, а величина $\xi_2 = \text{const}$ во всей этой области.

В области ODB сетка линий скольжения состоит из отрезков пучка прямых $y - y_c = (x - x_c) \tan(\varphi_3 - 1/4\pi)$, проходящих через мгновенный центр вращения C , и семейства дуг концентрических окружностей с цен-



Фиг. 1

тром в той же точке C . Отсюда в области ODB имеем

$$\varphi_3 = \operatorname{arctg} \frac{y - y_c}{x - x_c} + \frac{\pi}{4}, \quad \xi_3 = \operatorname{const} \quad (5)$$

Для того чтобы при такой комбинации решений компоненты напряжения были непрерывны во всей рассматриваемой области $OAGDB$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$; отсюда $\xi_1 = \xi_2$. Тогда на основании выражений (1), (4) и (5) определим

$$2\chi_3 = \frac{q}{k} + \cos 2\delta - 2\delta - 2\operatorname{arctg} \frac{y - y_c}{x - x_c} + \frac{\pi}{2} \quad (6)$$

Наконец, подставляя найденные значения φ_3 и χ_3 в уравнения (2), получим значения компонент напряжения в области ODB

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \sigma_{ni} \\ \tau_{ni} \end{aligned} \right\} &= q + \gamma x + k \left[\cos 2\delta - 2\delta - 2\operatorname{arctg} \frac{y - y_c}{x - x_c} + \frac{\pi}{2} \mp \sin 2 \left(\operatorname{arctg} \frac{y - y_c}{x - x_c} - \alpha \right) \right] \\ \tau_{ni} &= k \cos 2 \left(\operatorname{arctg} \frac{y - y_c}{x - x_c} - \alpha \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Чтобы найти распределение компонент напряжения по контактной поверхности, достаточно в выражения (7) внести уравнение контура контактной поверхности $F(x_1, y_1) = 0$ и соответствующее значение угла α , равное $\alpha = -\operatorname{arctg} (dy_1/dx_1)$. Для плоской подошвы, наклоненной под углом β к оси y и не проходящей в общем случае через начало координат, имеем $x = x_1$, $y = -x_1 \operatorname{tg} \beta + c$, $\alpha = \beta$. Следовательно решения (7) допускают до некоторой степени произвольное очертание контура контактной поверхности, что позволяет значительно расширить круг практически важных задач, в которых может быть получено решение с непрерывным полем напряжений.

Размер призмы выпора легко определить из геометрических зависимостей. При плоской подошве, проходящей через начало координат

$$a = (\rho_2 - \rho_1) / \cos \varepsilon \quad \left(\rho_2 = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}, \rho_1 = \sqrt{n_c^2 + (t_c + b)^2} \right)$$

Полученные размеры и форма призмы выпора хорошо подтверждаются опытными данными.

Заметим, что при удалении мгновенного центра вращения в бесконечность решения (7) переходят в обычные, контактные напряжения при плоской горизонтальной подошве штампа становятся равномерно распределенными с постоянным углом наклона, а возможные перемещения — параллельно-поступательными. Отсюда следует, что существующее решение с односторонним выпором среды является частным случаем рассмотренного и применимо только при центральном загрузении штампа.

Перейдем теперь к определению поля виртуальных скоростей.

Из уравнений (3) для централизованных полей, каковыми являются области ODB и OGD , имеем

$$u = \varphi(\theta) + \psi(r), \quad v = \varphi'(\theta) \quad (8)$$

где $\varphi(\theta)$, $\psi(r)$ — произвольные функции, r — расстояние от центра, а штрих означает производную. Для равномерного поля в области OAG

$$u = u(\alpha), \quad v = v(\beta) \quad (9)$$

Так как вдоль $AGDB$ $v = 0$ из условия неразрывности, то на основании вторых из уравнений (8) и (9) $v = 0$ всюду в области $OAGDB$, и следовательно, $\varphi(\theta) = \operatorname{const}$. Учитывая, что вдоль OB $u = \omega r$ (ω — угловая скорость вращения), получим в области ODB

$$u = \omega r \quad (10)$$

Итак, область ODB перемещается, как твердое тело, поворачиваясь вокруг мгновенного центра вращения. Это обстоятельство явилось следствием наложенного нами граничного условия о недеформируемости контактной поверхности. Тем не менее оно хорошо подтверждается, например, в опытах с сыпучей средой. Из-за отсутствия деформаций область ODB получила название «упругого ядра». Недеформирующиеся пластические области встречаются и в других решениях.

В области OGD сразу находим

$$u = \omega(\rho_2 - r) \quad (11)$$

а в области OAG

$$u = \omega(\rho_2 - z) \quad (12)$$

где r и z — расстояния от начала координат до соответствующей линии скольжения первого семейства.

Для того чтобы быть уверенным, что рассмотренное поле напряжений дает действительное значение интенсивности предельной нагрузки, следовало бы показать [5], во-первых, что найденные поле напряжений и поле скоростей совместны, и, во-вторых, что предел текучести нигде не превышает в жесткой области.

Проверить выполнение первого из этих условий нетрудно. В аналитической форме оно обычно выражается требованием, чтобы удельная мощность рассеивания работы, затрачиваемой на пластическую деформацию (скорость диссипации энергии), нигде не была отрицательной, т. е. должно выполняться неравенство

$$W = dA/dt \geq 0 \quad (13)$$

всюду в пластической области.

В нашем случае для элемента, ограниченного бесконечно близкими линиями скольжения, $W = -k\dot{\gamma}$, где через $\dot{\gamma}$ обозначена скорость деформации сдвига. Поскольку область ODB не деформируется, то в ней $\dot{\gamma} = 0$ и $W = 0$. В области OGD

$$2\dot{\gamma}_{r\theta} = \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = -\omega \frac{\rho_2}{r}, \quad W = \frac{1}{2} k\omega \frac{\rho_2}{r}$$

а в области OAG

$$2\dot{\gamma}_{zs} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial s} = -\omega, \quad W = \frac{1}{2} k\omega$$

Таким образом, неравенство (13) выполняется во всей области $OAGDB$.

Отметим, что при мгновенном центре вращения, расположенном за пределами среды, неравенство (13) не выполняется в области OAG .

Проверка второго условия встречает значительные трудности, до сих пор непреодоленные для многих схем даже менее сложных, чем рассматриваемая. Поэтому, пока не будет показано выполнение второго условия, решение (7) следует принимать за верхний предел интенсивности предельной нагрузки.

В практике проектирования сооружений, когда основание сложено из жирных мягких глин с большим коэффициентом сцепления и незначительным углом внутреннего трения, в первом приближении устойчивость сооружений можно оценивать, пренебрегая трением в грунте. В этих случаях полученные решения, в отличие от существующих, позволяют решать задачу об устойчивости сооружений с учетом не только угла наклона, но также и положения равнодействующей. Для этого выбирается такой мгновенный центр вращения, при котором линии действия предельной и действительной равнодействующих совпадают. Тогда коэффициент запаса устойчивости сооружения определится отношением указанных равнодействующих. Задача, правда, становится более трудоемкой, зато совпадение с опытными данными значительно улучшается и исчезают затруднения в определении действительных значений коэффициента запаса.

Так как положение равнодействующей определяется двумя параметрами (обычно углом наклона к нормали контактной поверхности и эксцентриситетом), а положение мгновенного центра вращения — двумя координатами, то можно полагать, что задача об определении мгновенного центра вращения имеет решение и притом единственное. Последнее, впрочем, требует специального доказательства. Некоторым подтверждением этого может служить приводимое ниже исследование положения мгновенного центра вращения в одном частном случае.

Рассмотрим зависимость положения мгновенного центра вращения и величины предельной нагрузки в функции от эксцентриситета e и угла наклона равнодействующей λ в наиболее простом, но интересном в практическом отношении случае, когда $q = 0$, $\delta = 0$, $\alpha = \beta = 0$.

Для удобства перейдем к относительным величинам

$$\sigma'_x = \sigma_x/k, \quad \tau'_{xy} = \tau_{xy}/k, \quad x' = x/b, \quad y' = y/b$$

В целях упрощения записи штрихи в дальнейшем будем опускать. Тогда выражения для компонент контактных напряжений на основании уравнений (7) можно записать в виде

$$\sigma_x = 1 + 2\theta + \sin 2\theta + \frac{1}{2}\pi, \quad \tau_{xy} = \cos 2\theta \quad (7a)$$

Проинтегрировав эти уравнения, получим нормальную и касательную составляющие равнодействующей

$$P = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta_2 - \operatorname{tg} \theta_1} \left[\left(1 + \frac{1}{2}\pi + 2\theta_2\right) \operatorname{tg} \theta_2 - \left(1 + \frac{1}{2}\pi + 2\theta_1\right) \operatorname{tg} \theta_1 \right] \quad (14)$$

$$T = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta_2 - \operatorname{tg} \theta_1} (2\theta_2 - 2\theta_1 - \operatorname{tg} \theta_2 + \operatorname{tg} \theta_1)$$

и вслед затем тангенс угла наклона ее

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{2\theta_2 - 2\theta_1 - \operatorname{tg} \theta_2 + \operatorname{tg} \theta_1}{(1 + \frac{1}{2}\pi + 2\theta_2) \operatorname{tg} \theta_2 - (1 + \frac{1}{2}\pi + 2\theta_1) \operatorname{tg} \theta_1}$$

Также нетрудно определить и величину эксцентриситета

$$e = \frac{\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}\pi + 2\theta_2) \operatorname{tg}^2 \theta_2 - \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}\pi + 2\theta_1) \operatorname{tg}^2 \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2 - \operatorname{tg} \theta_1 - \theta_2 + \theta_1}{(\operatorname{tg} \theta_2 - \operatorname{tg} \theta_1) \left[(1 + \frac{1}{2}\pi + 2\theta_2) \operatorname{tg} \theta_2 - (1 + \frac{1}{2}\pi + 2\theta_1) \operatorname{tg} \theta_1 \right]} - \frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2 - \operatorname{tg} \theta_1} - \frac{1}{2} \quad (16)$$

Уравнения (15) и (16) определяют положение мгновенного центра вращения при заданных λ и e . Уравнение (16) применимо при $y_c \leq -1$. При $-1 \leq y_c \leq 0$, $\theta_1 = 0$ и положение мгновенного центра вращения может быть определено углом θ_2 и координатой y_c . Угол θ_2 находится из уравнения (15) при $\theta_1 = 0$, а координата y_c определится выражением

$$y_c = -(1 - 2e)/(1 - 2e_0), \quad e \geq e_0 \quad (17)$$

которое легко получить из геометрических соотношений. Здесь через e_0 обозначена величина эксцентриситета, получаемого из уравнения (16) подстановкой $\theta_1 = 0$ и найденного значения θ_2 . Среднее нормальное давление по подошве штампа в этом случае будет

$$p = p_0(1 - 2e)/(1 - 2e_0), \quad e \geq e_0 \quad (18)$$

где $p_0 = P_0/b$, причем P_0 дается формулой (14) при $\theta_1 = 0$ и найденном значении θ_2 .

На фиг. 2 представлен график кривых $p = p(e)$ при $\lambda = \text{const}$. Если нет необходимости отыскивать положение мгновенного центра вращения, то предельная нагрузка может быть найдена по этому графику. Между

прочим, график этот показывает, что функция $p = p(e)$ с достаточной для практических целей степенью точности может быть аппроксимирована прямой

$$p = p_c(1 - 2e) \quad (19)$$

Здесь p_c — нормальное давление по подошве штампа, получающееся из существующего решения [2] или из уравнения (14), переписанного для этого случая в виде

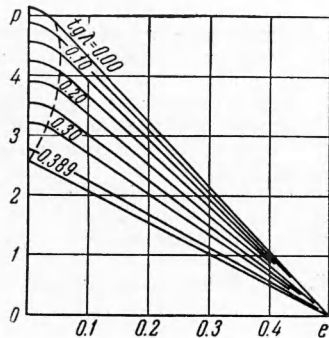
$$p_c = 1 + \frac{1}{2} \pi + 2\theta \quad (14a)$$

где угол θ определяется уравнением (15), которое принимает вид

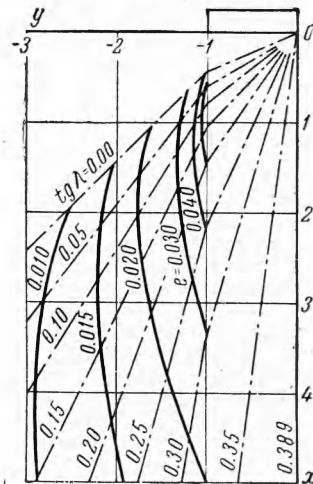
$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{2\theta - \operatorname{tg} \theta}{\left(1 + \frac{1}{2} \pi + 2\theta\right) \operatorname{tg} \theta} \quad (15a)$$

Величина p_c может быть найдена и по графику, изображенному на фиг. 2, при $e = 0$.

Наибольшая ошибка формулы (19) составляет не более 6,5% и идет в запас расчета. Следует, однако, подчеркнуть, что столь незначительная ошибка имеет место только в рассматриваемом случае идеально связной среды с горизонтальной поверхностью. В других случаях следует ожидать значительно большей погрешности.



Фиг. 2



Фиг. 3

Легко заметить, что формула (19) совпадает с известной формулой Н. М. Герсеванова [6] для учета влияния эксцентриситета на несущую способность основания. Таким образом, здесь впервые получено обоснование формулы Н. М. Герсеванова для случая идеально связной среды и дана возможность оценить ее погрешность и область применимости.

В тех случаях, когда для полного решения задачи требуется знать величину призмы выпора, становится необходимым отыскание возможного мгновенного центра вращения. При этом следует различать случаи: $e \geq e_0$ и $e < e_0$. В первом из них задача решается весьма просто с помощью уравнения (15), в котором надо положить $\theta_1 = 0$, и уравнения (17). Значительно более трудоемким является второй случай. Здесь задачу приходится решать приближенно, путем попыток, используя полные уравнения (15) и (16). Для определения положения мгновенного центра вращения в первом приближении можно рекомендовать следующий прием.

Из уравнения (15a) определяется угол θ , отвечающий заданному значению $\operatorname{tg} \lambda$, а из уравнения (14a) — равномерно распределенное давление p_c . После этого по формуле (19) вносится поправка на эксцентриситет. Так как кривизна эпюры предельного нормального давления незна-

чительна, то в первом приближении ее можно заменить линейной и по формуле внецентренного сжатия определить краевые ординаты

$$\left. \begin{array}{l} p_{\max} \\ p_{\min} \end{array} \right\} = p(1 \pm 6e)$$

Тогда углы θ_2 и θ_1 , определяющие в первом приближении положение мгновенного центра вращения, можно найти из уравнения (14а), заменив в нем p_c на p_{\max} и p_{\min} соответственно. Дальнейшее уточнение положения мгновенного центра вращения производится по уравнениям (15) и (16). После того, как положение мгновенного центра вращения будет окончательно найдено, распределение контактных напряжений и нормальная составляющая равнодействующей определяется уравнениями (7а) и (14а), а размер призмы выпора — по приведенной зависимости.

На фиг. 3 показано поведение изолиний $\operatorname{tg} \lambda = \operatorname{const}$ (пунктирные кривые) и $e = \operatorname{const}$ при $e \leq e_0$. Этим графиком можно пользоваться и для определения положения мгновенного центра вращения.

В заключение укажем, что в тех случаях, когда решение не может быть получено в конечном виде, к данной схеме легко могут быть применены существующие методы численного или графического интегрирования уравнений теории пластичности.

Поступила
10.IX.1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Соловьев Ю. И. К задаче о предельном равновесии сыпучей среды под жестким штампом при отсутствии объемных сил. Известия Сибирского Отделения АН СССР, 1959, № 6.
2. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. Гостехиздат, М., 1954.
3. Христианович С. А., Плоская задача математической теории пластичности при внешних силах, заданных на замкнутом контуре. Математический сборник, новая серия, 1939, т. I, вып. 4.
4. Geiringer H. Beitrag zum vollständigen ebenen Plastizitätsproblem, Ber. 3, Internat. Kongr. angew. Mech. Stockholm, 1930, Bd. 2, S. 185.
5. Прагер В. и Ходж Ф. Г. Теория идеально пластических тел. Издательство иностранной литературы, М., 1956.
6. Герсеванов Н. М. Собрание сочинений, т. I, Стройвоенмориздат, М., 1948.