«Оптика атмосферы и океана», **25**, № 11 (2012)

УДК 004.94, 004.424, 519.633, 519.683, 535.12

Алгоритм моделирования динамической турбулентности в задачах атмосферной и адаптивной оптики

П.А. Коняев*

Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634021, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1

Поступила в редакцию 20.06.2012 г.

Предложена модификация спектрально-фазового метода для компьютерного моделирования изменяющихся во времени случайных процессов и полей. В алгоритме используется модель авторегрессии со скользящим средним, описываемая дискретным разностным уравнением. Реализация алгоритма отличается простотой и эффективностью при моделировании динамических задач атмосферной и адаптивной оптики.

Ключевые слова: Вычислительные алгоритмы, компьютерное моделирование, случайные процессы, атмосферная турбулентность, адаптивная оптика; computational algorithms, computer simulations, random media, atmospheric turbulence, adaptive optics.

Методы вычислительной физики прочно завоевали лидирующие позиции в современных разделах оптики, таких, например, как атмосферная и адаптивная оптика. Постоянный прогресс в компьютерной технике и использование новых технологий параллельного программирования [1] повышают эффективность численных алгоритмов, расширяя тем самым круг проблем, доступных для исследования. В частности, в адаптивной оптике становится возможным компьютерное моделирование сложных компонентов и систем в целом, работающих в динамическом режиме [2]. Для атмосферных приложений адаптивной оптики также требуется разработка динамических моделей турбулентности атмосферы, эволюционирующих во времени.

Вопросы численного моделирования динамики атмосферных турбулентных неоднородностей ранее уже освещались в литературе. Разработан алгоритм генерирования бесконечно протяженного экрана [3], однако его применение в динамических задачах основано на гипотезе Тейлора о «замороженности» турбулентности, а сам алгоритм сложен в практической реализации. Авторами [4] предложена модификация известного спектрально-фазового метода [5], основанная на обобщении гипотезы Тейлора с помощью рекуррентного алгоритма.

В настоящей статье предлагается дальнейшее обобщение спектрально-фазового метода для моделирования изменяющихся во времени двумерных случайных полей с известным временным спектром. Метод основан на модели авторегрессии со скользящим средним (АРСС), описываемой дискретным разностным уравнением, и чрезвычайно прост в реализации.

* Петр Алексеевич Коняев (petrkonyaev@gmail.com).

Модификация спектрально-фазового метода для моделирования динамической турбулентности

Известен спектрально-фазовый метод [5], предназначенный для моделирования процессов и полей с заданной статистикой (спектральной плотностью). Для двумерного дискретного поля $s(i,j)$ этот метод может быть представлен в виде

$$s(i,j)=\sum_{l=0}^{L-1}\sum_{m=0}^{M-1}S(l,m)\exp(\mathrm{i}g(l,m))\exp\left[\mathrm{i}2\pi\left(\frac{li}{L}+\frac{mj}{M}\right)\right]=$$

$$=FFT\{S(l,m)\exp(\mathrm{i}g(l,m))\}. \qquad (1)$$

Здесь FFT – оператор дискретного преобразования Фурье; $g(l,m)$ – некоррелированное двумерное случайное поле («белый» шум); $S(l,m)$ – спектральная амплитуда, удовлетворяющая условию

$$\left|S_{l,m}\right|^2=\Phi(k_{l,m})\Delta k^2,\ \ k_{l,m}=\Delta k\sqrt{l^2+m^2}, \qquad (2)$$

где $\Phi(k_{l,m})$ – требуемая спектральная плотность. Вид функции распределения случайных величин $g(l,m)$ не влияет на спектральную плотность сгенерированного поля $s(i,j)$, но для статистической независимости вещественной и мнимой частей комплексной функции $s(i,j)$ необходимо равномерное распределение аргумента в интервале $(-\pi,\ \pi)$.

Чтобы смоделировать эволюцию поля $s(k,l)$ во времени, необходимо согласно (1) задать функциональную связь двумерных массивов случайных чисел $g(l,m)=f(t)$ для дискретных моментов времени $t_n=nT$, где T – интервал времени дискретизации. В настоящей статье предлагается использовать для этого модель авторегрессии со скользящим средним, которая широко применяется в теории случайных процессов и описывается дискретным разностным уравнением

$$f(nT)=\sum_{p=1}^{N_{AP}} a_p f((n-p)T)+\sum_{q=1}^{N_{CC}} b_q r((n-q)T)+r(nT), \quad (3)$$

где $r(nT)$ — дискретный белый шум с нормальным распределением, нулевым средним значением и дисперсией σ_r^2; N_{AP} — порядок модели авторегрессии; N_{CC} — порядок модели скользящего среднего. Спектр мощности такого процесса имеет аналитическое выражение в виде [6]:

$$F(\omega)=\sigma^2\left|1+\sum_{q=1}^{N_{CC}} b_q \exp(-\boldsymbol{i}\omega qT)\right|^2 \Big/ \left|1-\sum_{p=1}^{N_{AP}} a_p \exp(-\boldsymbol{i}\omega pT)\right|^2, \quad (4)$$

$$-\pi/T \le \omega < \pi/T.$$

Меняя порядки модели и коэффициенты a_p и b_q, можно варьировать поведение временного спектра $F(\omega)$ в широких пределах. Поскольку реализация предлагаемого метода согласно (3) требует сохранения двумерных массивов значений $g(l,m)$ для предыдущих моментов времени p, q = 1, ..., max(N_{AP}, N_{CC}), то из практических соображений целесообразно использовать модель АРСС невысокого порядка. В частности, представляет интерес модель 1-го порядка (p = 1, q = 1), которая предъявляет минимальные требования к памяти компьютера:

$$f(nT) = a_1 f((n-1)T) + z(nT); \quad (5а)$$

$$z(nT) = b_1 r((n-1)T) + r(nT). \quad (5б)$$

Свойства этой модели хорошо известны. В частности, дисперсии и нормированные автокорреляционные функции имеют вид

$$\sigma_f^2 = \sigma_z^2/(1-a_1^2),\ \rho_f(k) = a^k,\ k > 1, \quad (6а)$$

$$\sigma_z^2 = \sigma_r^2(1+b_1^2),\ \rho_z(k) = 1,\ k = 0,$$
$$\rho_z(k) = b_1/(1+b_1^2),\ k > 1. \quad (6б)$$

Модель (5а), (5б) в узлах двумерной сетки $g(l,m)$ порождает независимые процессы эволюции случайных начальных значений поля $g_0(l,m)$, которые будут стационарными во времени с характеристиками (6а), (6б) при выполнении условий $|a_1| < 1$,

$$\langle g_0(l,m)\rangle = 0, \quad Var[g_0(l,m)] = \sigma_z^2/(1-a_1^2).$$

При этом значения $g(l,m)$ остаются некоррелированными между собой для любого момента времени.

Что же касается функции распределения случайных величин $g(l,m)$, то она из равномерной очень быстро трансформируется в гауссову (нормальную), что не является принципиальным ограничением, если в качестве искомого сгенерированного поля использовать только вещественную или мнимую часть комплексной функции $s(i,j)$.

Описание предлагаемого алгоритма для модели АРСС первого порядка

Шаг 1. Полагаем $n = 0$. Задаем двумерный массив спектральной амплитуды $S(l,m)$ согласно условию (2). Формируем двумерный массив $g(l,m)$, используя генератор псевдослучайных чисел с равномерным распределением в интервале $(-2\pi, 2\pi)$. Формируем двумерный массив дискретного шума $r_0(l,m)$, используя генератор псевдослучайных чисел с нормальным распределением, нулевым средним и дисперсией σ_r^2.

Шаг 2. Формируем случайное поле $s(i,j)$ согласно выражению (1). Используем в качестве результата вещественную или мнимую части комплексного массива $s(i,j)$. Применение параллельного алгоритма быстрого преобразования Фурье существенно ускоряет вычисления [1].

Шаг 3. Полагаем $n = n + 1$. Формируем новый массив дискретного шума $r_n(l,m)$ и модифицируем каждый элемент массива $g(l,m)$ согласно формуле (5).

Шаг 4. Возвращаемся на шаг 2 либо заканчиваем процесс.

Иллюстрация работы алгоритма для модели АРСС первого порядка

На рис. 1 показана эволюция двумерного случайного поля $s(i,j)$ со степенным спектром колмогоровского типа [2] для модели (5) с коэффициентами a_1 = 0,999, b_1 = 0,9 и дисперсией шума σ^2 = 0,01. Последовательность кадров, пронумерованных от 1 до 9, иллюстрирует плавные изменения во времени, происходящие согласно формуле (5). В то же время, сравнивая первый и последний кадры серии, можно заметить, что за 8 дискретных шагов произошло полное изменение первоначального кадра. При этом важно отметить, что алгоритм эволюции (5) не нарушает условия (2), так как не изменяет модуль спектральной амплитуды $S(l,m)$.

Для моделирования эволюции в среде, движущейся со скоростью $\mathbf{V}(v_x, v_y)$, необходимо слегка изменить формулу (1), введя в нее экспоненциальный множитель сдвига:

$$s(i,j) = FFT\left\{S\exp(\mathbf{i}g(l,m))\exp\left(\mathbf{i}nT(v_x+v_y)\right)\right\}. \quad (7)$$

На рис. 2 показана эволюция поля с тем же степенным спектром в движущейся (слева направо) среде.

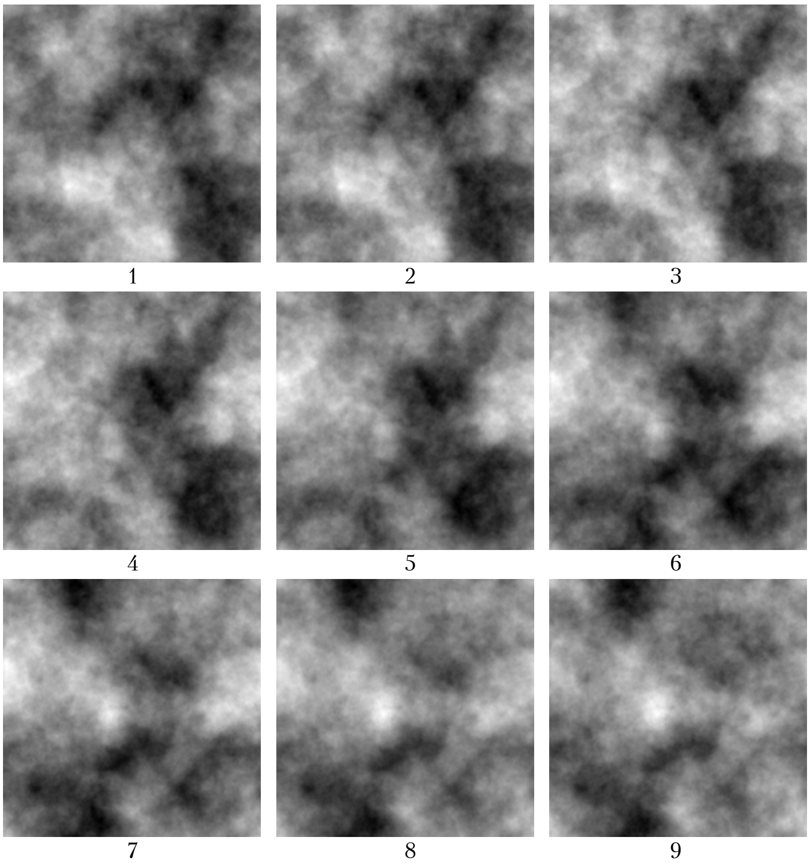

Рис. 1. Эволюция двумерного случайного поля со степенным спектром в неподвижной среде

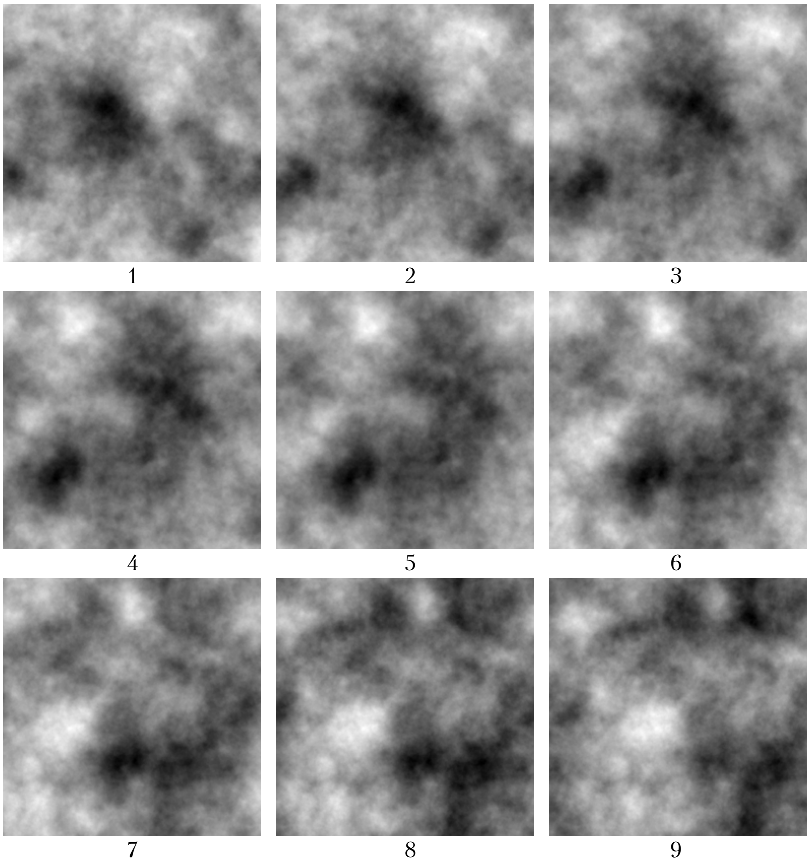

Рис. 2. Эволюция двумерного случайного поля со степенным спектром в движущейся (слева направо) среде

Заключение

На основе модели АРСС предложен простой алгоритм формирования изменяющихся во времени двумерных случайных полей с известным временным спектром. Возможна реализация предложенного метода с использованием параллельных алгоритмов, что делает этот метод еще более эффективным для моделирования динамических задач атмосферной и адаптивной оптики.

1. *Коняев П.А., Тартаковский Е.А., Филимонов Г.А.* Численное моделирование распространения оптических волн с использованием технологий параллельного программирования // Оптика атмосф. и океана. 2011. Т. 24, № 5. С. 359–365.
2. *Коняев П.А.* Компьютерное моделирование адаптивной оптики для атмосферных лазерных систем // Автометрия. 2012. Т. 48, № 2. С. 12–19.
3. *Воронцов А.М., Парамонов П.В.* Генерация бесконечных фазовых экранов для моделирования распространения оптического излучения через турбулентность // Изв. вузов. Сер. Радиофиз. 2006. Т. 49, № 1. С. 21–34.
4. *Дудоров В.В., Колосов В.В., Филимонов Г.А.* Алгоритм формирования бесконечных турбулентных экранов для моделирования долговременных лазерных экспериментов в атмосфере // Изв. Том. политехн. ун-та. 2006. Т. 309, № 8. С. 85–89.
5. *Лукин В.П., Фортес Б.В.* Адаптивное формирование пучков и изображений в атмосфере. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 212 с.
6. *Дженкинс Г., Ваттс Д.* Спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1971. 316 с.

P.A. Konyaev. **An algorithm for computer simulation of time-evolving turbulence in atmospheric and adaptive optics applications.**

A modified spectral-phase algorithm for computer generation of time-evolving random processes and fields has been developed. Use is made of a combined autoregressive moving-average model, described by a discrete difference equation. The implementation of the algorithm is shown to be simple and efficient in simulations of dynamic problems of atmospheric and adaptive optics.