

УДК 550.8.013

**ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГЕОСРЕДЫ
С УЧЕТОМ МИКРОСТРУКТУРЫ И ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ**

**Ци Чэнчжи^{1,2}, Янь Фаюань², А. И. Чанышев³,
Чэнь Хаосян¹, Цюй Сяолэй¹**

¹Пекинский университет гражданского строительства и архитектуры,
E-mail: qichengzhi65@163.com, qichengzhi@bucea.edu.cn, 100040, г. Пекин, Китай

²Китайский горно-технологический университет, 100083, г. Пекин, Китай

³Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,

E-mail: a.i.chanyshev@gmail.com, Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия

Работа посвящена построению математической модели упругопластического деформирования геоматериалов с учетом микроструктуры и фазовых превращений. Микроструктура определяется на основе калибровочной теории дефектов, фазовые превращения — согласно теории Гинцбурга–Ландау. В рамках расширенного представления лагранжиана с применением вариационного принципа Гамильтона получено уравнение движения геосред с эффектом диссипации энергии. Рассмотрены все возможные частные случаи изложенного подхода.

Геоматериалы, калибровочная теория, непрерывный фазовый переход, вариационный принцип Гамильтона, волна деформации

DOI: 10.15372/FTPRPI20220304

Реальные материалы обладают сложной внутренней структурой. Для описания их пластических деформаций широко используются подходы, разработанные Миндлиным, Эрингеном, Аифантисом, Флеком и Хатчинсоном и др. [1–9] с применением градиентов деформаций. Также существуют и другие подходы, например геометрические, подходы на основе калибровочной теории дефектов, теория поля дефектов [10–24] и т. д.

Калибровочная теория дефектов — шаг в направлении микроскопической теории пластичности, охватывающей взаимодействия структурных дефектов. Она впервые была предложена Эделеном и Кадичем [15, 16], но имеет ряд недостатков. В ней использованы особые определяющие соотношения, но при этом силовой тензор напряжений является симметричным. Однако из теории дислокаций сплошных сред известно, что силовой тензор напряжений асимметричен, по крайней мере в активной области дислокаций [25, 26]. Это специфическая реакция

Работа выполнена в рамках проекта НИР (номер гос. регистрации 121062200075-4), а также при поддержке Национального фонда естественных наук Китая (гранты № 12172036, 51774018) и стипендиальной программы Чанцзяна ученых и университетских инновационно-исследовательских коллективов (PCSIRT).

среды на дислокации. Более того, данный подход разработан на основе формализма Лагранжа, т. е. для среды без эффекта диссипации. Следовательно, невозможно сравнить результаты, полученные теоретическим путем, с данными экспериментов.

В [19, 20] предложены модели, в основе которых лежит калибровочная теория, учитывающая эффект диссипации. В [19] построена калибровочная модель Лагранжа с трансляционной инвариантностью и квадратичной формой тензора упругой деформации, тензора степени пластической дисторсии, тензора плотности дефектов. Полученные уравнения движения являются линейными; нелинейный синергетический эффект, связанный со структурным фазовым переходом, в пластической деформации не рассматривался. Калибровочная модель из [20] имеет те же недостатки.

Во время пластической деформации породные материалы испытывают структурный фазовый переход. Данный переход не является фазовым переходом из твердого состояния в жидкое или из жидкого в газообразное, а представляет собой продолжительный структурный переход массива пород с продолжительной необратимой деформацией, которая отражает структурные изменения среды на макроуровне. Для поликристаллических пород (каменная соль) движение дислокаций играет ключевую роль при их деформации и образовании трещин [27–29]. Для некристаллических пород со сложной структурой трехосные испытания образцов породы на сжатие показали, что порода более склонна к деформациям, которые характеризуются уменьшением прочности после пика напряжений из-за локализованных деформаций в форме множественных поверхностей сдвига–скольжения, близких к максимальному направлению напряжения сдвига [30, 31]. Этот процесс может рассматриваться как непрерывный фазовый сдвиг [31]. Таким образом, теория дислокаций применима для описания множественных сдвигов–скольжений и трансляционной калибровочной инвариантности [19]. Для более точного описания продолжительного совместимого структурного фазового перехода таких материалов необходимо к потенциальной энергии добавить силовую составляющую параметра деформации более высокого порядка.

Согласно локальным наблюдениям, в массиве пород, окружающем тоннели на большой глубине, происходит распространение волн медленной деформации [32–34]. Установлено, что скорость волны образования трещин зависит от свойств породы. В породах с небольшим количеством трещин скорость волны разрушения составляет около $\sim 1.5–2.0$ м/сут, в сильно трещиноватом массиве может достигать $8–10$ м/сут. Это явление противоречит теоретическому описанию, основанному на механике деформируемого твердого тела.

В настоящей работе использованы калибровочная теория, теория инвариантности на перенос системы координат и продолжительного фазового перехода для построения динамической упругопластической модели геоматериалов с эффектом диссипации. В качестве независимых переменных выбраны смещения и пластическая дисторсия. Изначально лагранжиан построен из требования его инвариантности относительно трансляционного преобразования. Для учета продолжительного эффекта структурного фазового перехода в исходный лагранжиан добавлены 4-й и 6-й компоненты тензора дисторсии. Определяющие уравнения среды и их соответствующие граничные условия построены на основе принципа Гамильтона. С учетом кинематического вариационного принципа получены соотношения обобщенного закона Гука. Исследован случай деформации “растяжение–уплотнение”. Уравнение движения применено для моделирования распространения волн деформации и явления зональной дезинтеграции. Предлагаемая модель способна эффективно описывать различные виды волн деформации. Она обеспечивает описание волн деформации в массиве пород вблизи заглубленных тоннелей.

ПОСТРОЕНИЕ ЛАГРАНЖИАНА С ТРАНСЛЯЦИОННОЙ ИНВАРИАНТНОСТЬЮ

Функция плотности лагранжиана для изотропного упругого твердого тела имеет вид

$$L_{el} = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i - \frac{\lambda}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (1)$$

где ρ — плотность среды; u_i — смещение точки x_i от равновесного положения; λ, μ — постоянные Ламе [35].

Функция плотности лагранжиана (1) инвариантна относительно переноса и преобразования поворота осей координат:

$$u'_i = u_i + h_i, \quad (2)$$

$$u'_i = u_i + e_{ijk} \omega_j u_k, \quad (3)$$

где h_i — вектор смещения; ω_i — вращение; e_{ijk} — абсолютный антисимметричный тензор Леви – Чивита (перестановочный тензор).

В физике инвариантность физических законов или лагранжианов относительно преобразования переноса координат рассматривается как симметрия. Существует два вида симметрии. Первый — пространственно-временная симметрия, охватывающая пространственно-временные преобразования. Наиболее распространенный пример — изотропность и однородность пространства. Встречаемая в механике твердого тела изотропная упругая среда обладает симметрией, одно из ключевых свойств которого — наличие двух постоянных упругости. При разрушении среды изотропность пропадает, симметрия нарушается. Второй вид симметрии — внутренняя, связанная с преобразованием поля без какого-либо изменения пространственно-временных координат в теории поля. Макроскопические механические свойства изотропной упругой среды не зависят от их детальной внутренней структуры и определяются симметрией среды в зависимости от пространственных переносов и вращений типов (2) и (3) твердого тела как единого целого.

При возникновении необратимых деформаций происходит локализация симметрии. В случае с локальным (калибровочным) преобразованием перехода $h_i(x_j, t)$ и вращения $\omega_i(x_j, t)$ инвариантность плотности лагранжиана (1) нарушается преобразованиями (2) и (3).

Калибровочная инвариантность физических законов и их лагранжианов относительно преобразований координат — фундаментальный принцип в физике. Имеется два вида калибровочной инвариантности: глобальная и локальная. Теория, сохраняющая инвариантность относительно (2) и (3), называется глобальной калибровочной. При разрушении среды ее изотропность исчезает, нарушается и локализуется глобальная симметрия. С помощью локальной калибровочной инвариантности появляется возможность определить внутренние структурные изменения и их взаимодействие с полем напряжения. Для построения локализованной калибровочной модели, отражающей внутреннее структурное изменение, необходимо построить инвариантную функцию плотности лагранжиана. Согласно калибровочной теории [15], для этой цели вводятся ковариантные производные $D_j u_i$ вместо традиционных $\partial u_i / \partial x_j$. Для преобразования (2) такая замена представляется как

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \rightarrow D_j u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta_{ji}, \quad (4)$$

где вводятся калибровочные поля β_{ji} .

Для обеспечения инвариантности $D_j u_i$ с учетом (2), β_{ji} должны удовлетворять условию

$$\beta'_{ji} = \beta_{ji} + \frac{\partial h_i}{\partial x_j}, \quad (5)$$

где β'_{ji} — новые значения поля β_{ji} .

Второй и третий слагаемые в (1) фактически представляют потенциальную энергию упругости:

$$E_e = \frac{\lambda}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Использование калибровочных производных в этом уравнении позволяет заключить, что тензор $D_j u_i$ связан в большей степени с упругой дисторсией, а тензор β_{ji} (тензор пластической дисторсии) выполняет функцию калибровочного поля. Его возможно разложить на девиаторную, дилатационную и ротационную составляющие, т. е. он содержит полный объем информации о пластической деформации геоматериалов. Его следует принять в качестве основного неизвестного при построении теории.

Инвариантность среды относительно преобразований (2) и (5) считаем калибровочной инвариантностью. Рассмотрим симметричную составляющую β_{ji} (тензор пластической деформации):

$$\frac{\beta_{ij} + \beta_{ji}}{2} = \frac{u_{ij}^p + u_{ji}^p}{2} = \varepsilon_{ij}^p \quad (6)$$

и антисимметричную составляющую β_{ji} (тензор пластического вращения):

$$\frac{\beta_{ij} - \beta_{ji}}{2} = \frac{u_{ij}^p - u_{ji}^p}{2} = \omega_{ij}^p. \quad (7)$$

Вместо антисимметричного тензора ω_{ij}^p иногда используется двойной псевдовектор пластического вращения ω_i^p , определяемый как

$$\omega_i^p = \frac{1}{2} e_{ijk} \omega_{jk}^p. \quad (8)$$

Калибровочные поля на основе локальных преобразований (2), (4), (5) связываются с дислокациями поля для кристаллических материалов. Для калибровочной группы второго порядка можно построить следующие инварианты:

$$\dot{\beta}_{ij} \dot{\beta}_{ij}, \alpha_{ik} \alpha_{ik}, \alpha_{ik} \alpha_{ki}, (\alpha_{ii})^2, \quad (9)$$

где выражение

$$\alpha_{ik} = e_{mji} \frac{\partial \beta_{jk}}{\partial x_m} \quad (10)$$

является тензором плотности дислокаций для кристаллических материалов и играет роль прочности калибровочного поля. На данном этапе функция плотности лагранжиана выглядит как

$$L_{ep} = L_1 + L_2. \quad (11)$$

Здесь

$$L_1 = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \beta_{ii} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \beta_{jj} \right) - \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta_{ji} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta_{ji} \right) - \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta_{ji} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \beta_{ij} \right), \quad (12)$$

$$L_2 = \frac{B}{2} \dot{\beta}_{ij} \dot{\beta}_{ij} - \frac{C}{2} \alpha_{km} \alpha_{km} - \frac{D}{2} \alpha_{km} \alpha_{mk} - \frac{H}{2} (\alpha_{mm})^2. \quad (13)$$

В (13) первое слагаемое описывает энергию вращения структурного элемента [19], коэффициент B при этом — момент инерции структурного элемента с размером d , обладающий значительным расстоянием между соседними плоскостями скольжения ($B = 1/8\rho d^2$). Остальные три слагаемых в (13) характеризуют потенциальную энергию, вызванную изгибом, кручением и их взаимодействием. Коэффициенты H , C и D отражают соответствующие жесткости:

$$C = \frac{\mu d^2}{12} \left(3 + \frac{2\nu}{1-\nu} \right), \quad D = -\frac{\mu d^2}{12} \frac{2\nu}{1-\nu}, \quad H = -\frac{\mu d^2}{12},$$

где ν — коэффициент Пуассона; d — расстояние между двумя соседними плоскостями скольжения.

Формула (12), по существу, есть отражение потенциальной энергии упругости, полученное с помощью преобразования (4). Для учета потенциальных сил, действующих на тело, необходимо добавить функцию плотности потенциальных сил $\Phi(u_i)$ к лагранжиану согласно [36]:

$$L_3 = -\rho_0 \Phi(u_i), \quad (14)$$

ρ_0 — плотность недеформированной среды.

НЕЛИНЕЙНОЕ ОБОБЩЕНИЕ ЛАГРАНЖИАНА С УЧЕТОМ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

Итак, с помощью трансляционной инвариантности при преобразованиях координат в виде сдвига получена функция потенциальной энергии упругости. Тензор плотности дислокаций фактически является комбинацией градиентных членов тензора дисторсии, и модель, построенная с помощью понятия дислокации, близка к градиентным моделям. Приведенный метод построения лагранжиана адаптируется также для построения лагранжиана породных материалов, если считать β_{ij} мерой деформации, а α_{kj} — мерой градиента β_{ij} . В этом случае модели, основанные на калибровочной теории, могут рассматриваться как модификации моделей градиентов пластической деформации.

Деформации породных материалов, превышающие границы упругой деформации, сопровождаются повреждениями и структурными изменениями, т. е. структурным фазовым переходом. Для учета структурного фазового перехода при необратимой деформации в качестве параметра первого порядка можно взять безразмерный тензор дисторсии β_{ij} , отражающий внутреннее структурное изменение. По аналогии с разложением свободной энергии Гинцбурга–Ландау [37] следует учесть вклад компонентов β_{ji} более высоких порядков в потенциальную

энергию. Согласно теории непрерывного перехода, для обеспечения устойчивости среды в точке фазового перехода обращаются в ноль β_{ji} и коэффициенты компонентов 3-го и 4-го порядков. Это означает, что необходимо рассматривать только компоненты второго порядка [37]. Для второго порядка β_{ji} используются $\beta_{ij}\beta_{ij}$, $\beta_{ij}\beta_{ji}$, $(\beta_{kk})^2$.

Компонент $\beta_{ij}\beta_{ij}$ фактически является квадратом модуля тензора дисторсии β_{ji} . Он — доминирующий компонент для тензора интенсивности дисторсии β_{ji} , компоненты более высоких порядков (4-го и 6-го) являются возмущениями основных членов в лагранжиане. Для построения упрощенной модели с меньшим количеством коэффициентов использован только один компонент 4-го порядка $(\beta_{ij}\beta_{ij})^2$ и один 6-го порядка $(\beta_{ij}\beta_{ij})^3$ для нелинейного обобщения лагранжиана с учетом фазового перехода. Получаем дополнительную функцию плотности лагранжиана для компонентов β_{ji} более высоких порядков:

$$L_4 = V_1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta_{ji} \right) \beta_{ji} - \frac{1}{2} V_{21} \beta_{ji} \beta_{ji} - \frac{1}{2} V_{22} \beta_{ij} \beta_{ji} - \frac{1}{2} V_{23} (\beta_{kk})^2 - \frac{1}{4} V_4 (\beta_{ji} \beta_{ji})^2 - \frac{1}{6} V_6 (\beta_{ji} \beta_{ji})^3. \quad (15)$$

Здесь V_1 , V_{21} , V_{22} , V_{23} , V_4 , V_6 — феноменологические коэффициенты. Первый компонент в правой части отражает взаимодействие между полями упругой и пластической деформации, т. е. V_1 должен быть одного порядка с модулем сдвига μ ($V_1 \sim \mu$). Коэффициенты V_{21} , V_{22} , V_{23} , V_4 и V_6 , описывающие влияние пластической дисторсии на энергию среды, определяются исходя из экспериментальных данных по медленным волнам деформации или в ходе локальных наблюдений такого явления, как медленные волны деформации и зональная дезинтеграция в породе, окружающей заглубленный тоннель. Несмотря на использование в целях упрощения только одного компонента 4-го порядка $(\beta_{ij}\beta_{ij})^2$ и одного 6-го порядка $(\beta_{ij}\beta_{ij})^3$, в уравнении (15) не теряется информация о расширении, чистом сдвиге или вращении.

Функция плотности лагранжиана в общем виде выглядит так:

$$\begin{aligned} L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = & \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \beta_{ii} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \beta_{jj} \right) - \\ & - \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta_{ji} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta_{ji} \right) - \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta_{ji} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \beta_{ij} \right) + \frac{B}{2} \dot{\beta}_{ij} \dot{\beta}_{ij} - \\ & - \frac{C}{2} \alpha_{km} \alpha_{km} - \frac{D}{2} \alpha_{km} \alpha_{mk} - \frac{H}{2} (\alpha_{mm})^2 + V_1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta_{ji} \right) \beta_{ji} - \frac{1}{2} V_{21} \beta_{ji} \beta_{ji} - \\ & - \frac{1}{2} V_{22} \beta_{ij} \beta_{ji} - \frac{1}{2} V_{23} (\beta_{kk})^2 - \frac{1}{4} V_4 (\beta_{ij} \beta_{ij})^2 - \frac{1}{6} V_6 (\beta_{ij} \beta_{ij})^3 - \rho_0 \Phi. \end{aligned} \quad (16)$$

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧНОЙ СРЕДЫ С ЭФФЕКТОМ ДИССИПАЦИИ

Согласно принципу Гамильтона [38], упругопластичная среда может характеризоваться однозначной функцией действия S , определяемой во временном интервале $t_1 \div t_2$:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \int_V L dV dt, \quad (17)$$

L — функция плотности лагранжиана; V — объем рассматриваемой среды.

Для любой произвольной обобщенной координаты q_i для учета граничных условий на границе Σ рассмотрим вариационный принцип Гамильтона в следующем виде:

$$\delta S + \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma} \Xi_s d\Sigma dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_V L(q_i, \dot{q}_i, q_{i,j}, t) dV dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma} \Xi_s d\Sigma dt = 0, \quad (18)$$

где Ξ_s — поверхностная потенциальная плотность силы.

Из (18) получим уравнения движения для среды без эффекта диссипации:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial L}{\partial q_{i,j}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (19)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial L}{\partial q_{i,j}} n_j = - \frac{\partial \Xi_s}{\partial q_i} = F_{si}, \quad (20)$$

F_{si} — обобщенные поверхностные силы.

Для среды с эффектом диссипации энергии уравнение Эйлера–Лагранжа принимает вид [38]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial L}{\partial q_{i,j}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}, \quad (21)$$

здесь R — функция диссипации. Для текучих материалов функция диссипации

$$R = \eta \dot{\beta}_{ik} \dot{\beta}_{ik}, \quad (22)$$

η — коэффициент вязкости.

Из (16), (21) получаем уравнения движения для смещений и дисторсий:

$$\rho \ddot{u}_i - \lambda \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial \beta_{il}}{\partial x_i} \right) - \mu \left(\Delta u_i + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \mu \left(\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial x_i} \right) + V_1 \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial x_j} - F_{bi} = 0, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & B \ddot{\beta}_{ij} - C \left(\Delta \beta_{ij} - \frac{\partial^2 \beta_{kj}}{\partial x_k \partial x_i} \right) - D e_{kim} e_{lnj} \frac{\partial^2 \beta_{nm}}{\partial x_k \partial x_i} - H e_{kij} e_{lnr} \frac{\partial^2 \beta_{nr}}{\partial x_i \partial x_k} - \\ & - \lambda \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \beta_{kk} \right) \delta_{ij} - \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \mu (\beta_{ij} + \beta_{ji}) - V_1 \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + V'_{21} \beta_{ij} + \\ & + V_{22} \beta_{ji} + V_{23} \delta_{ij} \beta_{kk} + V_4 \beta_{ij} (\beta_{kl} \beta_{kl}) + V_6 \beta_{ij} (\beta_{kl} \beta_{kl})^2 + \frac{\partial R}{\partial \dot{\beta}_{ij}} = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

где $F_{bi} = -\rho_0 \partial \Phi / \partial u_i$ — сила, действующая на тело; $V'_{21} = V_1 + V_{21}$.

Соответствующие граничные условия:

$$-\lambda \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \beta_{kk} \right) n_i - \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \beta_{ji} - \beta_{ij} \right) n_j - V_1 \beta_{ji} n_j = - \frac{\partial \Xi_s}{\partial u_i} = F_{si}, \quad (25)$$

$$-C \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial x_k} n_k + C \frac{\partial \beta_{kj}}{\partial x_i} n_k - D e_{kim} e_{lnj} \frac{\partial \beta_{nm}}{\partial x_l} n_k - H e_{kij} e_{lnr} \frac{\partial \beta_{nr}}{\partial x_l} n_k = -\frac{\partial \Xi_s}{\partial \beta_{ij}} = \mu_{sij} = 0. \quad (26)$$

Здесь $-\partial \Xi_s / \partial u_i = F_{si}$ — поверхностные силы. В данном случае поверхностные силы более высоких порядков $-\partial \Xi_s / \partial \beta_{ij} = \mu_{sij}$ полагаются равными нулю.

Уравнения (23)–(26) устанавливают уравнения движения с эффектом диссипации и соответствующими граничными условиями. Уравнение (24) близко к градиентным моделям, так как в данном случае введен градиент дисторсии. Из-за введения нелинейных компонентов оно может описывать более сложную нелинейную деформацию и разрушение массива горных пород по сравнению с линейными уравнениями.

При статичном состоянии уравнения (23), (24) упрощаются:

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial \beta_{ll}}{\partial x_i} \right) + \mu \left(\Delta u_i + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) - \mu \left(\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial x_j} \right) - V_1 \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial x_j} + F_{bi} = 0, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} C \left(\Delta \beta_{ij} - \frac{\partial^2 \beta_{kj}}{\partial x_k \partial x_i} \right) + D e_{kim} e_{lnj} \frac{\partial^2 \beta_{nm}}{\partial x_k \partial x_l} + H e_{kij} e_{lnr} \frac{\partial^2 \beta_{nr}}{\partial x_l \partial x_k} + \lambda \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \beta_{kk} \right) \delta_{ij} + \\ + \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \mu (\beta_{ij} + \beta_{ji}) + V_1 \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - V'_{21} \beta_{ij} + V_{22} \beta_{ji} + V_{23} \delta_{ij} \beta_{kk} - \\ - V_4 \beta_{ij} (\beta_{kl} \beta_{kl}) - V_6 \beta_{ij} (\beta_{kl} \beta_{kl})^2 = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

По сравнению с традиционной средой Коссера, уравнение (28) включает компоненты более высоких порядков, способных описывать явления нелинейной деформации и разрушения. Если в дальнейшем не рассматривать влияние фазового перехода, то уравнения (27), (28) становятся равными:

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial \beta_{ll}}{\partial x_i} \right) + \mu \left(\Delta u_i + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) - \mu \left(\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial x_j} \right) + F_{bi} = 0, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} C \left(\Delta \beta_{ij} - \frac{\partial^2 \beta_{kj}}{\partial x_k \partial x_i} \right) + D e_{kim} e_{lnj} \frac{\partial^2 \beta_{nm}}{\partial x_k \partial x_l} + H e_{kij} e_{lnr} \frac{\partial^2 \beta_{nr}}{\partial x_l \partial x_k} + \lambda \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \beta_{kk} \right) \delta_{ij} + \\ + \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \mu (\beta_{ij} + \beta_{ji}) = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

При нулевой необратимой деформации (при $\beta_{ij} = 0$) (29), (30) переходят в уравнения равновесия упругой среды:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + \mu \Delta u_i + F_{bi} = 0. \quad (31)$$

ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА

Потенциальная энергия, связанная с деформацией, равна

$$\begin{aligned}
 U_V = & \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \beta_{ii} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \beta_{jj} \right) + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta_{ji} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \beta_{ij} \right) + \\
 & + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta_{ji} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \beta_{ij} \right) + \frac{C}{2} \alpha_{km} \alpha_{km} + \frac{D}{2} \alpha_{km} \alpha_{mk} + \frac{H}{2} (\alpha_{nm})^2 - \\
 & - V_1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta_{ji} \right) \beta_{ji} + \frac{1}{2} V_{21} \beta_{ji} \beta_{ji} + \frac{1}{2} V_{22} \beta_{ij} \beta_{ji} + \frac{1}{2} V_{23} (\beta_{kk})^2 + \frac{1}{4} V_4 (\beta_{ij} \beta_{ij})^2 + \frac{1}{6} V_6 (\beta_{ij} \beta_{ij})^3.
 \end{aligned} \tag{32}$$

Согласно [13, 39], для упругой дисторсии $d_{ij}^0 = (\partial u_i / \partial x_j) - \beta_{ji}$, по этой причине без учета динамического влияния обобщенный закон Гука выражается как

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial d_{ij}^0} = \lambda \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \beta_{kk} \right) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \mu (\beta_{ij} + \beta_{ji}) - V_1 \beta_{ji}. \tag{33}$$

Когда необратимой деформации нет (при $\beta_{ij} = 0$), уравнение (33) упрощается до классического закона Гука для упругой среды:

$$\sigma_{ij} = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Обобщенные силы p_{ij} и m_{ijk} , соответствующие β_{ij} и $\beta_{ij,k}$, равны:

$$\begin{aligned}
 p_{ij} = & \frac{\partial U_V}{\partial \beta_{ij}} = -\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} - \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta_{ji} - \beta_{ij} \right) - V_1 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - 2\beta_{ij} \right) + \\
 & + V_{21} \beta_{ij} + V_{22} \beta_{ji} + (V_{23} + \lambda) (\beta_{kk}) \delta_{ij} + V_4 \beta_{ij} (\beta_{kl} \beta_{kl}) + V_6 \beta_{ij} (\beta_{kl} \beta_{kl})^2,
 \end{aligned} \tag{34}$$

$$m_{ijk} = \frac{\partial U_V}{\partial \beta_{ij,k}} = C \left(\frac{\partial \beta_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial x_k} \right) - D e_{kim} e_{lnj} \frac{\partial \beta_{nm}}{\partial x_l} - H e_{kij} e_{lnp} \frac{\partial \beta_{np}}{\partial x_l}. \tag{35}$$

СЛУЧАЙ НАГРУЖЕНИЯ “ОБЪЕМНОЕ РАСШИРЕНИЕ – УПЛОТНЕНИЕ”. ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ

Согласно [13], тензор дисторсии раскладывается на три составляющие:

$$\beta_{ji} = \frac{u_{ij}^p + u_{ji}^p}{2} + \frac{u_{ij}^p - u_{ji}^p}{2} = \varepsilon_{ij}^p + \omega_{ij}^p = \gamma_{ij}^p + \frac{1}{3} \theta^p \delta_{ij} - e_{ijk} \omega_k^p, \tag{36}$$

где γ_{ij}^p , θ^p , ω_k^p — девиаторная, дилатационная и ротационная составляющие тензора β_{ji} соответственно.

Аналогично тензор α_{km} также представляется в виде суммы трех составляющих [14]:

$$\alpha_{km} = e_{ijk} \frac{\partial \beta_{jm}}{\partial x_i} = e_{ijk} \frac{\partial \left(\gamma_{mj}^p + \frac{1}{3} \theta^p \delta_{mj} - e_{mjl} \omega_l^p \right)}{\partial x_i} = \alpha_{km}^\gamma + \alpha_{km}^\theta + \alpha_{km}^\omega. \tag{37}$$

Здесь

$$\alpha_{km}^{\gamma} = e_{ijk} \frac{\partial \gamma_{mj}^p}{\partial x_i}, \quad \alpha_{km}^{\theta} = \frac{1}{3} e_{imk} \frac{\partial \theta^p}{\partial x_i}, \quad \alpha_{km}^{\omega} = -e_{ijk} e_{mjl} \frac{\partial \omega_l^p}{\partial x_i}$$

— источники необратимых деформаций γ_{ij}^p , θ^p и ω^p .

Рассмотрим частные случаи и сравним предлагаемую модель с другими.

Для случая нагружения “расширение–уплотнение” (при $\gamma_{ij}^p = 0$, $\omega_k^p = 0$) доминирующей деформацией является дилатация $\beta_{ij} = 1/3\theta^p \delta_{ji}$, т. е. имеет место только объемная деформация. Данная модель соответствует модели пористой среды с четырьмя степенями свободы: три составляющие вектора смещения и объемная деформация. Уравнения движения при этом:

$$\rho \ddot{u}_i - \lambda \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} - \mu \left(\Delta u_i + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \frac{P}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - F_{bi} = 0, \quad (38)$$

$$B \ddot{\theta}^p - A \Delta \theta^p - P \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + Q \theta^p + \frac{V_4}{3} (\theta^p)^3 + \frac{1}{9} V_6 (\theta^p)^5 + \frac{3 \partial R}{\dot{\theta}^p} = 0, \quad (39)$$

где

$$A = 2 \left(C - \frac{D}{3} \right), \quad P = 3\lambda + 2\mu + V_1, \quad Q = 3\lambda + 2\mu + 2V_1 + V_{21} + V_{22} + V_{23}.$$

Соответствующие граничные условия равны

$$-\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} n_i - \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu + \frac{V_1}{3} \right) \theta n_i = F_{si}, \quad (40)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_k} n_k = 0. \quad (41)$$

Обобщенный закон Гука имеет вид:

$$\sigma_{ij} = \lambda \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{P}{3} \theta^p \delta_{ij}, \quad (42)$$

$$p_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial \beta_{ij}} = -\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} - \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - V_1 \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + M \theta^p \delta_{ji} + \frac{1}{9} V_4 (\theta^p)^3 \delta_{ji} + \frac{1}{27} V_6 (\theta^p)^5 \delta_{ji}, \quad (43)$$

$$m_{ijk} = \frac{\partial U_V}{\partial \beta_{ij,k}} = \frac{1}{3} (C - D) \left(\delta_{kj} \frac{\partial \theta^p}{\partial x_i} - \delta_{ij} \frac{\partial \theta^p}{\partial x_k} \right), \quad (44)$$

где

$$M = \lambda + \frac{2}{3} \mu + \frac{2}{3} V_1 + \frac{1}{3} V_{21} + \frac{1}{3} V_{22} + V_{23}.$$

Если пренебречь упругой объемной деформацией, то $\partial u_k / \partial x_k \approx \theta^p$. В этом случае применяется (39). Тогда

$$B \ddot{\theta}^p - A \Delta \theta^p + Q' \theta^p + \frac{V_4}{3} (\theta^p)^3 + \frac{1}{9} V_6 (\theta^p)^5 + \frac{3 \partial R}{\dot{\theta}^p} = 0, \quad Q' = Q - P. \quad (45)$$

Очевидно, что (45) описывает волну “расширение – уплотнение”. Для функции диссипации $R = \eta \dot{\theta}^p \dot{\theta}^p$ оно преобразуется к виду

$$B\ddot{\theta}^p + \eta' \dot{\theta}^p - A\Delta\theta^p + Q'\theta^p + V_4'(\theta^p)^3 + V_6'(\theta^p)^5 = 0. \quad (46)$$

Здесь

$$\eta' = 6\eta, \quad V_4' = \frac{V_4}{3}, \quad V_6' = \frac{V_6}{9}.$$

В (46) содержится слагаемое $B\ddot{\theta}^p + \eta' \dot{\theta}^p - A\Delta\theta^p$, которое, приравненное к нулю, описывает распространения плоских волн дефектов для тензоров плотностей дислокаций α и потока дислокаций I в твердых телах, полученных в [23]:

$$\frac{B}{S} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} - \Delta\alpha + \frac{\eta}{S} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0, \quad \frac{B}{S} \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \Delta\alpha + \frac{\eta}{S} \frac{\partial I}{\partial t} = 0,$$

S, B — постоянные; η — тензор вязкости 4-го порядка.

В общем случае (46) является нелинейным. Оно может рассматриваться как обобщенное распространение волн в вязкопластической среде, использоваться для описания импульсных волн солитонного типа, бегущих волн и волн перегиба. Для этого необходимо иметь представление лапласиана в (46) в двумерном и трехмерном случаях.

В зависимости от соотношений дисперсии и граничных условий уравнение (46) способно описать медленную бегущую волну деформации и медленную волну деформации солитонного типа. Бегущая волна напряжения сжатия изучалась в массиве пород, окружающем тоннели, расположенных в России [32, 34]. Эти же волны исследовались в никелевой шахте “Цзиньчан” и железорудной шахте “Чжанцзява” (Китай) [33]. Лабораторные испытания твердых образцов [40] показали, что на стадии идеально пластического течения в твердом теле также распространятся волны солитонного типа.

В [41] выполнено моделирование волн солитонного типа на примере разлома в земной коре на основе возмущенного уравнения синус-Гордона. В этих случаях параметры η', V_4', V_6' определяются исходя из экспериментальных данных и локальных наблюдений медленных волн деформации и зональной дезинтеграции в породе, окружающей заглубленные тоннели. В [42] разработана модель на основе фазового перехода для имитации волны деформации. Однако модель, разработанная в рамках настоящей работы, более подходящая с точки зрения механики.

Рассмотрим круговой тоннель радиусом $r = 5$ м и свободной стенкой ($\nabla\theta^p|_{r=5} = 0$). Примем коэффициенты $B = 1$, $\eta' = 1$, $A = -1$, $Q' = -0.2$, $V_4' = 1.5$, $V_6' = -1.6$, введем граничные условия $\nabla\theta^p|_{r=5} = 0$, $\theta^p(t)|_{r=5} = 0.054 / e^{10t} + e^{-10t}$ и исходное состояние $\theta^p(r)|_{t=0} = 0$. Данный тип граничных условий может соответствовать динамическому воздействию, возникшему из-за горных ударов на периферии стенки тоннеля, взрывов газа в тоннеле или других динамических воздействий. Значения параметров в (46) взяты на основе локальных наблюдений, скорость волны деформации в массиве пород, окружающих выработки шахты Артемовского месторождения (Дальний Восток, Россия), составляет ~ 1 м/сут [32]. Форма граничных условий и исходного состояния уравнения (46) выбрана из [24]. Распространение волны солитонного типа представлено на рис. 1. Такой тип солитона также получен в [24].

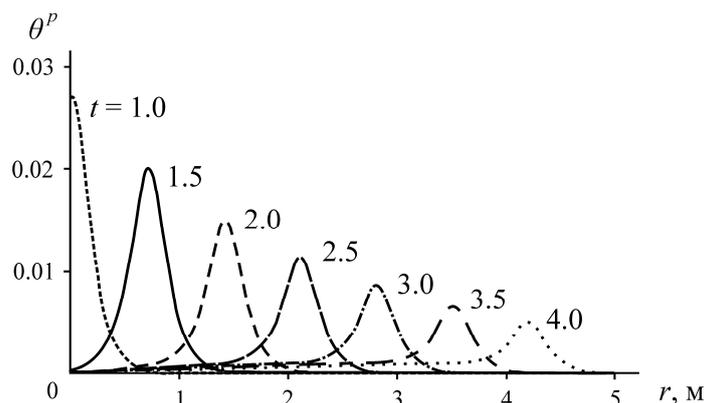


Рис. 1. Распространение волны деформации солитонного типа

Очевидно, что волна распространяется в радиальном направлении с затуханием амплитуды, но ее форма остается почти неизменной. Затухание амплитуды волны обусловлено демпфирующим воздействием и граничными условиями. Если пренебречь влиянием инерции, то уравнение (46) упрощается:

$$\eta' \dot{\theta}_p = A \Delta \theta^p - Q' \theta^p - V_4'(\theta^p)^3 - V_6'(\theta^p)^5. \tag{47}$$

Решение (47) может описать распространение пластической деформации по фронту в форме волны перегиба. Решение типа волны перегиба получено в [36] для волны деформации в рамках модели Френкеля–Конторовой. Для иллюстрации примем следующие коэффициенты: $\eta' = 1$, $Q' = -1$, $A = -1$, $V_4' = -15$, $V_6' = 18$, введем граничные условия $\nabla \theta^p|_{r=5} = 0$, $\theta^p(t)|_{r=5} = 0.027$ и исходное состояние $\theta^p(r)|_{t=0} = 0.054 / (e^r + e^{-r})$. Данный тип граничных условий и исходного состояния может соответствовать исходному распределению объемной деформации в массиве пород, окружающих тоннель. На рис. 2 показано распространение волны перегиба от тоннеля в сторону массива относительно времени. Такой тип солитона также получен в [24].

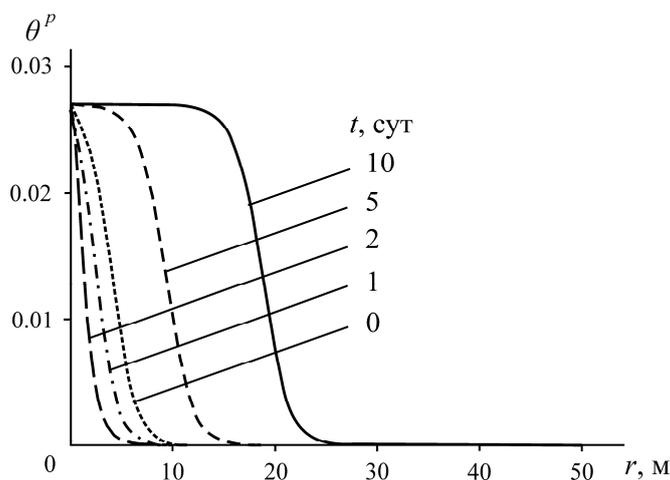


Рис. 2. Распространение фронта волны во времени

Статическая форма уравнения (47) имеет вид

$$A \Delta \theta^p - Q' \theta^p - V_4'(\theta^p)^3 - V_6'(\theta^p)^5 = 0 \tag{48}$$

и позволяет описать кольцевой тип “расширения – уплотнения” вокруг заглубленных тоннелей, так называемую зональную дезинтеграцию [36]. На основе изучения расстояний различных областей сжатия до стенки тоннеля появляется возможность определить коэффициенты для (48). Примем следующие коэффициенты: $A = 1$, $Q' = -0.4$, $V_4' = 1.6$, $V_6' = -2.4$ и введем граничные условия $\nabla \theta^p|_{r=5} = 0$, $\theta^p(t)|_{r=5} = 0.027$, означающие, что повреждение стенки тоннеля максимально. Распределение объемной деформации в радиальном направлении для данного случая представлено на рис. 3.

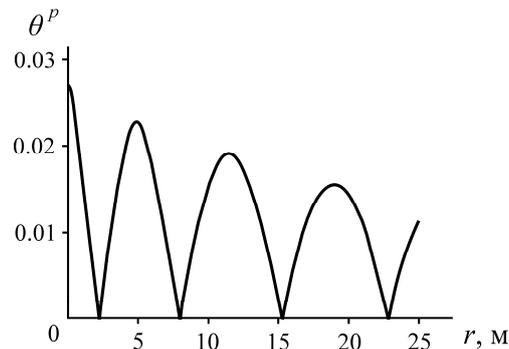


Рис. 3. Распределение θ^p в радиальном направлении

Распределение обладает квазипериодическим характером с уменьшением амплитуды и увеличением периода, что согласуется с локальными наблюдениями [43]. Данная модель близка к модели градиента деформации зональной дезинтеграции массива пород в окрестностях заглубленных тоннелей, описанной в [44].

Введение компонентов тензора дисторсии более высокого порядка в уравнения движения способно значительно расширить возможности предлагаемой модели. В последующих работах будет рассмотрена инвариантность лагранжиана по отношению к преобразованию вращения, граничным условиям на поверхности, наличию границ раздела фаз в среде и степени деформации.

ВЫВОДЫ

Сформулирована математическая модель упругопластического деформирования геосред с учетом микроструктуры и фазовых превращений в виде двух типов уравнений движения с эффектом диссипации энергии и соответствующих граничных условий. Показано, что эта модель обобщает известные модели (среда Коссера).

Установлен обобщенный закон Гука для сред с калибровочным эффектом. Получено обобщенное уравнение распространения в вязкопластической среде волн следующих структур — волн солитонного типа, бегущих волн, волн перегиба. Рассмотрены примеры распространения этих волн на шахтах и в окрестности тоннелей глубокого залегания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mindlin R. D. Micro-structure in linear elasticity, Arch. Rational Mech. Anal., 1964, Vol. 16, No. 1. — P. 51–78.
2. Mindlin R. D. Second gradient of strain and surface tension in linear elasticity, Int. J. Solids Struct., 1965, Vol. 28. — P. 845–857.

3. **Eringen A. C. and Suhubi E. S.** Nonlinear theory of simple micro-elastic solids-I, *Int. J. Eng. Sci.*, 1964, Vol. 2. — P. 189–220.
4. **Aifantis E. C.** On the microstructural origin of certain inelastic models, *J. Eng. Mat. Tech.*, 1984, Vol. 106. — P. 326–330.
5. **Aifantis E. C.** The physics of plastic deformation, *Int. J. Plasticity*, 1987, Vol. 3. — P. 211–247.
6. **Aifantis E. C.** On the role of gradients in the localization of deformation and fracture, *Int. J. Eng. Sci.*, 1992, Vol. 30. — P. 1279–1299.
7. **Fleck N. A. and Hutchinson J. W.** A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity, *J. Mech. Phys Solids*, 1993, Vol. 41, No. 12. — P. 1825–1857.
8. **Fleck N. A. and Hutchinson J. W.** Strain gradient plasticity, *Adv. Appl. Mech.*, Acad. Press, New York, 1997, Vol. 33. — P. 295–361.
9. **Fleck N. A. and Hutchinson J. W.** A reformulation of strain gradient plasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, 2001, Vol. 49. — P. 2245–2271.
10. **Kondo K.** On the geometrical and physical foundations of the theory of yielding, *Proc. 2nd Japan Nat. Congr. Appl. Mech.*, Tokyo, 1953. — P. 41–47.
11. **Bilby B. A., Bullough R., and Smith E.** Continuous distribution of dislocations: a new application of the methods of non-Riemannian geometry, *Proc. Roy. Soc. A*, 1955, Vol. 231. — P. 263–273.
12. **Guzev M. A.** Non-Euclidean models of elasto-plastic materials with structure defects, Lambert Academic Publishing GmbH & Co. KG, Saarbruchen, Germany, 2010. — 128 p.
13. **Lurie S. A., Belov P. A., and Volkov-Bogorodsky D.** Multi-scale modeling of materials; cohesion, interfacial interaction, inclusions and defects, *Analysis and Simulation of Multifield Problems*, Springer, Berlin, 2003. — P. 101–110.
14. **Lurie S. A. and Kalamkarov A. L.** General theory of continuous media with conserved dislocations, *Int. J. Solids Struct.*, 2007, Vol. 44. — P. 7468–7485.
15. **Edelen D. G. B.** On the closure of the governing equation of defect mechanics and the resulting theory of the plastic state, *Int. J. Eng. Sci.*, 1979, Vol. 17, No. 4. — P. 441–464.
16. **Kadic A. and Edelen D. G. B.** A gauge theory of dislocations and disclinations, *Lecture Notes in Physics*, Springer Verlag, Berlin, 1983, Vol. 174. — P. 168–286.
17. **Duan Y. S. and Duan Z. P.** Gauge field theory of a continuum with dislocations and disclinations, *Int. J. Eng. Sci.*, 1986, Vol. 24, No. 4. — P. 513–527.
18. **Popov V. L. and Kröner E.** Theory of elastoplastic media with mesostructured, *Theo. Appl. Fract. Mech.*, 2001, Vol. 37, No. 1–3. — P. 299–310.
19. **Popov V. L. and Slyadnikov E. E.** Dynamic gauge theory in elastoplastic media, *Physical Mechanics of Heterogeneous Media and Computer-Aided Design of Materials*, edited by Panin V. E., Cambridge Int. Sci. Publishing, 1998. — P. 97–117.
20. **Kiselev S. P.** Model of elastoplastic deformation of materials, based on the gauge theory of defects with allowance for energy dissipation, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2004, Vol. 45, No. 2. — P. 293–300.
21. **Grinyaev Yu. V. and Chertova N. V.** Field theory of defects, Part I. *Phys. Mesomech.*, 2000, Vol. 5, No. 3. — P. 19–32.
22. **Grinyaev Yu. V. and Chertova N. V.** Field theory of defects, Part II. *Phys. Mesomech.*, 2000, Vol. 8, No. 6. — P. 33–38.
23. **Chertova N. V. and Grinyaev Yu. V.** Special features of propagation of plane defect waves in viscoplastic medium, *Pisma Zh. Tekh. Fiz.*, 1999, Vol. 25, No. 18. — P. 91–94.
24. **Chertova N. V. and Grinyaev Yu. V.** Derivation of traveling wave solutions in the field theory of defects, *Phys. Mesomech.*, 2007, Vol. 10, No. 5. — P. 107–112.

25. **Kröner E.** Dislocation theory as a physical field theory, *Meccanica*, 1996, Vol. 31, No. 5. — P. 577–587.
26. **Kröner E.** On the physical reality of torque stresses in continuum mechanics, *Int. J. Eng. Sci.*, 1963, Vol. 1, No. 4. — P. 261–278.
27. **Carter N. L., Horseman S. T., Russell J. E., and Hardin J. W.** Rheology of rocksalt, *J. Struct. Geol.*, 1993, Vol. 15. — P. 1257–1271.
28. **Senseny P. E., Hansen F. D., Russell J. E., Carter N. L., and Hardin J. W.** Mechanical behavior of rocksalt: Phenomenology and micro-mechanism, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci., Geomech. Abstr.*, 1992, Vol. 29, No. 4. — P. 363–378.
29. **Wawersik W. R. and Zeuch D. H.** Modeling and mechanistic interpretation of creep of rocksalt below 200 °C, *Tectonophysics*, 1986, Vol. 121, No. 2–4. — P. 125–152.
30. **Lindholm U. S., Yeakley L. M., and Nagy A.** The dynamic strength and fracture properties of Dresser basalt, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci., Geomech. Abstr.*, 1974, Vol. 11, No. 5. — P. 181–191.
31. **Adigamov N. S. and Rudaev Ya. I.** Equation of state with the consideration of softening of material, *J. Min. Sci.*, 1999, Vol. 35, No. 4. — P. 24–32.
32. **Guzev M. A. and Makarov V. V.** Deformation and failure of the highly stressed rocks around openings, Vladivostok, Dalnauka, 2007. — 232 p.
33. **Fang Zulie.** The maintenance of soft rock tunnels and their control measurements, The supporting theory and practice for soft rock tunnels in coal mines in China, edited by Manchao He, China University of Mining and Technology, Xuzhou, China, 1996. — P. 64–69.
34. **Khachai O. A., Khachai O. Yu., Klimko V. K. et al.** Kinematic and dynamic characteristics of slow deformation wave in rock massif as a response to blast action, *Geodynamics and the state of stresses of the Earth interior*, Proc 20th All-Russian Sci Conf., Mining Institute, SB RAS, Novosibirsk, 2013. — P. 38–42.
35. **Landau L. D. and Lifshitz E. M.** Theory of elasticity, Butterworth-Heinemann, Oxford, 1986.
36. **Maugin G. A.** Material inhomogeneities in elasticity, Chapman & Hall, London, 1993.
37. **Landau L. D. and Lifshitz E. M.** Statistical physics, Part I. Butterworth-Heinemann, Oxford, 1997.
38. **Landau L. D. and Lifshitz E. M.** Mechanics, Butterworth-Heinemann, Oxford, 1998.
39. **Rice J.** Continuum mechanics and thermodynamics of plasticity in relation to microscale deformation mechanisms, *Constitutive equations in plasticity*, MIT Press, Cambridge, 1975. — P. 23–75.
40. **Zuev L. B., Barannikova S. A., Zhigalkin V. M., and Nadezhkin M. V.** Laboratory observation of slow movements in rocks, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2012, Vol. 53, No. 3. — P. 467–470.
41. **Gershenzon N. I., Bykov V. G., and Bambakidis G.** Strain waves, earthquakes, slow earthquakes, and afterslip in the framework of Frenkel–Kontorova model, *Phys. Rev.*, 2009, Vol. 79, 056601.
42. **Chengzhi Qi, Haoxiang Chen, Anvar Chanyshiev, Jilin Qi, and Wei Wu.** Modeling deformation wave in rock near deep level tunnel, *J. Min. Sci.*, 2017, Vol. 53, No. 6. — P. 61–73.
43. **Shemyakin E. I., Fisenko G. L., Kurlenya M. V., Oparin V. N., Reva V. N., Glushikhin F. P., Rozenbaum M. A., Tropp E. A., and Kuznetsov Y. S.** The rock-mass zone disintegration near deep level mining opening. Part I: Data of in situ observations, *J. Min. Sci.*, 1986, Vol. 22, No. 4. — P. 3–13.
44. **Chengzhi Qi, Kairui Li, Jiping Bai, A. Chanyshiev, and Peng Liu.** Strain gradient model of zonal disintegration of rock mass near deep level tunnels, *J. Min. Sci.*, 2017, Vol. 53, No. 1. — P. 25–38.

*Поступила в редакцию 17/XII 2021
После доработки 09/III 2022
Принята к публикации 06/V 2022*