воды при 19°C) и $g = 981$ см·с$^{-2}$ (ускорение силы тяжести). Отсюда можно определить градиент плотности, возникающий в воде в результате микроконвекции поверхностной пленки: $-\partial\rho/\partial z = N(z)^2\rho/g \cong 4\cdot10^{-5}$ г·см$^{-2}$. Эта величина хорошо совпадает с результатами определения градиента плотности, полученными из интерференционных измерений [4].

Отсюда следует, что такой градиент на глубине ~ 3 см (кривые *3*, фиг. 2) обусловлен разницей в плотности воды относительно поверхности $\Delta\rho \simeq \Delta z\, 4\cdot10^{-5} = 1{,}2\cdot10^{-4}$ г·см$^{-3}$. По этой разнице плотности из уравнения состояния воды можно определить разницу между температурой поверхностной пленки и слоем воды на глубине в 3 см, которая оказывается равной 0,6—0,7°. Это значение, рассчитанное из флуориметрических измерений, хорошо совпадает со значением разницы температуры, полученной в лабораторных и натурных исследованиях путем прямых экспериментальных измерений [2—6].

На основании полученных результатов отметим следующее.

Молекулярные слои флуоресцентного красителя, нанесенные на поверхность воды, являются чувствительным зондом для выявления гидрофизических приповерхностных процессов.

Капли воды при проникновении через поверхностную пленку воды в ее объем в отсутствие вертикального импульса движения формируют кольцевые или тороидальные вихри.

Скорость микроконвективных потоков с поверхности воды является неравномерной и составляет в среднем величину $\sim10^{-3}$ см·с$^{-1}$ при $\mathrm{Re} = 10^{-2}$—10^{-1} и $\mathrm{Fr} = 10^{-7}$—10^{-8}.

Процесс проникновения микроконвективных потоков в глубину до $z = 3$ см аппроксимируется степенной функцией $z = 0{,}25(t-t_p)^{1{,}05}$ мм, где $t_p = 30$—35 с. Без учета времени релаксации эта аппроксимация имеет вид $z = 294\cdot t^{0{,}059}-365$ мм.

Микроконвективные потоки стратифицируют приповерхностные слои воды, так что частота плавучести, измеренная экспериментально, на глубине $z = 3$ см равна 0,2 с$^{-1}$, что соответствует градиенту плотности $\sim4\cdot10^{-5}$ г·см$^{-2}$ и перепаду температуры относительно поверхности 0,6—0,7°.

Поступила 5 XI 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Зубов Н. Н.** Замечательный случай образования льда.— Метеорологический вестник, 1934, № 10—12.
2. **Хадсон Р.** Инфракрасные системы. М.: Мир, 1972.
3. **Конвективное** перемешивание в море. М.: Изд-во МГУ, 1977.
4. **Гинзбург А. И., Федоров К. Н.** О вкладах солености и температуры в развитие конвекции при испарении морской воды.— В сб.: Исследование изменчивости физических процессов в океане. М.: изд. Ин-та океанологии АН СССР, 1978.
5. **McAlister E. D., McLeish W.** Heat transfer in the top millimeter of the ocean.— J. Geophys. Res., 1969, vol. 74, N 13.
6. **Бортковский Р. С., Бютнер Э. К., Малевский-Малевич С. П., Преображенский Л. Ю.** Процессы переноса вблизи поверхности раздела океан — атмосфера. Л.: Гидрометеоиздат, 1974.

УДК 532.517.4 + 532.59

К ТЕОРИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН С ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ

А. Г. Сазонтов

(Горький)

1. Одной из актуальных задач динамики атмосферы и океана является изучение воздействия вихревой гидродинамической турбулентности на распространение волн различных типов (поверхностное волнение, звук, внутренние волны и т. п.), при этом собственно гидродинамическую турбулентность необходимо отделять от вихревых движений, сопутствующих волнам [1, 2].

К настоящему времени довольно детально проанализированы многочисленные аспекты взаимодействия звука с турбулентностью (см. [3—5] и цитируемую там литературу). В данной работе продолжается изучение проблемы волновихревой турбулентности применительно к задаче о взаимодействии гравитационных волн с вихрями. Следует подчеркнуть, что в отличие от [3—5] рассматриваемая задача обладает рядом специфических особенностей, связанных с тем, что поверхностные волны на глубокой воде обладают дисперсией — фазовая скорость $v_ф$ является функцией длины волны $\lambda : v_ф = \sqrt{g\bar{\lambda}}$ (g — ускорение свободного падения, $\bar{\lambda} = \lambda/2\pi$).

Ниже на основе вычисленных матричных коэффициентов взаимодействия найден декремент затухания гравитационных волн, распространяющихся на поверхности турбулентной жидкости. Получены оценки для характерного времени корреляции фаз и изотропизации волнового поля в процессах упругого рассеяния. В диффузионном приближении рассмотрено влияние неупругости рассеяния на эволюцию по частотам изотропных волновых пакетов. Выяснены границы применимости кинетического уравнения для описания взаимодействия гравитационных волн между собой в турбулентной среде. Все эти вопросы изучались в рамках единой формальной схемы — диаграммной техники Уайльда [6].

2. Рассмотрим движение несжимаемой жидкости со свободной поверхностью бесконечной глубины. Выберем систему координат с осью z, направленной вертикально вверх. Пусть форма поверхности задается функцией $z = \eta(\mathbf{r}_\perp, t)$ с нормалью $\mathbf{n} = [1 + (\nabla_\perp\eta)^2]^{-1/2}\times(-\nabla_\perp\eta, 1)$.

На свободной поверхности выполняется кинематическое граничное условие

$$\partial\eta/\partial t + (\mathbf{u}\nabla_\perp)\eta = u_z, \tag{2.1}$$

связывающее величину η со скоростью жидкости $\mathbf{u}$, которая подчиняется уравнениям

$$\partial\mathbf{u}/\partial t + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = -(1/\rho)\nabla p + \mathbf{g}; \tag{2.2}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0. \tag{2.3}$$

Здесь p — давление; ρ — плотность; g — ускорение силы тяжести. Система уравнений (2.1)—(2.3) замыкается динамическим граничным условием на свободной поверхности *

$$p|_{z=\eta} = 0 \tag{2.4}$$

(в котором за начало отсчета принято постоянное атмосферное давление) и условием ограниченности полей при $z \to -\infty$.

В такой системе в общем случае существует два типа движений: вихревые движения (гидродинамическая турбулентность) и потенциальные движения (поверхностное волнение). Поэтому поле скорости удобно разделить на две части:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^l + \mathbf{u}^t,\ \operatorname{rot}\mathbf{u}^l = 0,\ \operatorname{div}\mathbf{u}^t = 0, \tag{2.5}$$

причем $\mathbf{u}^l$ можно представить в виде $\mathbf{u}^l = \nabla\varphi$.

Подставляя разложение (2.5) в систему (2.2), (2.3), соответственно для вихревой и потенциальной компоненты получим следующие уравнения:

$$\partial\mathbf{u}^t/\partial t + (\mathbf{u}^t\nabla)\mathbf{u}^t = -\nabla H - (\mathbf{u}^t\nabla)\nabla\varphi - (\nabla\varphi\nabla)\mathbf{u}^t; \tag{2.6}$$

$$H = \partial\varphi/\partial t + p/\rho + gz + (1/2)(\nabla\varphi)^2; \tag{2.7}$$

$$\Delta\varphi = 0,\ -\infty < z < \eta,\ \varphi \to 0 \text{ при } z \to -\infty. \tag{2.8}$$

Исключая давление из соотношения (2.7) и подставляя соответствующее выражение в динамическое граничное условие (2.4), найдем

$$\partial\varphi/\partial t + g\eta = -(1/2)(\nabla\varphi)^2 + H|_{z=\eta}. \tag{2.9}$$

Удобно ввести в качестве определяющей переменной потенциал скорости на свободной поверхности $\psi(\mathbf{r}_\perp, t) = \varphi(\mathbf{r}_\perp, \eta(\mathbf{r}_\perp, t), t)$, при этом для чисто потенциальных движений, как показано в [7], величины $\psi(\mathbf{r}_\perp, t)$ и $\eta(\mathbf{r}_\perp, t)$ образуют каноническую пару **. Для $\psi(\mathbf{r}_\perp, t)$ из (2.9) с учетом (2.1) следует

* При этом здесь и ниже не учитывается влияние поверхностного натяжения.

** В работе [8] построены гамильтоновы переменные, описывающие и непотенциальные движения свободной поверхности.

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + g\eta = -\frac{1}{2}(\nabla_\perp\varphi)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 - \tag{2.10}$$

$$-(\mathbf{u}\nabla_\perp)\eta\frac{\partial\varphi}{\partial z} + u_z^t\frac{\partial\varphi}{\partial z} + H|_{z=\eta}.$$

Для нахождения функции H применим операцию div к уравнению (2.6), при этом, используя условие $\operatorname{div}\mathbf{u}^t = 0$, для H получим

$$\Delta H = -\operatorname{div}\mathbf{R} \equiv -\chi, \tag{2.11}$$

где $\mathbf{R} = (\mathbf{u}^t\nabla)\mathbf{u}^t + (\nabla\varphi\nabla)\mathbf{u}^t + (\mathbf{u}^t\nabla)\nabla\varphi$.

Перейдем в (2.11) к фурье-представлению по поперечным координатам:

$$H(\mathbf{r}_\perp, z, t) = \int H_\mathbf{k}(z,t)\,e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_\perp}d\mathbf{k},\ \chi(\mathbf{r}_\perp, z, t) = \int \chi_\mathbf{k}(z,t)\,e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_\perp}d\mathbf{k}.$$

Имеем

$$(\partial^2/\partial z^2 - k^2)H_\mathbf{k} = -\chi_\mathbf{k}. \tag{2.12}$$

Общее решение неоднородного уравнения (2.12) записывается следующим образом:

$$H_\mathbf{k}(z,t) = C_1e^{|\mathbf{k}|z} + C_2e^{-|\mathbf{k}|z} + \frac{1}{2|\mathbf{k}|}\int_z^0 dz_1\chi_\mathbf{k}(z_1,t)\left[e^{|\mathbf{k}|(z-z_1)} - e^{-|\mathbf{k}|(z-z_1)}\right]. \tag{2.13}$$

При $z\to-\infty$

$$H_\mathbf{k}(z,t) \to e^{-|\mathbf{k}|z}\left\{C_2 - \frac{1}{2|\mathbf{k}|}\int_{-\infty}^0 dz_1\chi_\mathbf{k}(z_1,t)\,e^{|\mathbf{k}|z_1}\right\} +$$

$$+\frac{1}{2|\mathbf{k}|}\int_z^0 dz_1\chi_\mathbf{k}(z_1,t)\,e^{|\mathbf{k}|(z-z_1)}$$

и условие ограниченности приводит к соотношению

$$C_2 = \frac{1}{2|\mathbf{k}|}\int_{-\infty}^0 dz_1\chi_\mathbf{k}(z_1,t)\,e^{|\mathbf{k}|z_1}. \tag{2.14}$$

Используя (2.14), можно переписать решение (2.13) в виде

$$H_\mathbf{k}(z,t) = C_1e^{|\mathbf{k}|z} + \frac{1}{2|\mathbf{k}|}\int_z^0 dz_1\chi_\mathbf{k}(z_1,t)\,e^{|\mathbf{k}|(z-z_1)} +$$

$$+\frac{1}{2|\mathbf{k}|}\int_{-\infty}^z dz_1\chi_\mathbf{k}(z_1,t)\,e^{-|\mathbf{k}|(z-z_1)}.$$

Для определения константы C_1 воспользуемся вертикальной компонентой уравнения (2.6) при $z = 0$:

$$\left.\frac{\partial H_\mathbf{k}}{\partial z}\right|_{z=0} = |\mathbf{k}|C_1 - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 dz_1\chi_\mathbf{k}(z_1,t)\,e^{|\mathbf{k}|z_1} = \left[-\left(\frac{\partial u_z^t}{\partial t} + R_z\right)_\mathbf{k}\right]_{z=0} \equiv -M_\mathbf{k}.$$

Тогда окончательно для $H_\mathbf{k}$ получим выражение

$$H_\mathbf{k}(z,t) = \frac{1}{2|\mathbf{k}|}\int_z^0 dz_1\chi_\mathbf{k}(z_1,t)\left[e^{|\mathbf{k}|(z-z_1)} - e^{-|\mathbf{k}|(z-z_1)}\right] + \tag{2.15}$$

$$+\frac{1}{|\mathbf{k}|}\cosh|\mathbf{k}|z\int_{-\infty}^0 dz_1\chi_\mathbf{k}(z_1,t)\,e^{|\mathbf{k}|z_1} + \frac{M_\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}e^{|\mathbf{k}|z}.$$

Уравнения (2.1), (2.6), (2.8), (2.10) совместно с (2.15) представляют исходную систему для описания взаимодействия гравитационных волн с гидродинамической турбулентностью. Прежде чем вычислить соответствующие матричные коэффициенты связи, сделаем следующие предположения. Во-первых, будем предполагать, что характерный вертикальный масштаб турбулентности L_z^t много больше длины поверхностного волнения $\lambda : L_z^t \gg \lambda$. Во-вторых, вблизи поверхности будем считать выполненным неравенство $|\mathbf{u}^t| \ll v_\Phi$, которое, как правило, наблюдается в естественных океанических условиях (см., например, [9]). Как известно [10, 11], это предположение обеспечивает слабость взаимодействия между волнами и турбулентностью.

Перейдем в уравнениях (2.1), (2.10) в k-представление:

$$\psi_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \psi(\mathbf{r}_\perp, t)\, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_\perp} d\mathbf{r}_\perp,\quad \eta_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \eta(\mathbf{r}_\perp, t)\, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_\perp} d\mathbf{r}_\perp.$$

Стандартным образом [7] введем комплексные амплитуды нормальных колебаний $a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}}^*$:

$$\eta_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{|\mathbf{k}|}{2\omega_{\mathbf{k}}}}\,(a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^*),\quad \psi_{\mathbf{k}} = -i\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2|\mathbf{k}|}}\,(a_{\mathbf{k}} - a_{-\mathbf{k}}^*),$$

где $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{g|\mathbf{k}|}$ — закон дисперсии гравитационных волн, при этом уравнение движения для новых переменных имеет вид

$$\text{(2.16)}\qquad \frac{\partial a_{\mathbf{k}}}{\partial t} + i\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} = -i\int \left[V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2) + \right.$$
$$\left. + 2u_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2}^*\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\right] d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 -$$
$$- i\int V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_1}^* a_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_3}\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)\, d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 -$$
$$- i\int \left\{S_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\alpha}\left[a_{\mathbf{k}_1} u_{\mathbf{k}_2}^{\alpha}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2) + a_{\mathbf{k}_1}^* u_{\mathbf{k}_2}^{\alpha}\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\right] + \right.$$
$$\left. + W_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta} u_{\mathbf{k}_1}^{*\alpha} u_{\mathbf{k}_2}^{*\beta}\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\right\} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2.$$

При переходе от (2.1), (2.10) к (2.16) использована связь между $\psi_{\mathbf{k}}$ и $\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \varphi(\mathbf{r}_\perp, 0, t)\, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_\perp} d\mathbf{r}_\perp$:

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \psi_{\mathbf{k}} + \int |\mathbf{k}_1|\, \psi_{\mathbf{k}_1}\eta_{\mathbf{k}_2}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\, d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 - \frac{1}{2}\int |\mathbf{k}_1|\,[\,|\mathbf{k} -$$
$$- \mathbf{k}_2| + |\mathbf{k}-\mathbf{k}_3| - |\mathbf{k}|\,]\, \psi_{\mathbf{k}_1}\eta_{\mathbf{k}_2}\eta_{\mathbf{k}_3}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)\, d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3$$

с точностью до членов $\sim a_{\mathbf{k}}^3$. Малым параметром разложения служит величина $\xi = \sqrt{\frac{E}{\rho(\omega_{\mathbf{k}}/k)^2}} \ll 1$, где E — энергия поверхностного волнения. Для горизонтальных компонент турбулентного поля скорости $u_{\mathbf{k}}^{\alpha}(t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int u_{\alpha}^t(\mathbf{r}_\perp, \eta(\mathbf{r}_\perp, t), t)\, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_\perp} d\mathbf{r}_\perp$ $(\alpha = x, y)$ из (2.6) с учетом (2.15) можно получить следующие уравнения в k-представлении*:

$$\text{(2.17)}\qquad \frac{\partial u_{\mathbf{k}}^{\alpha}}{\partial t} = -\frac{i}{2} P_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta\gamma}\int u_{\mathbf{k}_1}^{*\beta} u_{\mathbf{k}_2}^{*\gamma}\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\, d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 - i\int Q_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\alpha\beta} \times$$
$$\times \left(a_{\mathbf{k}_1} - a_{-\mathbf{k}_1}^*\right) u_{\mathbf{k}_2}^{\beta}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\, d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2.$$

---

* Вертикальная компонента турбулентного поля скорости связана с горизонтальными соотношением, вытекающим из условия несжимаемости: $u_z^t(\mathbf{r}_\perp, z, t) = -\int_{-\infty}^{z} \operatorname{div}_\perp \mathbf{u}_\perp^t(\mathbf{r}_\perp, z', t)\, dz'$.

В уравнениях (2.16), (2.17) не выписаны несущественные для дальнейшего исследования слагаемые типа $S^n a^{n+1} u^\alpha$, $Q^n a^{n+1} u^\alpha$, $V^n a^{n+3}$, малые по параметру ξ^n.

Коэффициент $P_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta\gamma}$ описывает взаимодействие турбулентных пульсаций и определяется следующим образом:

$$P_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta\gamma} = k_\beta \Delta_{\mathbf{k}}^{\alpha\gamma} + k_\gamma \Delta_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta},\ \Delta_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}.$$

Матричные коэффициенты $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}, U_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}$ и $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}$, отвечающие за процессы взаимодействия поверхностных волн между собой, найдены в [7]. Нами вычислены коэффициенты $S_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^\alpha, W_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta}$ и $Q_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\alpha\beta}$, описывающие взаимодействие поверхностного волнения с «горизонтальной» гидродинамической турбулентностью. Их явные выражения при сделанных выше предположениях имеют вид

$$S_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{|\mathbf{k}||\mathbf{k}_1|}{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}_1}}}\left[\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{|\mathbf{k}|}k_\alpha + \frac{\omega_{\mathbf{k}_1}}{|\mathbf{k}_1|}k_{1\alpha}\right],\ W_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{|\mathbf{k}|}{2\omega_{\mathbf{k}}}}\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2},$$

$$Q_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}_1}}{2|\mathbf{k}_1|}}\left[(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2)\,\delta_{\alpha\beta} - k_{1\beta}k_{2\alpha}\right],$$

при этом S описывает рассеяние поверхностного волнения, а W и Q — процессы диссипации и генерации волнения турбулентностью.

3. Перейдем к статистическому описанию нелинейных полей $a_{\mathbf{k}}$ и $u_{\mathbf{k}}^\alpha$. Для этого в $\mathbf{k}$ — ω-представлении введем следующие усредненные характеристики — парные корреляторы:

$$\langle u_{\mathbf{k}\omega}^\alpha u_{\mathbf{k}'\omega'}^{*\beta}\rangle = J_{\mathbf{k}\omega}^{\alpha\beta}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\,\delta(\omega-\omega'), \tag{3.1}$$

$$\langle a_{\mathbf{k}\omega} a_{\mathbf{k}'\omega'}^*\rangle = n_{\mathbf{k}\omega}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\,\delta(\omega-\omega')$$

и функции Грина

$$\left\langle \frac{\delta u_{\mathbf{k}\omega}^\alpha}{\delta F_{\mathbf{k}'\omega'}^{*\beta}}\right\rangle = G_{\mathbf{k}\omega}^{\alpha\beta}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\,\delta(\omega-\omega'),$$

$$\left\langle \frac{\delta a_{\mathbf{k}\omega}}{\delta f_{\mathbf{k}'\omega'}^{*}}\right\rangle = g_{\mathbf{k}\omega}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\,\delta(\omega-\omega').$$

Вспомогательные величины $G_{\mathbf{k}\omega}^{\alpha\beta}$ и $g_{\mathbf{k}\omega}$ описывают реакцию вихревой и потенциальной компонент поля скорости на внешние воздействия $\mathbf{F}_{\mathbf{k}\omega}^{\alpha\beta}$ и $f_{\mathbf{k}\omega}$, вводимые в правые части уравнений движения (2.16), (2.17).

В силу однородности и изотропности турбулентности в горизонтальной плоскости спектральные тензоры $J_{\mathbf{k}\omega}^{\alpha\beta}$ и $G_{\mathbf{k}\omega}^{\alpha\beta}$ могут быть представлены в виде

$$J_{\mathbf{k}\omega}^{\alpha\beta} = J_{\mathbf{k}\omega}\Delta_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta},\ G_{\mathbf{k}\omega}^{\alpha\beta} = G_{\mathbf{k}\omega}\Delta_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta}.$$

Стандартным образом [6] для средних характеристик (3.1) можно получить систему уравнений Дайсона

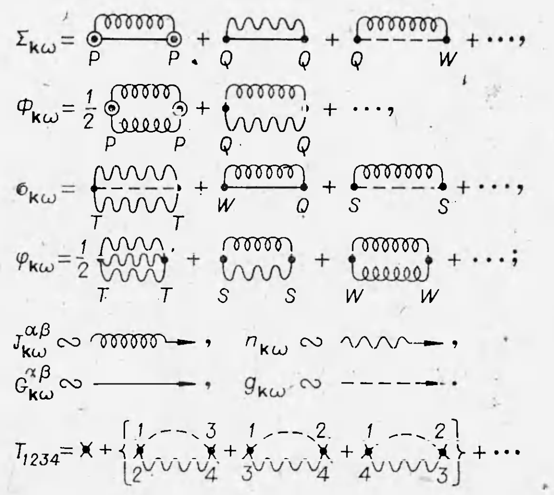
$$J_{\mathbf{k}\omega} = |G_{\mathbf{k}\omega}|^2\,\Phi_{\mathbf{k}\omega},\ n_{\mathbf{k}\omega} = |g_{\mathbf{k}\omega}|^2\widehat{\varphi}_{\mathbf{k}\omega},$$
$$G_{\mathbf{k}\omega} = (\omega - \Sigma_{\mathbf{k}\omega})^{-1},\ g_{\mathbf{k}\omega} = (\omega - \omega_{\mathbf{k}} - \sigma_{\mathbf{k}\omega})^{-1}.$$

На фигуре представлены первые диаграммы для $\Sigma_{\mathbf{k}\omega}, \Phi_{\mathbf{k}\omega}$ и $\sigma_{\mathbf{k}\omega}$, $\widehat{\varphi}_{\mathbf{k}\omega}$, а также приведено графическое обозначение соответствующих парных корреляторов и функций Грина.

В диаграммах для волновой турбулентности фигурирует вершина $T_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}$, определяемая следующим образом*:

---

* Для гравитационных волн в силу нераспадности закона дисперсии трехволновые взаимодействия не являются резонансными; эти процессы дают вклад в четырехволновые матричные элементы [12].



$$
T_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} = V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} - 2\,\frac{U_{-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}U_{-\mathbf{k}-\mathbf{k}_1\mathbf{k}\mathbf{k}_1}}{\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}} -
$$

$$
- 2\,\frac{V_{\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}V_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1\mathbf{k}\mathbf{k}_1}}{\omega_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}_1}} - 2\,\frac{V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_2\mathbf{k}-\mathbf{k}_2}V_{\mathbf{k}_3\mathbf{k}_1\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1}}{\omega_{\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}_3}} -
$$

$$
- 2\,\frac{V_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_3\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3}V_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}\mathbf{k}_2-\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}_2}} - 2\,\frac{V_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}V_{\mathbf{k}_3\mathbf{k}_1\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1}}{\omega_{\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}_3}} -
$$

$$
- 2\,\frac{V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_3\mathbf{k}-\mathbf{k}_3}V_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}}{\omega_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}_2}}.
$$

Основой для статистического описания волновых движений служит кинетическое уравнение, при этом существенно используется малость нелинейности, наличие дисперсии и предположение о случайности фаз взаимодействующих волн. В диаграммной технике роль кинетического уравнения играет соотношение [13]

$$
l_{\mathbf{k}\omega} = \operatorname{Im}\left(\sigma_{\mathbf{k}\omega}n_{\mathbf{k}\omega} + \widehat{\varphi}_{\mathbf{k}\omega}g^{*}_{\mathbf{k}\omega}\right) = 0,
$$

эквивалентное уравнению Дайсона для $n_{\mathbf{k}\omega}$. В случае слабой турбулентности можно ограничиться диаграммами второго порядка по вершинам $T_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}$. Тогда условие $l_{\mathbf{k}} \equiv \int l_{\mathbf{k}\omega}d\omega = 0$ приводит к стационарному кинетическому уравнению

$$
0 = -\Gamma_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}} + \pi\widehat{\varphi}_{\mathbf{k}},
$$

где

$$
\Gamma_{\mathbf{k}} = -\operatorname{Im}\sigma_{\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}}},\ \widehat{\varphi}_{\mathbf{k}} = \widehat{\varphi}_{\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}}}.
$$

Для гидродинамической турбулентности можно использовать аналогичное уравнение

$$
L_{\mathbf{k}\omega} = \operatorname{Im}\left(\Sigma_{\mathbf{k}\omega}J_{\mathbf{k}\omega} + \Phi_{\mathbf{k}\omega}G^{*}_{\mathbf{k}\omega}\right) = 0,
$$

при этом предположение о неперенормируемости вершины $P^{\alpha\beta\gamma}_{\mathbf{k}\cdots}$ соответствует модели прямых взаимодействий [14]. Однако такое приближение является неудовлетворительным для описания свойств турбулентности в инерционном интервале. Это связано с тем, что в исходных диаграммных рядах для $\Sigma_{\mathbf{k}\omega}$ и $\Phi_{\mathbf{k}\omega}$ содержатся расходимости интегралов в области малых $\mathbf{k}$, которые физически обусловлены эффектом переноса мелкомасштабных неоднородностей энергосодержащими вихрями. Поэтому для описания взаимодействия «поверхностных» гидродинамических пульсаций, следуя [15], необходимо пользоваться соотношением

(3.2) $$\tilde{L}_{\mathbf{k}\omega} = \operatorname{Im}\left(\tilde{\Sigma}_{\mathbf{k}\omega}\tilde{J}_{\mathbf{k}\omega} + \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}\omega}\,\tilde{G}^{*}_{\mathbf{k}\omega}\right) = 0,$$

в котором произведена перенормировка, исключающая кинематический эффект переноса. Входящие в уравнение (3.2) характеристики связаны с исходными следующим образом:

$$L_{\mathbf{k}\omega} = \langle \tilde{L}_{\mathbf{k}\omega-\mathbf{ku}}\rangle_{\mathbf{u}},\ J_{\mathbf{k}\omega} = \langle \tilde{J}_{\mathbf{k}\omega-\mathbf{ku}}\rangle_{\mathbf{u}},\quad G_{\mathbf{k}\omega} = \langle \tilde{G}_{\mathbf{k}\omega-\mathbf{ku}}\rangle_{\mathbf{u}},\quad \Sigma_{\mathbf{k}\omega} = \langle \tilde{\Sigma}_{\mathbf{k}\omega-\mathbf{ku}}\rangle_{\mathbf{u}},$$
$$\Phi_{\mathbf{k}\omega} = \langle \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}\omega-\mathbf{ku}}\rangle_{\mathbf{u}},$$

где под $\langle\ldots\rangle_{\mathbf{u}}$ понимается усреднение по случайному полю скорости в произвольной точке $\mathbf{r}$, t с помощью процедуры Уайльда. В результате улучшенное уравнение $\int \tilde{L}_{\mathbf{k}\omega} d\omega = 0$ в двумерном случае*, как показано в [17], допускает точное решение с колмогоровскими значениями индексов. Выпишем явные выражения для функции Грина и парного коррелятора поля скорости (отвечающие постоянству потока энергии):

(3.3) $$\tilde{G}_{\mathbf{k}\omega} = \omega^{-1} g\left(\frac{\omega L}{v_{\text{т}}(kL)^{2/3}}\right),\ \tilde{J}_{\mathbf{k}\omega} = \frac{v_{\text{т}}}{L^{1/3}} k^{-10/3} f\left(\frac{\omega L}{v_{\text{т}}(kL)^{2/3}}\right).$$

Здесь $v_{\text{т}}$ и L — соответственно характерные горизонтальные скорость и масштаб энергосодержащей части спектра гидродинамической турбулентности.

4. Одним из эффектов, обусловленных наличием вихревой гидродинамической турбулентности, является затухание гравитационных волн. Затухание возникает как в результате прямого поглощения энергии поверхностного волнения турбулентностью, так и за счет процессов рассеяния. Рассмотрим сначала первый из этих механизмов.

Для нахождения декремента затухания Γ_{dis} гравитационных волн необходимо вычислить вклад в мнимую часть $\sigma_{\mathbf{k}\omega}$, обусловленный вершинами W и Q. При этом достаточно ограничиться диаграммами порядка WQ (см. фигуру), поскольку диаграммы, содержащие W^2Q^2, WQS^n, малы по параметру $v_{\text{т}}/v_{\text{ф}}$.

Аналитическое выражение для Γ_{dis} в рассматриваемом случае имеет вид

(4.1) $$\Gamma_{\text{dis}} = -\operatorname{Im}\sigma_{\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}}} = -\operatorname{Im}\int W^{\alpha\beta}_{\mathbf{k}} Q^{\delta\gamma}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}\mathbf{k}_2} G^{\alpha\delta}_{\mathbf{k}_1\omega_1} J^{\beta\gamma}_{\mathbf{k}_2\omega_2} \times$$
$$\times\left[\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 + \mathbf{k})\,\delta(\omega_1 - \omega_2 + \omega_{\mathbf{k}}) - \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k})\,\delta(\omega_1 - \right.$$
$$\left. - \omega_2 - \omega_{\mathbf{k}})\right] d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\omega_1 d\omega_2.$$

Основной вклад в выражение (4.1) вносит интегрирование по области масштабов k_1, $k_2 \sim k_{\text{т}}$, где колмогоровская частота $\omega_{\text{т}} \simeq (v_{\text{т}}/L)(k_{\text{т}}L)^{2/3}$ порядка $\omega_{\mathbf{k}}$. Принимая во внимание, что турбулентное волновое число $k_{\text{т}}$ лежит в инерционном интервале $L^{-1} < k_{\text{т}} < L^{-1}\,\mathrm{Re}^{3/4}$ (Re — число Рейнольдса), или

(4.2) $$\frac{v_{\text{т}}^2}{gL} < kL < \frac{v_{\text{т}}^2}{gL}\,\mathrm{Re},$$

можно оценить (4.1) в виде

(4.3) $$\Gamma_{\text{dis}} \simeq \frac{v_{\text{т}}}{L}\left(\frac{v_{\text{т}}}{v_{\text{ф}}}\right)^2.$$

Сравнение Γ_{dis} с декрементом затухания $\Gamma_0 \simeq 2\nu k^2$, обусловленным молекулярной вязкостью ν, показывает, что $\Gamma_{\text{dis}} \approx \Gamma_0$ при $k_0 \approx L^{-1}\frac{v_{\text{т}}^2}{gL}\,\mathrm{Re}$ и, следовательно, механизм диссипации, связанный с прямым поглощением энергии волнения турбулентностью, преобладает во всем интервале (4.2).

---

* Для трехмерной турбулентности анализ соответствующих уравнений проведен в [16].

Для естественной океанической турбулентности декремент (4.3) мал, так как $v_т \ll v_ф$. В случае «искусственной» турбулентности, вызванной, например, движущимся кораблем, диссипация волнения может быть существенной (ср. с [18]).

5. В области $L^{-1} < k < L^{-1}\mathrm{Re}^{3/4}$ необходимо учитывать процессы рассеяния волн на турбулентности. Прежде всего найдем коэффициент затухания плоской волны $\Gamma_{\mathbf{k}}$, обусловленный переходом энергии из данной волны в энергию рассеянного поля. Диаграммный ряд для $\sigma_{\mathbf{k}\omega}$, описывающий процессы рассеяния волн на турбулентности, обусловлен вершинами S (см. фигуру).

В диапазоне $1 < kL < (gL/v_т^2)^{1/3}$ можно ограничиться диаграммами второго порядка по вершинам S. Тогда для декремента затухания имеем

$$(5.1)\qquad \Gamma_{\mathbf{k}} = -\operatorname{Im}\sigma_{\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}}} = -\operatorname{Im}\int S^{\alpha}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} S^{\beta}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}\mathbf{k}_2} g_{\mathbf{k}_1\omega_1} J^{\alpha\beta}_{\mathbf{k}_2\omega_2}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1+ \\ +\mathbf{k}_2)\,\delta(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_1-\omega_2)\,d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\omega_1 d\omega_2.$$

Подставляя в (5.1) начальную функцию Грина и учитывая, что $v_т/v_ф \ll 1$, для $\Gamma_{\mathbf{k}}$ получим

$$(5.2)\qquad \Gamma_{\mathbf{k}} \simeq \frac{\pi k^2}{2\left|\dfrac{d\omega_{\mathbf{k}}}{dk}\right|}\int\limits_{L^{-1}}^{2k} dk' \sqrt{4-\frac{k'^2}{k^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega' J_{k'\omega'}.$$

На колмогоровском спектре (3.3) основной вклад в $\Gamma_{\mathbf{k}}$ вносят энергосодержащие вихри $k' \sim L^{-1}$. В результате из (5.2) следует

$$(5.3)\qquad \Gamma_{\mathbf{k}} \approx kv_т\,(kLv_т/v_{гр}) \simeq v_т^2 g^{-1/2} k^{5/2} L,$$

где $v_{гр} = d\omega_{\mathbf{k}}/dk$ — групповая скорость поверхностного волнения. Найденное нами выражение для $\Gamma_{\mathbf{k}}$ уточняет результат, полученный ранее в [10] без детального вычисления матричных элементов. В процессах рассеяния, когда полная энергия гравитационных волн сохраняется, величина $\tau_{cor} = \Gamma_{\mathbf{k}}^{-1}$ может служить оценкой для характерного времени спадания коэффициента корреляции фаз волнового поля в интервале $1 < kL < (gL/v_т^2)^{1/3}$.

Получим (5.3) качественно с помощью аналогичных аргументов, как и в [4], рассматривая рассеяние поверхностного волнения на вихрях масштаба $k_т^{-1}$. При рассеянии в одном элементарном акте из-за допплеровского сдвига частоты $\Delta\omega_{\mathbf{k}} \approx kv_т(k_т)$ происходит сбой фаз гравитационных волн на величину $\Delta\varphi \approx kv_т(k_т)/k_т v_{гр}$, где $v_т(k_т) \simeq v_т(k_т L)^{-1/3}$ — «колмогоровская» окружная скорость вихря. За время τ произойдет $N \approx k_т v_{гр}\tau$ актов рассеяния, при этом в силу диффузионного характера процесса сбой фазы увеличится в $\sqrt{N}$ раз. Соответствующее время разрушения фазовых корреляций можно оценить из условия $\Delta\varphi\sqrt{N} \approx 1$:

$$(5.4)\qquad \tau^{-1} \approx \frac{v_т^2 g^{-1/2} k^{5/2} L}{(k_т L)^{5/3}}.$$

Так как основной вклад в рассеяние плоской волны вносят вихри с $k_т \sim L^{-1}$, то (5.4) соответствует результату (5.3).

Случай $kL > (gL/v_т^2)^{1/3}$ требует отдельного рассмотрения, поскольку здесь формально необходимо учитывать диаграммы с четырьмя и более вершинами S.

Изучим эволюцию интенсивности волновых пакетов конечной ширины Δk в процессе рассеяния на турбулентности, которая описывается нестационарным кинетическим уравнением

$$(5.5)\qquad \frac{1}{2}\dot{n}_{\mathbf{k}} = -\Gamma_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} + \pi\hat{\varphi}_{\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}}}.$$

В интервале $1 < kL < (gL/v_т^2)^{1/3}$, используя для $\hat{\varphi}_{k\omega_{\mathbf{k}}}$ диаграмму с вершинами SS (см. фигуру) с учетом выражения (5.1) для $\Gamma_{\mathbf{k}}$, из (5.5) получим

$$(5.6)\qquad \dot{n}_{\mathbf{k}} = \frac{\pi}{2}\int \frac{|\mathbf{k}||\mathbf{k}_1|}{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}_1}} \left(\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{|\mathbf{k}|} k_\alpha + \frac{\omega_{\mathbf{k}_1}}{|\mathbf{k}_1|} k_{1\alpha}\right)\left(\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{|\mathbf{k}|} k_\beta + \frac{\omega_{\mathbf{k}_1}}{|\mathbf{k}_1|} k_{1\beta}\right) \times$$

$$\times J^{\alpha\beta}_{\mathbf{k}_2\omega_2}\left[n_{\mathbf{k}_1} - n_{\mathbf{k}}\right]\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\,\delta\left(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}_1} + \omega_2\right) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\omega_2.$$

Если характер рассеяния плоской волны определяется взаимодействием с энергосодержащими вихрями, приводящим к рассеянию на углы порядка $1/kL \ll 1$, то для волнового пакета ширины $\Delta k > L^{-1}$ уже существенную роль играют вихри из инерционного интервала, при этом характерные углы рассеяния $\Delta\theta_s \approx \Delta k/k$. Соответствующий этому процессу декремент затухания $\Gamma_{\mathbf{k}}(\Delta k)$ может быть найден, если принять во внимание, что основной вклад в $\Gamma_{\mathbf{k}}$ при интегрировании по k_2 в этом случае вносит область масштабов $k_2 \sim \Delta k$:

$$(5.7)\qquad \tau_{\mathbf{k}}^{-1}(\Delta k) = \Gamma_{\mathbf{k}}(\Delta k) = \frac{v_{\text{т}}^2 k^2 L}{\left|\frac{d\omega_{\mathbf{k}}}{dk}\right| (\Delta k L)^{5/3}}.$$

Из (5.7) можно оценить характерное время изотропизации волнения, которое определяется последним этапом рассеяния, когда $\Delta k \sim k$:

$$(5.8)\qquad \tau_{\text{is}}^{-1} \approx \frac{v_{\text{т}}^2 k^2 L}{\left|\frac{d\omega_{\mathbf{k}}}{dk}\right| (kL)^{5/3}} = \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{(kL)^{2/3}}\left(\frac{v_{\text{т}}}{v_{\text{ф}}}\right)^2.$$

Рассмотрим теперь процесс неупругого рассеяния, приводящий к эволюции волновых пакетов по частотам. Ввиду того, что изменение частоты при рассеянии мало ($\Delta\omega_{\mathbf{k}}/\omega_{\mathbf{k}} \sim v_{\text{т}}/v_{\text{ф}} \ll 1$), можно воспользоваться диффузионным приближением по $\omega_{\mathbf{k}}$. Далее при изучении неупругого рассеяния ограничимся рассмотрением изотропных распределений. Тогда из (5.6) следует

$$(5.9)\qquad \frac{\partial n_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial\omega_k} D_k \frac{\partial n_k}{\partial\omega_k},$$

где
$$D_k = \frac{\pi k^2}{2}\int_{L^{-1}}^{2k} dk' \sqrt{4 - \frac{k'^2}{k^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega'^2 J_{k'\omega'} d\omega'.$$

Уравнение (5.9) предполагает, что характерное время изотропизации (5.8) много меньше, чем время диффузии τ_{dif}, определяемое коэффициентом D_k. Поскольку на колмогоровском спектре (3.3) для D_k имеем оценку

$$D_k \approx \frac{\omega_k^3}{(kL)^{4/3}}\left(\frac{v_{\text{т}}}{v_{\text{ф}}}\right)^4 \frac{v_{\text{ф}}}{v_{\text{гр}}},$$

то характерное время τ_{dif}, равное

$$\tau_{\text{dif}}^{-1} \approx \frac{D_k}{\omega_k^2} \simeq \frac{\omega_k}{(kL)^{4/3}}\left(\frac{v_{\text{т}}}{v_{\text{ф}}}\right)^4 \frac{v_{\text{ф}}}{v_{\text{гр}}},$$

в $(kL)^{2/3}(v_{\text{ф}}/v_{\text{т}})^2$ раз больше, чем τ_{is}, что и доказывает исходное предположение.

6. В заключение обсудим вопрос о границе применимости кинетического уравнения для описания взаимодействия гравитационных волн между собой в турбулентной среде. Прежде всего отметим, что взаимодействие поверхностных волн между собой в турбулентной среде возможно при условии, когда характерное время нелинейного взаимодействия волн τ_{int} меньше, чем характерное время Γ_{dis}^{-1}. Используя для τ_{int} оценку

$$\tau_{\text{int}}^{-1} \approx \omega_{\mathbf{k}}\left(\frac{E}{\rho\left(\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{k}\right)^2}\right)^2,$$

полученную в [19], из неравенства $\tau_{\text{int}}^{-1} > \Gamma_{\text{dis}}$ найдем

$$E > \rho v_{\text{т}}^2 \left(\frac{v_{\text{ф}}}{kLv_{\text{т}}} \right)^{1/2}. \tag{6.1}$$

При выполнении условия (6.1) становится определяющим нелинейное взаимодействие волн между собой, которое может быть описано в рамках кинетического уравнения [19] диаграммными рядами $\sigma_{\mathbf{k}\omega}$, $\varphi_{\mathbf{k}\omega}$ с вершинами TT (см. фигуру).

Это приближение будет справедливо, если выполняется необходимое условие на ширину пакетов Δk поверхностного волнения [13]:

$$\tau_d^{-1} = \omega_k''(\Delta k)^2 \gg \tau_{\text{int}}^{-1}. \tag{6.2}$$

Формально (6.2) следует из условия малости диаграмм, перенормирующих вершину $T_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}$ (см. фигуру).

Следовательно, в этом случае для применимости кинетического уравнения, помимо (6.2), появляется дополнительное условие

$$\tau_{\text{int}}^{-1} < \Gamma_{\mathbf{k}}, \quad 1 < kL < \left(\frac{gL}{v_{\text{т}}^2} \right)^{1/3}. \tag{6.3}$$

Выражая (6.3) через плотность энергии поверхностного волнения, получим

$$E < E_{\text{cr}} = \rho v_{\text{т}}^2 \left(\frac{v_{\text{ф}} kL}{v_{\text{гр}}} \right)^{1/2} \frac{v_{\text{ф}}}{v_{\text{т}}}, \quad 1 < kL < \left(\frac{gL}{v_{\text{т}}^2} \right)^{1/3}. \tag{6.4}$$

Существенно, что ширина пакета не входит в неравенство (6.4) и в процессах рассеяния стохастизация фазы происходит даже для одиночной волны.

При выполнении критериев (6.1)—(6.4) в результате нелинейного взаимодействия гравитационных волн между собой будет устанавливаться спектр Захарова — Филоненко [19]

$$E_k \sim k^{-5/2}, \tag{6.5}$$

при этом роль турбулентности будет сводиться к эффекту изотропизации волновых пакетов за характерное время τ_{is} (см. (5.8)). При достаточно больших амплитудах волн вступят в игру сильно нелинейные процессы и теория слабой турбулентности станет неприменимой. В гравитационной области таким процессом является обрушение волн у гребней. В результате обрушения в этом диапазоне волновых чисел спектральное распределение (6.5), по-видимому, должно переходить в спектр Филлипса [20]

$$E_k \sim k^{-3}.$$

В реальных условиях приведенная картина может существенно осложняться из-за влияния ветра, взаимодействия гравитационных волн с капиллярными и т. п.

Автор выражает признательность М. И. Рабиновичу за внимание к работе и А. А. Новикову за полезные обсуждения.

Поступила 9 III 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Монин А. С.** Турбулентность и микроструктура в океане.— УФН, 1973, т. 109, № 2.
2. **Монин А. С.** О природе турбулентности.— УФН, 1978, т. 125, № 1.
3. **Львов В. С., Михайлов А. В.** Звук и гидродинамическая турбулентность в сжимаемой жидкости.— ЖЭТФ, 1978, т. 74, вып. 4.
4. **Львов В. С., Михайлов А. В.** Рассеяние и взаимодействие звука со звуком в турбулентной среде.— ЖЭТФ, 1978, т. 75, вып. 5(11).
5. **Моисеев С. С., Сагдеев Р. З., Тур А. В., Яновский В. В.** Влияние вихрей на спектр акустической турбулентности.— В кн.: Нелинейные волны. М.: Наука, 1979.

6. Wyld H. W. Formulation of the theory of turbulence in incompressible fluid.— Ann. Phys., 1961, vol. 14, N 2.
7. Захаров В. Е. Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости.— ПМТФ, 1968, № 2.
8. Конторович В. М., Кравчик Х., Тиме В. Гамильтоново описание непотенциального движения при наличии свободной поверхности в обычной и магнитной гидродинамике. Препринт ИРЭ АН УССР № 158, Харьков, 1980.
9. Филлипс О. М. Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1980.
10. Phillips O. M. The scattering of gravity waves by turbulence.— J. Fluid Mech., 1959, vol. 5, pt 2.
11. Phillips O. M. A note on the turbulence generated by gravity waves.— J. Geophys. Res., 1961, vol. 66, N 9.
12. Захаров В. Е. Гамильтоновский формализм для волн в нелинейных средах с дисперсией.— Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика, 1974, т. 17, № 4.
13. Захаров В. Е., Львов В. С. О статистическом описании нелинейных волновых полей.— Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика, 1975, т. 18, № 10.
14. Kraichnan R. H. The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers.— J. Fluid Mech., 1959, vol. 5, N 4.
15. Львов В. С. К теории развитой гидродинамической турбулентности. Препринт ИАЭ СО АН СССР № 53, Новосибирск, 1977.
16. Kuznetsov E. A., L'vov V. S. On the Kolmogorov turbulent spectrum in the direct interaction model.— Phys. Lett., 1977, vol. 64 A, N 2.
17. Сазонтов А. Г. О спектрах двумерной турбулентности.— ПМТФ, 1981, № 2.
18. Боев А. Г. О гашении поверхностных волн сильной турбулентностью.— Изв. АН СССР. Сер. ФАО, 1971, т. 7, № 1.
19. Захаров В. Е., Филоненко Н. Н. Спектр энергии для стохастических колебаний поверхности жидкости.— ДАН СССР, 1966, т. 170, № 6.
20. Phillips O. M. The equilibrium range in the spectrum of wind-generated waves.— J. Fluid Mech., 1958, vol. 4, pt 4.

УДК 532.517.4

О НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ РАЗВИТИЯ ТЕРМИКА

Б. И. Заславский

(Москва)

Свободный шарообразный объем, заполненный более легкой, чем внешняя, средой, как известно, трансформируется в вихревое кольцо — ядро всплывающего кольцевого вихря. Исследованию таких вихрей на различных этапах движения посвящены работы [1—6]. Наименее изучен начальный этап — сам процесс трансформации.

В данной работе обсуждается механизм трансформации, приводятся результаты экспериментов и выводятся формулы, определяющие основные параметры возникшего в результате такого процесса всплывающего кольцевого вихря-термика.

1. Пусть R_0 — эффективный радиус начального объема термика $Q_0 = 4\pi R_0^3/3$, ρ_1 — плотность газа внутри Q_0, ρ_0 — плотность внешней среды, p — давление, Γ — циркуляция, H — высота подъема, R, r — радиусы осевой окружности и сечения тороидального ядра кольцевого вихря, $\xi = (\rho_0 - \rho_1)/\rho_0$ — относительная плотность, $\alpha = dR/dH$ — угол раствора. Введем, следуя [1], безразмерные величины $H^0 = H/R_0$, $\Gamma^0 = \Gamma/R_0\sqrt{R_0 g}$.

В [2] приводится среднее значение параметра $\alpha = 0{,}25$. Опыты, на основании которых получено это значение, проводились в воде при малых ξ, причем вода с большей ($\xi < 0$), чем внешняя среда, плотностью выливалась в резервуар из чашки. В этих условиях движение опускающейся массы напоминает движение вихря Хилла [2].

Проведенные опыты [5] с термиками, образующимися при разрушении пленки мыльного пузыря, заполненного более легким, чем воздух, газом, дают иную картину движения. В этих экспериментах (на фиг. 1, 2 приведены результаты, взятые из этой работы) средняя величина $\alpha = 0{,}09$ при всех $\xi > 0$, причем, как показали опыты, если существенно не нарушается осевая симметрия движения, не только изменение ξ, но и искусственно вводимые возмущения (дополнительная начальная завихренность, разрушение пленки путем прокалывания ее сбоку или снизу) мало влияют на значения α.