

УДК 629.7.023:539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ НЕКРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ И ВНУТРЕННЕМ ДАВЛЕНИИ

Л. П. Железнов, В. В. Кабанов

Сибирский научно-исследовательский институт авиации им. С. А. Чаплыгина,
630051 Новосибирск

Исследована устойчивость некруговых оболочек с учетом нелинейности деформирования в докритической стадии. Получены явные выражения для перемещений элементов некруговых цилиндрических оболочек как твердых тел, которые использованы при построении функций формы эффективного четырехугольного конечного элемента естественной кривизны. На основе полученного элемента разработан алгоритм решения задач нелинейного деформирования и устойчивости оболочек. Исследована устойчивость цилиндрической оболочки с эллиптическим контуром поперечного сечения. Определено влияние эллиптичности и нелинейности деформирования оболочки в докритической стадии на величину критической нагрузки. Проведено сравнение результатов расчета с известными экспериментальными данными.

1. Перемещения конечных элементов некруговых цилиндрических оболочек как твердых тел. При перемещениях элементов как твердых тел компоненты деформаций равны нулю. Полагая равными нулю линейные компоненты тензора деформаций, изменения кривизн и кручение [1], получаем уравнения

$$\varepsilon_1 = u_x = 0; \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_2 = k_2(v_\beta + w) = 0; \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_3 = v_x + k_2 u_\beta = 0; \quad (1.3)$$

$$\chi_1 = w_{xx} = 0; \quad (1.4)$$

$$\chi_2 = k_2[k_2(v - w_\beta)]_\beta = 0; \quad (1.5)$$

$$\chi_3 = [k_2(v - w_\beta)]_x = 0. \quad (1.6)$$

Здесь u, v, w — тангенциальные перемещения и прогиб; $R, k_2 = R^{-1}$ — радиус и кривизна контура поперечного сечения; β — угол нормали к контуру поперечного сечения с осью b поперечного сечения; x — продольная координата (рис. 1). Индексы x, β обозначают дифференцирование по x, β .

Проинтегрируем уравнения (1.1)–(1.6). Из уравнения (1.5) имеем

$$v = w_\beta + RC_5, \quad C_5 = \text{const}. \quad (1.7)$$

Из (1.2) следует

$$w = -v_\beta. \quad (1.8)$$

С учетом (1.8) из (1.7) получаем уравнение

$$v_{\beta\beta} + v = RC_5. \quad (1.9)$$

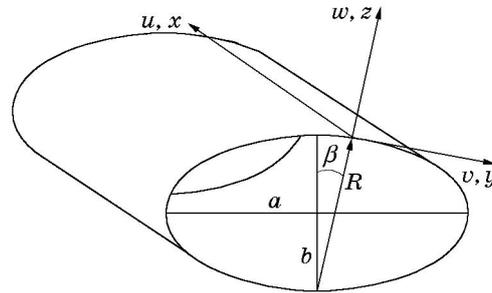


Рис. 1

Решение уравнения (1.9) имеет вид

$$v = C_3c + C_4s + v_n, \quad c = \cos \beta, \quad s = \sin \beta, \quad (1.10)$$

где частное решение v_n неоднородного уравнения находится методом вариации произвольных постоянных C_3, C_4 . Пусть

$$v_n = C_3c + C_4s, \quad (1.11)$$

где C_3, C_4 — функции x и β . Тогда $v_{n\beta} = C_3\beta c - C_3s + C_4\beta s + C_4c$.

Полагая

$$C_3\beta c + C_4\beta s = 0, \quad (1.12)$$

получим

$$v_{n\beta\beta} = -C_3\beta s - C_3c + C_4\beta c - C_4s.$$

При этом уравнение (1.9) принимает вид

$$C_3\beta s - C_4\beta c = -RC_5. \quad (1.13)$$

Из (1.12), (1.13) получаем

$$C_3 = C_5\psi_1 + C_7(x), \quad C_4 = -C_5\psi_2 + C_8(x), \quad \psi_1 = \int Rs d\beta, \quad \psi_2 = - \int Rc d\beta.$$

Из (1.8), (1.10) с учетом (1.11) находим $v = C_3c + C_4s - C_5(\psi_1c + \psi_2s) + C_7c + C_8s$, $w = C_3s - C_4c - C_5(\psi_1s - \psi_2c) + C_7s - C_8c$. Из условия (1.4) следует $C_7 = C_2x$, $C_8 = -C_1x$. Тогда

$$\begin{aligned} v &= C_3c + C_4s - C_5(\psi_1c + \psi_2s) + (C_2c - C_1s)x, \\ w &= C_3s - C_4c - C_5(\psi_1s - \psi_2c) + (C_2s + C_1c)x. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Из уравнения (1.3) находим

$$u = C_1\psi_1 + C_2\psi_2 + C_6. \quad (1.15)$$

Функции (1.14), (1.15) удовлетворяют уравнениям (1.1)–(1.6) и, следовательно, являются перемещениями элементов как твердых тел.

Рассмотрим частные случаи оболочек:

— эллиптическая оболочка: $z^2/b^2 + y^2/a^2 = 1$, $R = a^2b^2/d^3$, $d^2 = a^2s^2 + b^2c^2$, $\psi_1 = -b^2c/d$, $\psi_2 = -a^2s/d$;

— параболическая оболочка: $z^2 = 2py$, $R = p/c^3$, $\psi_1 = p/c^2$, $\psi_2 = ps$;

— гиперболическая оболочка: $z^2/b^2 - y^2/a^2 = 1$, $R = a^2b^2/d^3$, $d^2 = a^2s^2 - b^2c^2$, $\psi_1 = b^2c/d$, $\psi_2 = -a^2s/d$;

— круговая оболочка: $z^2 + y^2 = R^2$, $\psi_1 = -Rc$, $\psi_2 = -Rs$.

2. Конечный элемент и алгоритм решения задачи. Ниже строятся функции формы эффективного четырехугольного конечного элемента естественной кривизны. Ранее подобные элементы конструировались для круговых цилиндрических оболочек и оболочек вращения [2]. Разобьем оболочку линиями главных кривизн на m частей по образующей и на n частей по направляющей. Таким образом, оболочку представим набором $m \times n$ криволинейных прямоугольных конечных элементов. Используя билинейную аппроксимацию тангенциальных перемещений и бикубическую аппроксимацию для прогиба, с учетом (1.14), (1.15) для полных перемещений точек конечного элемента запишем выражения

$$\begin{aligned} u &= a_1xy + a_2x + a_3y + a_4 + a_6\psi_2 + a_{20}\psi_1, \\ v &= a_5xy + a_6xc + a_7y + a_8(\psi_1c + \psi_2s) - a_{20}xs + a_{23}c - a_{24}s, \\ w &= a_9x^3y^3 + a_{10}x^3y^2 + a_{11}x^3y + a_{12}x^3 + a_{13}x^2y^3 + a_{14}x^2y^2 + a_{15}x^2y + a_{16}x^2 + a_{17}xy^3 + \\ &+ a_{18}xy^2 + a_{19}xy + a_{20}xc + a_{21}y^3 + a_{22}y^2 + a_{23}s + a_{24}c + a_6xs + a_8(\psi_1s - \psi_2c). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Систему (2.1) можно записать в матричной форме

$$\tilde{\mathbf{u}} = P\mathbf{a}, \quad (2.2)$$

где $\tilde{\mathbf{u}} = \{u, v, w\}^T$ — вектор перемещений точек срединной поверхности конечного элемента; $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_{24}\}^T$ — вектор неизвестных коэффициентов полиномов a_i ; P — матрица связи размерности 3×24 , элементами которой являются множители при коэффициентах a_i в функциях (2.1). Выразив коэффициенты a_i через узловые неизвестные, получим

$$\mathbf{a} = B^{-1}\bar{\mathbf{u}}, \quad (2.3)$$

где $\bar{\mathbf{u}} = \{u_i, v_i, w_i, \vartheta_{1i}, \vartheta_{2i}, w_{xyi}, u_j, v_j, w_j, \vartheta_{1j}, \vartheta_{2j}, w_{xyj}, u_k, \dots, w_{xyk}, u_n, \dots, w_{xyn}\}^T$ — вектор узловых перемещений, углов поворотов и смешанных производных прогиба; B — матрица размерности 24×24 , ненулевые элементы которой имеют вид

$$\begin{aligned} b_{1,j} &= p_{1,j}, & b_{2,j} &= p_{2,j}, & b_{3,j} &= p_{3,j}, & b_{4,j} &= (p_{3,j})_x, & b_{5,j} &= (p_{2,j} - (p_{3,j})_y)/R, \\ b_{6,j} &= (p_{3,j})_{xy} \quad (x = -a_1, y = -b_1), & b_{7,j} &= p_{1,j}, & b_{8,j} &= p_{2,j}, & b_{9,j} &= p_{3,j}, & b_{10,j} &= (p_{3,j})_x, \\ b_{11,j} &= (p_{2,j} - (p_{3,j})_y)/R, & b_{12,j} &= (p_{3,j})_{xy} \quad (x = -a_1, y = b_1), & b_{13,j} &= p_{1,j}, & b_{14,j} &= p_{2,j}, \\ b_{15,j} &= p_{3,j}, & b_{16,j} &= (p_{3,j})_x, & b_{17,j} &= (p_{2,j} - (p_{3,j})_y)/R, & b_{18,j} &= (p_{3,j})_{xy} \quad (x = a_1, y = -b_1), \\ b_{19,j} &= p_{1,j}, & b_{20,j} &= p_{2,j}, & b_{21,j} &= p_{3,j}, & b_{22,j} &= (p_{3,j})_x, & b_{23,j} &= (p_{2,j} - (p_{3,j})_y)/R, \\ b_{24,j} &= (p_{3,j})_{xy} \quad (x = a_1, y = b_1), & j &= 1, \dots, 24, & a_1 &= L/(2m), & b_1 &= l/(2n) \end{aligned}$$

(L, l — характерные размеры оболочки вдоль образующей и направляющей).

Подставив (2.3) в (2.2), получим зависимость перемещений точек элемента от узловых неизвестных

$$\tilde{\mathbf{u}} = PB^{-1}\bar{\mathbf{u}}.$$

В каждом узле имеется 6 неизвестных, следовательно, конечный элемент имеет 24 степени свободы. Будем определять узловые неизвестные из вариационного уравнения Лагранжа $\delta\Pi = 0$, где Π — потенциальная энергия оболочки. При записи выражения для потенциальной энергии используем нелинейные соотношения между деформациями и перемещениями [1]. Уравнение $\delta\Pi = 0$ приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно узловых неизвестных. Система решается методом Ньютона — Канторовича. При этом уравнения для конечного элемента принимают вид [3]

$$H\delta\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{q}_e - \mathbf{G}, \quad \bar{\mathbf{u}}^{n+1} = \bar{\mathbf{u}}^n + \delta\bar{\mathbf{u}},$$

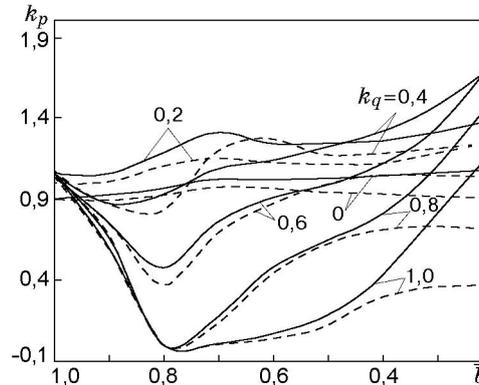


Рис. 2

где H — матрица Гессе конечного элемента, которая определяется из второй вариации потенциальной энергии деформации; \mathbf{q}_e — вектор узловой нагрузки; \mathbf{G} — градиент потенциальной энергии.

Система уравнений для всей оболочки строится стандартным способом [4]. Система линейных алгебраических уравнений на каждом шаге итерационного процесса решается с использованием разложения матрицы Гессе $H = L^T D L$ [3], где L — треугольная матрица с единичной диагональю; D — диагональная матрица. Устойчивость оболочки проверяется по условию положительности второй вариации полной потенциальной энергии оболочки, что эквивалентно условию положительной определенности матрицы Гессе, что в свою очередь возможно при положительности всех элементов матрицы D . Следовательно, в процессе исследования достаточно проверять знаки элементов матрицы D . Появление отрицательных элементов означает переход оболочки из устойчивого состояния в неустойчивое. После определения узловых неизвестных находятся перемещения и усилия.

3. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости эллиптической оболочки. Рассмотрим задачу нелинейного деформирования и устойчивости свободно опертой эллиптической цилиндрической оболочки при действии однородного осевого сжатия погонными усилиями N и внутреннего бокового давления p . Длина оболочки $L = 2800$ мм, толщина $h = 3,3$ мм. Радиус оболочки $R_0 = 1000$ мм определяется как радиус окружности с периметром P , таким же как у эллипса:

$$R_0 = \frac{P}{2\pi} = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left\{ 1 + \left[\left(\frac{b}{a} \right)^2 - 1 \right] \sin^2 \psi \right\}^{1/2} d\psi = \frac{2a}{\pi} \bar{E} \left(\frac{\pi}{2}, \frac{b}{a} \right).$$

Здесь $\bar{E}(\pi/2, b/a)$ — полный эллиптический интеграл второго рода; a, b — большая и малая оси поперечного сечения оболочки. Оболочка выполнена из материала с модулем упругости $E = 7 \cdot 10^4$ МПа, коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$. В работе [5] получена эмпирическая формула критического внутреннего давления

$$p_0 = \bar{p} E \gamma^2,$$

где $\bar{p} = (24,1\mu^{-1} + 130,2\mu^{-3} + 276,3\mu^{-5})\lambda^{-2}\gamma^{0,6}$; $\lambda = L/R_0$; $\gamma = h/R_0$; $\mu = a/b$.

На рис. 2 представлены зависимости параметра критического усилия сжатия $k_p = N_{кр}/N_b$ ($N_b = Eh^2/(R_b\sqrt{3(1-\nu^2)})$, $R_b = a^2/b$) от параметра эллиптичности $\bar{b} = b/a$ для линейного и нелинейного исходных напряженно-деформированных состояний (сплошные и штриховые кривые соответственно) при различных значениях параметра критического

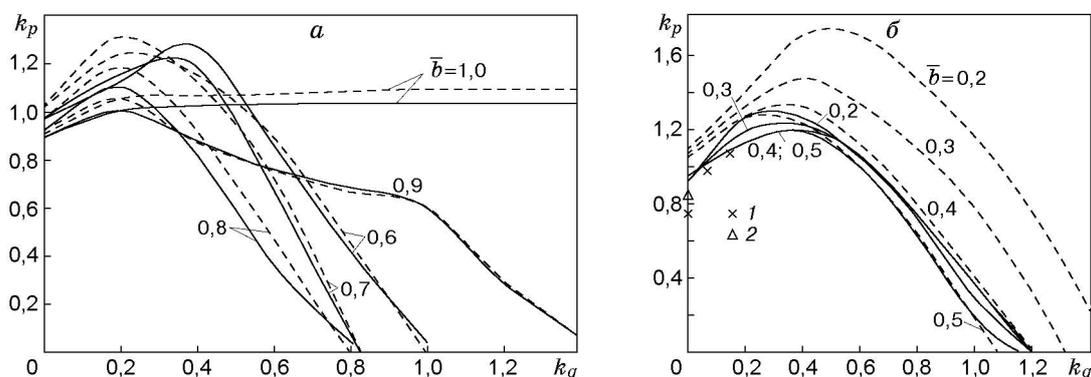


Рис. 3

внутреннего давления $k_q = p_{кр}/p_0$. Из рис. 2 следует, что с уменьшением \bar{b} параметр критической нагрузки сначала уменьшается (более резко при больших значениях k_q), затем увеличивается. При $k_q < 0,4$ влияние параметра \bar{b} незначительно, различие между соответствующими кривыми порядка 20 %. С уменьшением \bar{b} критическая нагрузка осевого сжатия резко возрастает для линейного решения при $k_q > 0,4$, а в случае нелинейного исходного напряженно-деформированного состояния критическая нагрузка стабилизируется при $\bar{b} < 0,4$. Кривые, соответствующие нелинейному решению, практически при всех значениях k_q и во всем диапазоне значений \bar{b} расположены ниже соответствующих кривых для линейного решения. Исключение составляют оболочки, для которых $0,5 < \bar{b} < 0,8$, $k_q = 0,4$. Влияние нелинейности более существенно при $\bar{b} < 0,4$.

На рис. 3 представлены зависимости k_p от k_q в случае линейного и нелинейного исходных напряженно-деформированных состояний (сплошные и штриховые кривые соответственно) для различных значений \bar{b} . Из рис. 3 следует, что с ростом k_q критическая нагрузка сжатия вначале немного увеличивается, как правило, достигая максимума при $k_q = 0,2$, затем уменьшается. Влияние нелинейности исходного напряженно-деформированного состояния с увеличением k_q усиливается. Различие между соответствующими кривыми составляет 5–60 %. На рис. 3, б точки 1, 2 соответствуют экспериментальным данным, взятым из работ [6, 7] ($\bar{b} = 0,5$).

Результаты расчетов показывают, что напряженно-деформированное состояние и форма выпучивания оболочки существенно неоднородны по обеим координатам поверхности оболочек. Ромбовидная форма выпучивания наблюдается в случае преобладания осевого сжатия. При малых осевых усилиях имеет место характерное волнообразование в виде косых вмятин. При других комбинациях внутреннего давления и осевых усилий наблюдается смешанная форма выпучивания оболочки. На рис. 4 представлена форма выпучивания оболочки при потере устойчивости для $\bar{b} = 0,6$, $k_p = 0,2$, $k_q = 0,9$.

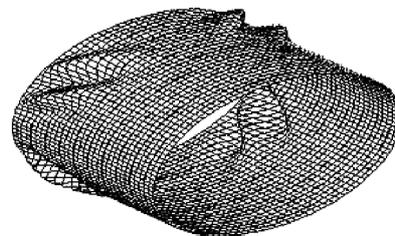


Рис. 4

Приведенные выше результаты исследований получены на сетке конечных элементов 30×30 , что обеспечивает погрешность решения не более 5 %. При этом рассматривалась 1/8 оболочки, на границе разреза которой ставились условия симметрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978.
2. Голованов А. И., Корнишин М. С. Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек. Казань: Казан. физ.-техн. ин-т АН СССР, 1989.
3. Астрахарчик С. В., Железнов Л. П., Кабанов В. В. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости оболочек и панелей ненулевой гауссовой кривизны // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1994. № 2. С. 102–108.
4. Кабанов В. В., Астрахарчик С. В. Нелинейное деформирование и устойчивость подкрепленных цилиндрических оболочек при изгибе // Пространственные конструкции в Красноярском крае: Сб. науч. тр. Красноярск: Краснояр. инж.-строит. ин-т, 1985. С. 75–83.
5. Коноплев Ю. Г., Копп А. В. Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрических оболочек эллиптического сечения // Исследования по теории пластин и оболочек: Сб. науч. тр. Казань: Казан. ун-т, 1980. Вып. 15. С. 31–38.
6. Андреев Л. В., Кучеренко В. М., Павленко И. Д. Устойчивость эллиптических оболочек, нагруженных осевой силой и поперечным давлением // Гидромеханика и теория упругости. 1982. Вып. 29. С. 146–150.
7. Tennyson R. C., Booton M., Caswell R. D. Buckling of imperfect elliptical shells under axial compression // AIAA J. 1971. V. 9, N 2. P. 250–255.

*Поступила в редакцию 27/XI 2001 г.,
в окончательном варианте — 28/I 2002 г.*
