

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОПЕРЕЧНОГО И ПРОДОЛЬНОГО КРАЕВЫХ ЭФФЕКТОВ В МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ КАНАЛЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Н. Г. Немкова

(Москва)

Известно, что при обрывании магнитного поля на конце электродной зоны перетекание токов в продольном сечении канала снижает значение мощности и приводит к уменьшению к.п.д. генератора [1,2]. Чтобы исключить концевые потери, предлагалось выносить магнитное поле за электродную зону или ставить непроводящие перегородки на входе в электродную зону и выходе из нее [3,4]. Если выносить магнитное поле за электродную зону, то рост мощности превосходит рост диссипации и к.п.д. генератора достигает своего максимального значения при вынесении магнитного поля на ∞ .

Если рассматривать трехмерные задачи, замкнутые поперечные токи существенно увеличивают значение джоулевой диссипации даже при незначительных пограничных слоях [5].

Ниже исследуется трехмерное распределение электрического поля при стационарном течении изотропно проводящей жидкости в магнитогиродинамическом канале с полубесконечными электродами и вычисляются джоулева диссипация, мощность и к.п.д. генератора.

1. Рассмотрим прямоугольный канал $|x| < \infty$, $|y| < \delta$, $|z| < a$, стенки которого всюду непроводящие (фиг. 1), за исключением двух полубесконечных электродов $x > 0$, $y = \pm \delta$.

По каналу движется электропроводная жидкость с постоянной проводимостью σ и заданной скоростью $V(x, y, z)$. Канал помещен во внешнее магнитное поле $B = B(x, y, z)$, которое пренебрежимо мало искажается индуцированными токами.

Тогда, следуя работе [6], распределение токов и потенциалов можно найти из уравнения

$$\Delta \Phi = B \operatorname{rot} V \quad (1.1)$$

при следующих предельных условиях:

$$\Phi = \pm \Phi_e \quad \text{при } y = \pm \delta, \quad x > 0 \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} j_y &= \sigma \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y} + f_{\pm} \right) = 0 \quad \text{при } y = \pm \delta, \quad x < 0 \\ j_z &= \sigma \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial z} + g_{\pm} \right) = 0 \quad \text{при } z = \pm a, \quad |x| < \infty \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$f_{\pm}(x, z) = \frac{V \times B}{c} \Big|_{y=\pm\delta}, \quad g_{\pm}(x, y) = \frac{V \times B}{c} \Big|_{z=\pm a}$$

$$B \rightarrow 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} \rightarrow 0, \quad \Phi \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow -\infty$$

$$B \rightarrow B_{\infty}(y, z), \quad V \rightarrow V(y, z)e_x, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow +\infty \quad (1.4)$$

Предполагается, что скорость есть симметричная функция по y и по z , а $B_{\infty}(x, z)$ — симметричная функция по z .

Введем вспомогательный потенциал $\psi = \varphi - \varphi_0$, где $\varphi(x, y, z)$ — искомого решение задачи, $\varphi_0(x, y, z)$ — решение уравнения (1.1) с граничными условиями (1.3) — (1.4) при $|x| < \infty$, т. е. решение аналогичной задачи для канала со всюду непроводящими стенками.

Тогда для ψ получим уравнение Лапласа

$$\Delta \psi = 0 \quad (1.5)$$

и граничные условия

$$\psi = \pm \psi_e(x, \pm \delta, z) = (\mp \varphi_e) - \varphi_0(x, \pm \delta, z) \quad (y = \pm \delta, x > 0) \quad (1.6)$$

$$\partial \psi / \partial y = 0 \quad \text{при } y = \pm \delta, x < 0; \quad \partial \psi / \partial z = 0 \quad \text{при } y = \pm \delta, |x| < \infty \quad (1.7)$$

$$\psi \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow -\infty, \quad \partial \psi / \partial x \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow +\infty \quad (1.8)$$

Решение задачи для $\psi = \varphi - \varphi_0$ ищется в виде разложения

$$\psi = \frac{\psi_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x, y) \cos \frac{\pi k z}{a} \quad (1.9)$$

$$\psi_e = \frac{\psi_{e0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_{ek}(x, \pm \delta) \cos \frac{\pi k z}{a} \quad (1.10)$$

Для потенциала $\varphi_0(x, y, z)$ выражение получено в работе [6]; оно записывается в виде

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{n0} \sin r_n y + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{nk} \sin r_n y \cos \frac{\pi k z}{a} \\ r_n &= \frac{\pi(n - 1/2)}{\delta} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Полагая при этом $y = \pm \delta$ и сравнивая коэффициенты, в (1.10) и (1.11), получим

$$\begin{aligned} \psi_e &= \pm \left(\frac{\psi_{e0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_{ek} \cos \frac{\pi k z}{a} \right) = \\ &= \pm \left(\varphi_e - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \varphi_{n0} - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (1)^{n+1} \varphi_{nk} \cos \frac{\pi k z}{a} \right) \end{aligned} \quad (1.12)$$

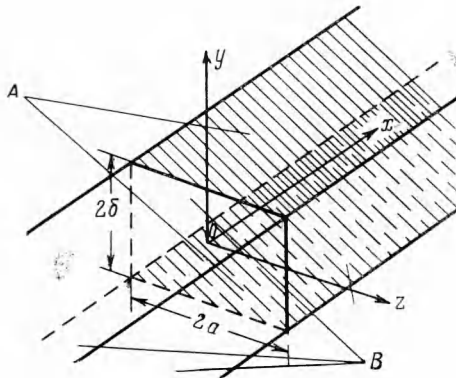
Отсюда

$$\psi_{e0} = -\varphi_e + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \varphi_{n0}, \quad \psi_{ek} = + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \varphi_{nk} \quad (1.13)$$

Следовательно, если заданы профиль скорости и магнитное поле, то результаты [6] определяют коэффициенты разложения функции $\varphi_0(x, y)$, а из формул (1.13) вычисляются коэффициенты разложения ψ_{e0}, ψ_{ek} .

Предположим, что приложенное магнитное поле аппроксимируется ступенчатой функцией

$$B = \{0, 0, B_z(x)\}, \quad B_z = 0 \quad (x \leq -l), \quad B_z = B_0 \quad (x > -l)$$



Фиг. 1

Профиль скорости задается таким образом, чтобы он удовлетворял условиям прилипания к стенкам

$$V = \{V_x(y, z), 0, 0\} \quad V_x(y, z) = V_0 \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(z) \cos r_n y$$

$$\chi_n(z) = \frac{V_n}{V_0}, \quad V_n = \int_{-\delta}^{\delta} V_x(y, z) \cos r_n y dy, \quad \chi_n(\pm a) = 0$$

Тогда

$$\varphi_{nk} = A \frac{r_n \chi_{nk} \delta}{\mu_{nk}^2} (\exp[-\mu_{nk}(x+e)] - 1) = \frac{A}{2} a_{nk} (\exp[-\mu_{nk}(x+e)] - 2)$$

$$A = \frac{V_0 B_0}{\delta}, \quad \chi_{nk} = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \chi_n(z) \cos \frac{\pi k z}{a} dz, \quad \mu_{nk}^2 = r_n^2 + \lambda_k^2, \quad \lambda_k = \frac{\pi k}{a}$$

Подставляя φ_{nk} в (1.13), получаем

$$\begin{aligned} \psi_{e0} &= \left[-\varphi_e + \frac{A}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_{n0} (\exp[-\mu_{nk}(x+l)] - 2) \right] \\ \psi_{ek} &= \frac{A}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_{nk} (\exp[-\mu_{nk}(x+)] - 2) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Функции $\psi_k(x, y)$ должны быть определены из следующей системы, получающейся после подстановки ψ в виде (1.9) в уравнение Лапласа (1.5) и условия (1.6) — (1.8)

$$\Delta \psi_k - \lambda_k^2 \psi_k = 0 \quad (1.15)$$

$$\psi_k = \pm \psi_{ek} \quad (y = \pm \delta, x > 0), \quad \frac{\partial \psi_k}{\partial x} = 0 \quad (y = \pm \delta, x < 0) \quad (1.16)$$

$$\psi_k \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty; \quad \partial \psi_k / \partial x \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty \quad (1.17)$$

2. Применив к (1.15) двухстороннее преобразование Фурье

$$\Phi_k(\alpha, y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(x, y) e^{i\alpha x} dx$$

получаем

$$\frac{d^2 \Phi_k}{dy^2} - \gamma_k^2 \Phi_k = 0, \quad \gamma_k^2 = \lambda_k^2 + \alpha^2 \quad (2.1)$$

Граничное условие (1.16) налагает на функцию $\Phi_k(\alpha, y)$ требование ее нечетности по y . Удовлетворяющее этому требованию решение уравнения (2.1) примет вид

$$\Phi_k(\alpha, y) = A_k(\alpha) \operatorname{sh} \gamma_k y \quad (2.2)$$

Если ввести функции

$$\Phi_k^+(\alpha, y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} \psi_k(x, y) e^{i\alpha x} dx$$

$$\Phi_k^-(\alpha, y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 \psi_k(x, y) e^{i\alpha x} dx$$

$$(\Phi_k^+)' = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} \frac{\partial \psi_k}{\partial y} e^{i\alpha x} dx, \quad (\Phi_k^-)' = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial \psi_k}{\partial y} e^{i\alpha x} dx$$

то, используя (2.2), можно записать следующую систему:

$$\Phi_k^-(\alpha, y) + \Phi_k^+(\alpha, y) = A_k(\alpha) \operatorname{sh} \gamma_k y \quad (2.3)$$

$$\Phi_k^{-'}(\alpha, y) + \Phi_k^{+'}(\alpha, y) = A_k(\alpha) \gamma_k \operatorname{ch} \gamma_k y \quad (2.4)$$

Положим в этих уравнениях $y = \pm \delta$. Тогда $\Phi_k^+(\alpha, \delta)$ и $\Phi_k^{-'}(\alpha, \delta)$ известны в силу условий (1.16). Это позволяет, исключив неизвестную функцию $A_k(\alpha)$, получить из (2.3) и (2.4) уравнение относительно $\Phi_k^{+'}(\alpha, \delta)$ и $\Phi_k^-(\alpha, \delta)$

$$\Phi_k^{+'}(\alpha, \delta) = \gamma_k \operatorname{cth} \gamma_k \delta [\Phi_k^-(\alpha, \delta) + \Phi_k^+(\alpha, \delta)] \quad (2.5)$$

Это функциональное уравнение является уравнением Винера — Хопфа. Для исследования этого уравнения определяется функция $\Phi_k^{+'}(\alpha, \delta)$ по выражению (1.14)

$$\Phi_k^+(\alpha, \delta) = \frac{A}{(2\pi)^{1/2}} \left(\frac{\sigma_k}{i\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_{nk} \frac{\exp(-\mu_{nk}l)}{(\mu_{nk} - i\alpha)} \right)$$

$$\sigma_k = \begin{cases} -\frac{\Phi_k}{A} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_{n0} & (k=0) \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_{nk} & (k \geq 1) \end{cases}$$

Проведем факторизацию функции $K(\alpha) = \gamma_k \delta \operatorname{cth} \gamma_k \delta$

$$K_k^{\pm}(\alpha) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1 + b_m^2 \lambda_k^2 \delta^2} \mp b_m \delta i \alpha}{\sqrt{1 + a_m^2 \lambda_k^2 \delta^2} \mp a_m \delta i \alpha}, \quad a_m = \frac{1}{\pi m}, \quad b_m = \frac{1}{\pi(m - 1/2)}$$

Здесь $K_k^+(\alpha)$ и $K_k^-(\alpha)$ — функции комплексного параметра α , регулярные соответственно в полуплоскостях

$$\alpha > -\tau_{ik} = -\frac{\sqrt{1 + a_1^2 \delta^2 \lambda_1^2}}{a_1 \delta}, \quad \alpha < \tau_{ik}$$

После этих преобразований уравнение (2.5) принимает вид

$$\frac{\delta \Phi_k^+(\alpha, \delta)}{K_k^+(\alpha)} - \frac{A}{(2\pi)^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_{nk} K_k^+(i\mu_{nk}) \frac{e^{-\mu_{nk}l}}{(a + i\mu_{nk})} +$$

$$+ \frac{A}{(2\pi)^{1/2}} K_k^+(0) \frac{\sigma_k^i}{\alpha} = K_k^+(\alpha) \Phi_k^-(\alpha, \delta) +$$

$$+ \frac{A}{(2\pi)^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_{nk} \frac{e^{-\mu_{nk}l}}{(\alpha + i\mu_{nk})} [K_k^+(\alpha) - K_k^+(i\mu_{nk})] -$$

$$- \frac{A}{(2\pi)^{1/2}} \frac{\sigma_k^i}{\alpha} [K_k^-(\alpha) - K_k^-(0)] \quad (2.6)$$

Исследуем область регулярности этого уравнения. Рассмотрим предельно функции $\Phi_k^+(\alpha, \delta)$ и $\Phi_k^-(\alpha, \delta)$. В силу условий (1.17) функция $\psi_k \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$, поэтому предположим

$$|\psi_k| < C_1 e^{-\beta_k x} \quad \text{при } x \rightarrow -\infty$$

$$(y = \text{const}, \beta_k = \text{const} \neq 0)$$

Пусть, например,

$$\beta_k = \mu_{1k} = \sqrt{\frac{\pi^2}{4\delta^2} + \frac{\pi^2 K^2}{\alpha^2}}$$

Тогда, согласно [8], функция $\Phi_k^-(\alpha, y)$ будет регулярна при $\tau < \mu_{1k}$, где $\tau = \text{Im} \alpha$. Так как $d\psi_k/dx \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, то $\Phi_k \rightarrow \text{const}$ при любом фиксированном y и $x \rightarrow \infty$.

Следовательно, можно записать, что $|\Phi_k| < C_2$ при $x \rightarrow +\infty$, т. е. функция $\Phi_k^+(\alpha, y)$ регулярна при $\tau > 0$. Таким образом, область регулярности функции $\Phi_k(\alpha, y)$ будет полоса $0 < \tau < \mu_{1k}^1$.

Обозначим правую и левую части (уравнения (2.6) через $I_1(\alpha)$ и $I_2(\alpha)$ соответственно. Функции, входящие в $I_1(\alpha)$ таковы, что $I_1(\alpha)$ регулярна при $\tau_k < \mu_{1k}$, а $I_2(\alpha)$ состоит из функций, регулярных при $\tau_k > 0$. Следовательно, область регулярности уравнения Винера — Хопфа будет полоса $0 < \tau_k < \mu_{1k}$. Если провести аналитическое продолжение регулярных ветвей $I_1(\alpha)$ и $I_2(\alpha)$ во всю плоскость, то получается функция $I(\alpha) = I_1(\alpha) = I_2(\alpha)$, регулярная во всей области.

Для оценки роста функций $I_1(\alpha)$ и $I_2(\alpha)$ при $\alpha \rightarrow \infty$ и $\alpha \rightarrow -\infty$ предположим, что выполняются условия

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, \delta) \rightarrow x^{1/2} \quad \text{при } x \rightarrow +0, \quad \psi_k(x, \delta) \rightarrow \text{const} \quad \text{при } x \rightarrow -0$$

Тогда, следуя работе [8], можно утверждать, что справедливы оценки

$$\Phi_k^{++}(\alpha, \delta) \sim |\alpha|^{1/2}, \quad |\alpha| \rightarrow \infty; \quad \Phi_k^-(\alpha, \delta) \sim |\alpha|^{-1}, \quad |\alpha| \rightarrow \infty$$

которые вместе с известными оценками

$$K_k^+(\alpha) \sim |\alpha|^{1/2}, \quad |\alpha| \rightarrow \infty; \quad K_k(\alpha) \sim |\alpha|^{1/2}, \quad |\alpha| \rightarrow \infty$$

дают возможность выяснить поведение функций $I_1(\alpha)$ и $I_2(\alpha)$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ в соответствующих полуплоскостях.

Оказывается, что

$$\begin{aligned} |I_1(\alpha)| &< C_3 |\alpha|^{-1/2} \quad \text{при } |\alpha| \rightarrow \infty, \tau < \mu_{1k} \\ |I_2(\alpha)| &< C_4 \alpha^{-1} \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty, \tau_k < 0 \end{aligned}$$

тогда по обобщенной теореме Лиувилля $I(\alpha) \equiv 0$ во всей плоскости α . Приравнявая $I_1(\alpha)$ и $I_2(\alpha)$ нулю, имеем два уравнения для определения двух неизвестных функций $\Phi_k^{++}(\alpha, \delta)$ и $\Phi_k^-(\alpha, \delta)$. Достаточно знать одну из этих функций, чтобы определить $A(\alpha)$ из системы (2.3), (2.4) и затем получить

$$\begin{aligned} \Phi_k(\alpha, y) &= A_k(\alpha) \text{sh } \gamma_k y = \frac{A}{(2\pi)^{1/2}} \Theta \left[-\frac{i\gamma_k}{\alpha} + \right. \\ &+ \left. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_{nk} \exp(-\mu_{nk} l)}{\alpha + i\mu_{nk}} iK_k(i\mu_{nk}) \right], \quad \Theta(\alpha, y) = \frac{K_k^+(\alpha) \text{sh } \gamma_k y}{2\gamma_k \delta \text{ch } \gamma_k \delta} \end{aligned}$$

Применение обратного преобразования Фурье к Φ_k дает

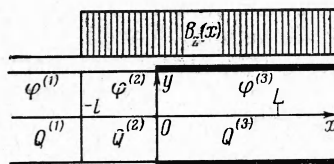
$$\psi_k(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ic_k - \infty}^{ic_k + \infty} \Phi_k(\alpha, y) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (2.7)$$

¹ Заметим, что неравенства (2.7) и (2.8) получаются как следствия довольно сильных предположений относительно поведения ψ_k при $x \rightarrow \pm \infty$. Эти предположения далее подтвердятся построенным решением.

Путь интегрирования проходит в полосе регулярности функции $\Phi_k(\alpha, y)$, т. е. $0 < c_k < \mu_{1k}$. Подставляя $\Phi_k(\alpha, y)$ в формулу (2.7), находим

$$\begin{aligned} \psi_k(x, y) = & -\frac{Ai}{2\pi} \sigma_k \int_{-ic_k-\infty}^{ic_k+\infty} \Theta e^{-i\alpha x} d\alpha - \\ & -\frac{Ai}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_{kn} K_k(i\mu_{nk}) e^{-\mu_{nk}l} \int_{-ic_k-\infty}^{ic_k+\infty} \frac{\Theta e^{-i\alpha x} d\alpha}{(\alpha + i\mu_{nk})} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Интегралы в формуле (2.8) вычисляются с помощью теории вычетов отдельно для $x < 0$, и $x > 0$. Зная коэффициенты разложения $\psi_k(x, y)$, можно по формуле (1.9) определить $\psi(x, y, z)$ в обеих этих областях. Поскольку вычисленная по формулам работы [6] функция $\Phi_0(x, y, z)$ имеет различные аналитические представления в областях $x > -l$ и $x < -l$, то искомый потенциал $\Phi = \psi + \Phi_0$ имеет различные представления



Фиг. 2

в трех областях (см. Фиг. 2)

$$\begin{aligned} \Phi^1(x, y, z) = & A \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2} [(-1)^s b_{0s} - a_{0s} \exp \mu_{0s} l] \exp \mu_{0s} x \sin r_s y + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} [(-1)^s b_{ks} - a_{ks} \exp \mu_{ks} l] \exp \mu_{ks} l \sin r_s y \cos \lambda_k z \right\} \\ & x \in [-\infty, -l] \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \Phi^2(x, y, z) = & A \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2} [(-1)^s b_{0s} \exp \mu_{0s} + a_{0s} (2 - \exp [\mu_{0s} (x + l)])] \sin r_s y + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} [(-1)^s b_{ks} \exp \mu_{ks} x + a_{ks} (2 - \exp [-\mu_{ks} (x + l)])] \sin r_s y \cos \lambda_k z \right\} \\ & x \in [-l, 0] \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \Phi^3(x, y, z) = & A \left\{ h_0 \frac{y}{\delta} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2} [(-1)^s c_{0s} \exp(-v_{0s} x) \sin p_s y - \right. \\ & \left. - 2a_{0s} \sin r_s y] + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{h_k}{\pi k d \operatorname{ch} \pi k a} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi k y}{e} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{s=1}^{\infty} [(-1)^s c_{ks} \exp(-v_{ks} x) \sin p_s y - 2a_{ks} \sin r_s y] \cos \lambda_k z \right] \right\} \\ & x \in [0, \infty] \end{aligned} \quad (2.11)$$

В формулах (2.9) — (2.11) введены обозначения

$$\begin{aligned} p_s = \frac{\pi s}{\delta}, \quad r_s = \frac{\pi(s - 1/2)}{\delta}, \quad \lambda_k = \frac{\pi k}{a}, \quad a_{ks} = \frac{r_s \chi_{ks} \delta}{2\mu_{ks}^2} = \frac{a_{ks}^0}{\mu_{ks}^2} \\ v_{ks}^2 = p_s^2 + \lambda_k^2, \quad \mu_{ks}^2 = r_s^2 + \lambda_k^2 \end{aligned}$$

$$b_{ks} = \left[\sigma_k + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_{kn} \exp(-\mu_{kn}l) \frac{\mu_{ks}}{\mu_{kn} + \mu_{ks}} R(i\mu_{kn}) \right] R(i\mu_{ks})$$

$$c_{ks} = \left[K_k(0) \sigma_k + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_{kn} \exp(-\mu_{kn}l) \frac{\nu_{ks}}{\mu_{kn} - \nu_{ks}} R(i\mu_{kn}) \right] S(-i\nu_{ks})$$

$$R(\alpha) = \frac{K_k^+(\alpha)}{(\alpha\delta)^2}, \quad S(\alpha_0) = \frac{i}{p_s \nu_{ks}} \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} K_k^+(\alpha)(\alpha - \alpha_0)$$

3. Плотность тока, джоулева диссипация и мощность в канале вычисляются по формулам

$$j_x = -\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad j_y = -\sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{vB}{c} \right), \quad j_z = -\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (3.1)$$

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-a}^a \int_{-\delta}^{\delta} \frac{j^2}{\sigma} dx dy dz = Q^1 + Q^2 + Q^3 \quad (3.2)$$

$$N = 2\varphi_e I(\delta) \quad (3.3)$$

где $I(\delta)$ — полный ток, протекающий через электроды во внешнюю нагрузку.

Величины токов и диссипация вычислялись отдельно в каждой из трех зон: в доэлектродной зоне без магнитного поля $[-\infty, -l]$, в доэлектродной зоне при наличии магнитного поля $[-l, 0]$ и в электродной зоне при наличии магнитного поля $[0, \infty]$. Джоулева диссипация обозначается в этих зонах символами Q^1 , Q^2 и Q^3 соответственно. В зоне 1 (фиг. 2) диссипация вызывается только перетеканием токов из зоны 2 и определяется формулой

$$Q^1 = \sigma a \delta A^2 \left[\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{4} (\mu_{0s} (b_{0s}^2 \exp(-2\mu_{0s}l) - 2a_{0s}b_{0s} \exp(-\mu_{0s}l) + a_{0s}^2) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \mu_{ks}^2 (b_{ks}^2 \exp(-2\mu_{ks}l) - 2a_{ks}b_{ks} \exp(-\mu_{ks}l) + a_{ks}^2) \right]$$

В зоне 2 диссипация вызывается как продольными токами (плоская картина перетекания этих токов представлена в работе [1]), так и замкнутыми поперечными токами, которые аналогичны токам в задаче Гартмана. Для Q^2 имеет место формула

$$Q^2 = \sigma a \delta A^2 \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} [\xi_{0s} (\exp(-2\mu_{0s}l) - 1) \eta_{0s} (\exp(-\mu_{0s}l) - 1) + \xi_{0s}l] + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} [\xi_{ks} (\exp(-2\mu_{ks}l) - 1) + \eta_{ks} (\exp(-\mu_{ks}l) - 1) + \xi_{ks}l] \right\}$$

Здесь

$$\xi_{0s} = (\Omega_k^2 a_{ks}^2 - b_{ks}^2) \mu_{ks}$$

$$\eta_{ks} = 2 \left[\Omega_k^2 a_{ks} - 4\Omega_k a_k b_{ks} + (-1)^{s+1} \frac{m_{ks}}{i\mu_{ks}} (\Omega_k a_{ks} + b_{ks}) \right]$$

$$\xi_{ks} = p_s^2 m_{ks}^2 + 4\mu_{ks}^2 \Omega_k^2 a_{ks}^2 + 4(-1)^{s+1} \Omega_k a_{ks} m_{ks}$$

Выражения для a_{ks} , b_{ks} , μ_{ks} , r_s записаны выше, а m_{ks} , Ω_k соответственно равны

$$m_{ks} = \frac{r_s}{a\delta} \int_{-\alpha}^a V_s B_z \cos \frac{\pi s z}{a} dz, \quad \Omega_k = \begin{cases} 1/2 & k=0 \\ 1 & k \geq 1 \end{cases}$$

Из формулы (3.5) следует

$$Q^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } l \rightarrow 0, \quad Q^2 \rightarrow \infty \quad \text{при } l \rightarrow \infty$$

Наконец, в зоне 3 диссипация также вызывается продольными и поперечными токами, но часть поперечных токов здесь в отличие от зоны 2 дает вклад в полезную мощность. За счет поперечных токов диссипация Q^3 бесконечно велика. Поэтому Q^3 вычислялось для фиксированного участка канала с электродами длиной L

$$Q^3 = A^2 a \delta \sigma \left\{ \frac{k_0^2 L}{\delta} + \sum_{s=1}^{\infty} P_s \cos^2(1 - \exp(-2\nu_{0s}L)) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\delta_k + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 \chi_{ks}^2 \delta^2}{\mu_{ks}^2} \right) L + \sum_{s=1}^{\infty} \nu_{ks} c_{ks}^2 (1 - \exp(-2\nu_{ks}L)) \right] \right\}$$

Обозначения в выражении для Q^3 те же, что и в формулах (2.12) — (2.14). Для вычисления мощности обратимся к вычислению полного тока $I(\delta)$ по формуле

$$I(\delta) = \int_a^\infty \int_{-a}^a j_y dx dz$$

в которой верхний предел интегрирования заменяем на L , полагая тем самым, что электроды имеют конечную длину. Потенциал на электродах можно выразить через коэффициент нагрузки k

$$\varphi_e = k V_{\langle u \rangle} B \delta$$

где $V_{\langle u \rangle}$ есть средняя по сечению канала скорость, и тогда формула (3.3) для мощности запишется так:

$$N = 2\pi (V_{\langle u \rangle} B)^2 \delta^2 \sigma \left[\frac{(1-k)}{\pi} \frac{L}{\delta} + \frac{i}{2\delta^2} \sum_{s=1}^{\infty} \cos(1 - \exp(-\nu_{0s}L)) \right]$$

4. Исследование значений мощности, джоулевой диссипации и к.п.д. генератора проводится в предположении, что краевые эффекты проявляются только при входе в магнитное поле и электродную зону, а далее электродинамические параметры практически равномерно распределяются по длине канала. Тогда мощность N и джоулева диссипация Q могут рассматриваться как суммы двух слагаемых; первое — то значение мощности или диссипации, которое появляется за счет краевых эффектов, обусловленных выдвиганием магнитного поля за электродную зону; второе слагаемое — это значение мощности или диссипации, которое прямо пропорционально длине электродов L (значение мощности при этом совпадает с рассчитываемым по одномерной теории). В выражениях для мощности и диссипации, считая $L/\delta \gg 1$, можно пренебречь экспоненциально убывающими (при $L \rightarrow \infty$) членами, т. е. членами, отражающими факт неоднородностей токов на входе в электродную зону, например, образование замкнутых петель в продольных сечениях канала и искривление линий тока при обтекании их. Оценивая длину L , при которой можно пренебречь членами, содержащими L/δ в экспоненте, устанавливаем предельную длину электродов L , за которой можно считать распределение токов и потенциала неизменными вдоль канала, а мощность и диссипацию рассчитывать по двумерной теории.

Для построения примеров поведения мощности, джоулевой диссипации и к.п.д. генератора задавался простой профиль скорости

$$V = V_0 \left(1 + \cos \frac{\pi z}{a} \right) \cos \frac{\pi y}{2\delta}$$

удовлетворяющий условию прилипания на стенках канала и соответствующий пограничным слоям большой толщины (при этом, очевидно, роль поперечных токов завышается).

Мощность в этом случае рассчитывалась по формуле

$$N = 2\pi (V_{\langle u \rangle} B)^2 \delta^3 \sigma \frac{k}{d} \left[\frac{1-k}{\pi} \frac{L}{\delta} + \frac{(1-k)}{\pi^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{P}{p(2p-1)} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\pi} \exp \frac{-\pi l}{2\delta} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{P}{(2p-1)^2} - \frac{(1-k)}{\pi^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{P}{p(2p-1)} \exp \frac{-\pi p L}{\delta} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi} \exp \frac{-\pi l}{2\delta} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{P}{(2p-1)^2} \exp \frac{-\pi p L}{\delta} \right], \quad P = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{m(m-p-1/2)}{(m-1)(m-p)} \quad (4.1)$$

Формула для расчета джоулевой диссипации здесь не приведена ввиду громоздкости выражений, но джоулева диссипация может быть представлена как функция параметров l/δ , L/δ , δ/a и коэффициента нагрузки k в таком виде

$$Q = (V_{\langle u \rangle} B)^2 \sigma \delta^3 \frac{1}{d} \left\{ \sum_{j=1}^3 [a_j(k) + f_j(s_j, k)] \exp \frac{-\pi v_j l}{2\delta} + \right. \\ \left. + [b_j(d) + \Phi_j(s_j, d)] \exp \frac{-\pi \sqrt{d^2 + 0.25} v_j l}{\delta} + \right. \\ \left. + [C_j^{-1}(k) + C_j^{-1}(d)] \frac{L}{\delta} + \left[1 - \frac{1}{4(d^2 + 0.25)} \right] \frac{l}{\delta} \right\} \quad (4.2)$$

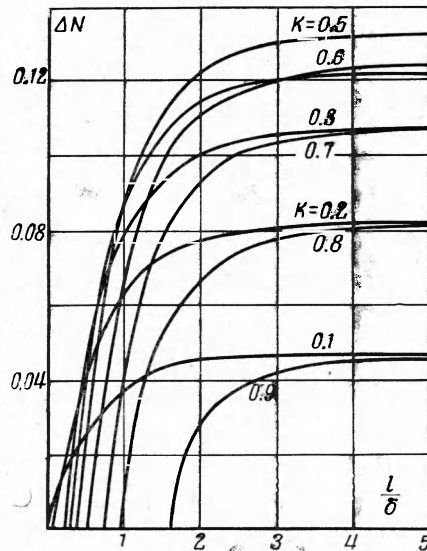
$$d = \frac{\delta}{a}, \quad s_j = \sum_{p=1}^{\infty} m_{pj} \exp \frac{-\pi p \mu_j L}{\delta}, \quad v_j = \begin{cases} 0 & j=1 \\ 1 & j=2 \\ 2 & j=3 \end{cases}, \quad \mu = \begin{cases} 1 & j=3 \\ 2 & j=1, 2 \end{cases}$$

Коэффициенты f_j , Φ_j ($j = 1, 2, 3$) будут функциями от бесконечных сумм s_j , содержащих в общих членах бесконечные произведения m_{pj} и параметр L/δ в экспоненте. Члены, которые в формуле (4.2) содержат в экспоненте только параметр l/δ , обусловлены протекающими вне электродной зоны продольными токами, т. е. продольным краевым эффектом; те члены, которые содержат в экспоненте как l/δ , так и L/δ , соответствуют продольным замкнутым и неоднородным токам на границе электродной зоны. Два линейных по L/δ и l/δ члена есть соответственно часть диссипации за счет однородных по сечению токов в электродной зоне канала и часть диссипации, обусловленная замкнутыми поперечными токами, т. е. поперечным краевым эффектом.

В выражении (4.1) двумя последними членами можно пренебречь при $L/\delta \geq 4$, т. е. если длина электродов превышает высоту канала в два раза.

Обозначим безразмерные параметры l/δ и L/δ буквами g и h соответственно, тогда выражение для мощности, приведенное делением на $(V_{\langle u \rangle} B)^2 \sigma^3 \delta$ к безразмерной величине N^* , представится в виде

$$N^* = \frac{\Delta N(g, k)}{d} + \frac{N^o(h, k)}{d} \\ \Delta N(g, k) = \frac{2}{\pi} k(1-k) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{P}{p(2p-1)} - \\ - k \exp \frac{-\pi}{2} g \sum_{p=1}^{\infty} \frac{P}{(2p-1)^2} \\ N^o(h, k) = 2k(1-k)h$$



Фиг. 3

Слагаемое $\Delta N(g, k)$ отражает только влияние краевых эффектов. Вычисления, проведенные с помощью электронно-вычислительной машины БЭСМ-3М, показали, что

вынесение магнитного поля за электродную зону увеличивает значение мощности. Из графика зависимости ΔN от параметра выноса магнитного поля g (см. фиг. 3) видно, что ΔN достигает максимального значения так же, как и $N^0(h, k)$ при $k = 0.5$. Отношение приращения мощности только за счет продольных краевых эффектов ΔN к мощности N^* , вычисляемой внутри электродной зоны, составляет 6,5% при параметре выноса магнитного поля $g = 3$, коэффициенте нагрузки $k = 0.5$ и $h = 4$.

Отбрасывая в формуле (4.2) суммы, аналогичные суммам, отброшенным в формуле (4.1) для мощности, и приводя выражение для джоулевой диссипации к безразмерному виду, представляем полученное таким образом Q^* как

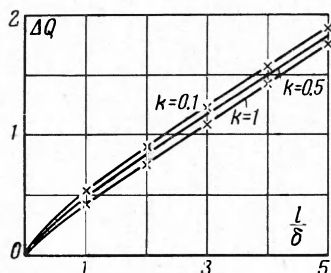
$$Q^* = \Delta Q(g, k, d) + Q^0(h, k, d)$$

Значение $\Delta Q(g, k, d)$ — это приращение диссипации за счет продольных и поперечных токов вне электродной зоны. Пренебрежение суммами справедливо уже при $h \geq 2$. График зависимости ΔQ от длины выноса поля g при различных коэффициентах нагрузки k и при фиксированном отношении поперечных размеров канала $d = 3$ представлен на фиг. 4. Расчеты, проведенные для $d = 0.2, 0.5, 2$ показали, что также, как и для представленного на фиг. 4 $d = 3$, ΔQ линейно возрастает по отношению g за счет замкнутых поперечных токов, что, впрочем, следует из формулы (4.2).

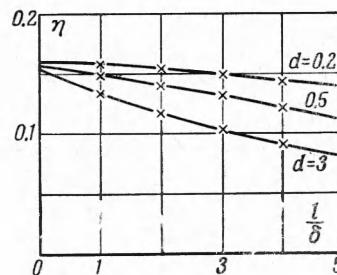
К.п.д. генератора рассчитывался по формуле

$$\eta = \frac{N}{N + Q}$$

где мощность N и диссипация Q вычислялись по формулам (4.1) и (4.2), в которых h бралось равным четырем. На фиг. 5 представлен график зависимости η от выноса магнитного поля при $k = 0.5$ и различных d . Очевидно, что к.п.д. генератора может падать с выдвижением магнитного поля за электродную зону, так как диссипация возрастает за счет поперечного эффекта. Если приращение мощности ΔN , а следовательно, и все значение N возрастает с вынесением магнитного поля независимо от того, какая геометрия канала, то величина к.п.д. генератора существенно определяется параметром d — отношением поперечных размеров канала.



Фиг. 4



Фиг. 5

Расчеты к.п.д. показали, что его значение зависит от длины электродной зоны L и при малых L/δ к.п.д. может достигать своего максимального значения не при отрывании магнитного поля на конце электродной зоны, а при некотором вынесении магнитного поля за электродную зону.

Следует отметить, что при $d \rightarrow 0$, т. е. когда канал вытягивается по ширине и его можно рассматривать как плоский, снижается вклад поперечного краевого эффекта в значение диссипации.

Действительно, в выражении (4.2) член, отражающий поперечный краевой эффект, имеет вид

$$Q^* = \left(1 - \frac{1}{4(d^2 + 0.25)}\right) \frac{l}{\delta} \quad (Q^* \rightarrow 0, d \rightarrow 0)$$

Если обратиться к графику фиг. 5, то ясно, что при любом конечном d , как бы оно не было мало, начиная с некоторого значения l/δ , кривая начнет идти вниз за счет поперечного краевого эффекта. Если же одновременно устремить $d \rightarrow 0$ и $l/\delta \rightarrow \infty$, то кривая асимптотически возрастает, что подтверждает результат двумерной теории о том, что к.п.д. достигает своего максимума при выдвигении магнитного поля на ∞ . Невысокие абсолютные значения к.п.д., представленные на фиг. 5, объясняются такими

факторами, как завывающий поперечные краевые эффекты профиль скорости, резкое обрывание магнитного поля, а не плавный спад его к нулю вне электродной зоны, незначительная длина генератора ($L / \delta = 4$). В реальных установках учет перечисленных выше факторов позволяет получить значительно более высокий к.п.д.

Автор благодарит С. А. Регирера за постановку задачи и внимание к работе, а также В. И. Ковбасюка за полезное обсуждение.

Поступила 6 1 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. В а т а ж и н А. Б. Определение джоулевой диссипации в канале магнитогидродинамического генератора. ПМТФ, 1962, № 5.
2. В а т а ж и н А. Б. Некоторые двумерные задачи о распределении тока в электропроводной среде, движущейся по каналу в магнитном поле. ПМТФ, 1963, № 2.
3. S u t t o n G. W. Design considerations of a magnetohydrodynamic electrical power generator. Vista Astronaut., 1960, vol. 3, pp. 53—64.
4. В а т а ж и н А. Б., Н е м к о в а Н. Г. Некоторые двумерные задачи о распределении электрического тока в канале магнитогидродинамического генератора с непроводящими перегородками. ПМТФ, 1964, № 2.
5. Р е г и р е р С. А. О влиянии пограничного слоя на распределение тока при течении проводящей жидкости по каналу. Сб. «Вопросы магнитной гидродинамики». Рига, Изд-во АН ЛатвССР, 1963, т. 3.
6. Р е г и р е р С. А. Электрическое поле в магнитогидродинамическом канале прямоугольного сечения с непроводящими стенками. ПМТФ, 4, 1964, № 3.
7. В а т а ж и н А. Б., Р е г и р е р С. А. Приближенный расчет распределения тока при течении проводящей жидкости по каналу в магнитном поле. ПММ, 1962, т. 26, вып. 3.
8. В а т а ж и н А. Б. К решению некоторых краевых задач магнитогидродинамики. ПММ, 1961, № 5.
9. Н о б л Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.