ПМТФ, № 2, 1971

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДА НЕЛИНЕЙНОЙ ФОТОПОЛЗУЧЕСТИ

И. И. Бугаков

(Ленинград)

Строятся нелинейные неизотермические интегральные уравнения, связывающие деформацию и поляризационно-оптические величины с напряжением. Обсуждается возможность применения оптических уравнений к решению методом фотоползучести изотермических и неизотермических задач наследственной теории.

Пьезооптический эффект в полимерных материалах вызывается одновременно и напряжением и деформацией как независимыми параметрами. Для того чтобы выразить поляризационно-оптические величины только через напряжение (или только через деформацию), нужно использовать тот или иной реологический закон механики полимеров (закон Гука с вещественными или комплексными модулями, линейные или нелинейные интегральные уравнения и т. д.). Выбор реологического закона определяется условиями деформирования.

Линейные оптические уравнения хорошо известны. В [1-4] постулировалось, что они содержат операторы типа реологических. В [5] было дано объяснение этих уравнений, исходя из электродинамики, теории пьезооптического эффекта и линейной наследственной теории ползучести. При повышенных напряжениях необходимо использовать нелинейную теорию ползучести. Так, в [6] применялась изотермическая теория старения, имелись в виду задачи квазиустановившейся ползучести. Более общие уравнения получим при помощи нелинейной наследственной теории и принципа температурно-временного соответствия.

1. Исходные оптические уравнения. Ограничимся плоской задачей электродинамики. Пусть слой немагнитного диэлектрика без потерь просвечивается монохроматическими электромагнитными волнами нормально к плоскости слоя x_1x_2, материал первоначально оптически изотропен и однороден, n_0 — его показатель преломления. Если диэлектрическая проницаемость при деформировании слоя изменяется незначительно, то оптическая разность хода δ, отнесенная к толщине слоя, и изоклина φ связаны с напряжением (σ_{ij}) и деформацией (ε_{ij}) зависимостями [5,7]

$$\delta \cos 2\varphi = C_\sigma (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + C_\varepsilon (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}), \quad {}^1/_2\, \delta \sin 2\varphi = C_\delta \sigma_{12} + C_\varepsilon \varepsilon_{12} \tag{1.1}$$

Здесь C_σ, C_ε — коэффициенты, в линейной теории пьезооптического эффекта не зависящие от механических величин, а для стабильных материалов — и от времени. Деформации полагаются малыми.

Подчеркнем, что значения δ и φ определяются формой и ориентацией сечения диэлектрического эллипсоида плоскостью фронта волны, поэтому четкую интерференционную картину полос и изоклин можно получить не только при упругом, но и при неупругом деформировании слоя.

Перейдем к главным напряжениям и деформациям в плоскости слоя, тогда после простых преобразований получим выражения для δ и φ, позволяющие интерпретировать интерференционную картину полос и и изоклин

$$\delta^2 = C_\sigma^2 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + C_\varepsilon^2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + 2C_\sigma C_\varepsilon (\sigma_1 - \sigma_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cos 2(\varphi_\sigma - \varphi_\varepsilon)$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{C_\sigma (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\varphi_\sigma + C_\varepsilon (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin 2\varphi_\varepsilon}{C_\sigma (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\varphi_\sigma + C_\varepsilon (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cos 2\varphi_\varepsilon} \quad \begin{matrix} (\sigma_1 \geqslant \sigma_2) \\ (\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2) \end{matrix}$$

Здесь φ_σ, φ_ε — механические изоклины. Видно, что в общем полосы не определяются разностью $\sigma_1 - \sigma_2$ или $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$, а оптические изоклины не совпадают с механическими. Такой будет ситуация лишь в изотропном упругом слое (фотоупругость).

Пусть закон Гука не выполняется и предыстория деформирования произвольная. Встречаются следующие случаи. Когда $C_\varepsilon = 0$, полосы определяются разностью главных напряжений, а оптические изоклины — направлениями последних. Если $C_\sigma = 0$, то полосы зависят лишь от разности главных удлинений, а оптические изоклины — от направлений $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Наконец, когда главные оси (σ_{ij}), (ε_{ij}) в механически изотропном слое фиксированы ($\operatorname{tg} 2\varphi_\sigma = \operatorname{tg} 2\varphi_\varepsilon$), оптические изоклины совпадают с механическими и выполняется закон Файлона — Джессопа, связывающий δ с $\sigma_1 - \sigma_2$ и $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$. В дальнейшем полагаем, что $C_\sigma \neq 0$, $C_\varepsilon \neq 0$.

2. Реологические уравнения. В [8–10] предложено применять гипотезу термореологически простого поведения в нелинейной теории вязкоупругости, в [11] эта гипотеза была проверена при больших деформациях. Термореологически простое поведение описывается при помощи приведенного времени ξ, совпадающего с истинным временем t лишь при некоторой выбранной за исходную температуре T_0 (температуре сравнения)

$$\xi(t) = \int_0^t g\,[T(\eta)]\,d\eta \qquad (g(T) > 0,\ \partial g(T)/\partial T > 0,\ g(T_0) = 1)$$

Коэффициент пропорциональности g играет роль зависящего от температуры масштаба времени. Полагаем, что g не зависит от предыстории деформирования, уровня напряжений и вида напряженного состояния.

Согласно гипотезе термореологически простого поведения уравнения ползучести механически изотропных материалов при постоянных напряжениях [12] записываются в виде

$$2\vartheta_{ij}(t) = L(\xi, s)\, s_{ij}, \qquad {}^1\!/_3\,\Delta = K\sigma_m + \varepsilon^T \tag{2.1}$$

$$L(0, s) = 1/G, \quad s = +\sqrt{{}^1\!/_2\, s_{ij}s_{ij}}, \quad \sigma_m = {}^1\!/_3\,\sigma_{ii}, \quad \Delta = \varepsilon_{ii} \quad (\varphi_\sigma = \varphi_\varepsilon)$$

Здесь s — интенсивность касательных напряжений, σ_m —среднее давление, Δ — относительное изменение объема, ε^T — тепловое расширение, G — модуль сдвига, K — модуль гидростатического давления, $L(\xi, s)$ — положительная возрастающая функция своих аргументов. Принято, что объем изменяется по упругому закону. Если заменить $L(\xi, s)$ на функцию времени $I(\xi)$, то получим известные линейные уравнения.

Заметим, что при постоянных напряжениях направления главных напряжений и деформаций одинаковы.

Используя (2.1) и модифицированный принцип сложения [12], получаем уравнения нелинейной неизотермической наследственной теории

$$2\vartheta_{ij}(t) = L(0, s)\, s_{ij}(t) - \int_0^t L'_\omega\,[\xi - \zeta,\ s(\omega)]\, s_{ij}(\omega)\, d\omega \tag{2.2}$$

$${}^1\!/_3\,\Delta = K\sigma_m + \varepsilon^T,\ \zeta = \xi(\omega),\ \xi - \zeta = \int_\omega^t g\,[T(\eta)]\,d\eta,\ \xi - \zeta = t - \omega \quad (T = T_0)$$

где L_ω' — частная производная по переменной интегрирования ω, входящей в первый аргумент функции $L\,[\xi - \zeta,\ s(\omega)]$.

3. Основные оптические уравнения. Подставим (2.1) в (1.1) и перейдем к главным осям, тогда для постоянных напряжений получим

$$\pm\delta(t) = C(\xi, s)(\sigma_1 - \sigma_2), \qquad \operatorname{tg} 2\varphi = \operatorname{tg} 2\varphi_\sigma \tag{3.1}$$

$$C(\xi, s) = C_\sigma + {}^1/_2 C_\varepsilon L(\xi, s), \quad C(0, s) = C_\sigma + {}^1/_2 C_\varepsilon / G \tag{3.2}$$

Функция $C(\xi, s)$ может быть и положительной и отрицательной. Например

$$C(\xi, s) < 0 \quad \text{при } C_\sigma > 0, \ C_\varepsilon < 0, \ C_\sigma < |{}^1/_2 C_\varepsilon L(\xi, s)|$$

При изменяющихся во времени напряжениях используются уравнения (2.2), а не (2.1)

$$\delta(t)\cos 2\varphi(t) = C(0, s)[\sigma_{11}(t) - \sigma_{22}(t)] - \int_0^t C_\omega{}'[\xi - \zeta, s(\omega)][\sigma_{11}(\omega) - \sigma_{22}(\omega)]\,d\omega$$

$$ {}^1/_2\,\delta(t)\sin 2\varphi(t) = C(0, s)\sigma_{12}(t) - \int_0^t C_\omega{}'[\xi - \zeta, s(\omega)]\sigma_{12}(\omega)\,d\omega \tag{3.3}$$

В рамках линейной теории пьезооптического эффекта оптический и реологический операторы связаны между собой согласно (3.2) весьма простой зависимостью. Если пьезооптические коэффициенты C_σ, C_ε не зависят от температуры, как это имеет место, например, для целлулоида, эпоксидной смолы, то термореологически простыми будут не только механические, но и оптические свойства, а температурный масштаб времени для механических и оптических величин оказывается одинаковым.

4. Одноосное растяжение — сжатие. Обозначим отличную от нуля компоненту напряжения и соответствующую ему компоненту деформации через σ и ε. Имеем по (1.1), (2.1.2)

$$\delta = C_1\sigma + C_2 e \quad (\varphi = 0), \qquad -\delta = C_1\sigma + C_2 e \quad (\varphi = 90^\circ) \tag{4.1}$$

$$e = \varepsilon - \varepsilon^T, \qquad C_1 = C_\sigma - {}^1/_2 C_\varepsilon K, \qquad C_2 = {}^3/_2 C_\varepsilon$$

Согласно (2.1), (3.1), (4.1) при $\sigma = \text{const}$ будет (см. [12])

$$e(t) = {}^1/_3[L(\xi, {}^1/_3\sqrt{3}|\sigma|) + K]\sigma = D(\xi, \sigma) \tag{4.2}$$

$$s = {}^1/_3\sqrt{3}|\sigma|, \quad D(0, \sigma) = \sigma / E$$

$$\pm\delta(t) = C(\xi, {}^1/_3\sqrt{3}|\sigma|)\sigma = J(\xi, \sigma) \tag{4.3}$$

$$J(\xi, \sigma) = C_1\sigma + C_2 D(\xi, \sigma), \qquad J(0, \sigma) = (C_1 + C_2 / E)\sigma \tag{4.4}$$

Здесь E — модуль Юнга. Согласно (4.2), (4.3) механические и оптические свойства при растяжении — сжатии полагаются одинаковыми. В случае изменяющегося во времени напряжения

$$e(t) = D[0, \sigma(t)] - \int_0^t D_\omega{}'[\xi - \zeta, \sigma(\omega)]\,d\omega$$

$$\pm\delta(t) = J[0, \sigma(t)] - \int_0^t J_\omega{}'[\xi - \zeta, \sigma(\omega)]\,d\omega \tag{4.5}$$

5. О применении (3.3) в фотомеханике. Оптические уравнения играют в фотомеханике такую же роль, что и определяющие уравнения в механике деформируемых тел; (3.3) являются основными уравнениями метода нелинейной фотоползучести.

Механические и оптические характеристики материала моделей можно найти, например, из опытов над образцами при постоянных нагрузках и температурах, в последовательные моменты времени должны измеряться $e(t)$ и $\delta(t)$. При помощи графика в координатах $e(t)/\sigma$, $\delta(t)/\sigma$ находятся коэффициенты C_1, C_2, C_ε, устанавливается степень зависимости от их температуры и определяется область линейного пьезооптического эффекта. Если известен модуль K, то можно вычислить и C_σ. Сравнение кривых $e(t)/\sigma$ и $\delta(t)/\sigma$ в логарифмической шкале времени позволяет построить раздельно для каждого напряжения совмещенную кривую, определить $g(T)$ и найти область нелинейной ползучести для каждой температуры. Графики $e(t)$ задают по (4.2) механические функции $D(\xi, s)$ и $L(\xi, s)$, а графики $\delta(t)$ задают по (4.3) оптические функции $J(\xi, s)$ и $C(\xi, s)$ при $s = {}^1/_3\sqrt{3}|\sigma|$. Другой способ получения оптических функций — при помощи пьезооптических коэффициентов и механических функций согласно (3.2), (4.4).

После того как заданы функции $C(\xi, s)$ и $g(T)$, уравнения (3.3) можно применять к решению плоских задач нелинейной наследственной теории ползучести, независимо от того, существенно термомеханическое взаимодействие или нет. В опытах необходимо регистрировать $\delta(t)$, $\varphi(t)$ и $T(t)$. При расчетах применяется один из приближенных методов, функции C и g могут быть заданы таблицами.

В случае исследования напряжений на свободных контурах при плоском напряженном состоянии задача сводится к численному решению нелинейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода (4.5). Более сложными оказываются исследования внутри области. Измерять $\delta(t)$, $\varphi(t)$ и $T(t)$ необходимо, как правило, не только в исследуемом сечении, но и в одном-двух близко к нему расположенных вспомогательных сечениях. При расчете уравнения (3.3) дополняются в случае квазистатических задач дифференциальным уравнением равновесия. Поскольку функция C зависит от s, задачу нельзя решать в два этапа (как в методах фотоупругости и линейной фотоползучести): сначала находить при помощи оптических уравнений $\sigma_{11} - \sigma_{22}$ и σ_{12}, а затем при помощи дифференциального уравнения равновесия — σ_{11} и σ_{22}. Полученная система трех уравнений должна решаться совместно.

Поступила 30 IX 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. D i l l E. H. Photoviscoelasticity. Mech. Chem. Solid Propellants. N.Y. (a.o.), Pergamon Press, 1967.
2. D a n i e l I. M. Experimental methods for dynamic stress analysis in viscoelastic materials. J. Appl. Mech., 1965, vol. 32, No. 3. (Рус. перев.: Прикл. механ., Тр. Америк. о-ва инж-механ., сер. Е., 1965, № 3.)
3. T h e o c a r i s P. S. A review of the rheo-optical properties of linear high polymers. Experim. Mech., 1965, vol. 5, No. 4.
4. W i l l i a m s M. L., A r e n z R. J. The engineering analysis of linear photoviscoelastic materials. Experim. Mech., 1964, vol. 4, No. 9.
5. Б у г а к о в И. И., Д е м и д о в а И. И. Исследование метода линейной фотоползучести. Изв. АН СССР, МТТ, 1970, № 5.
6. Б у г а к о в И. И. Применение поляризационно-оптического метода исследования напряжений при неупругих деформациях. В сб. «Поляризационно-оптический метод исследования напряжений», Л., Изд-во ЛГУ, 1966.
7. Б у г а к о в И. И., Г р а х И. И. Исследование метода фотоупругости анизотропных тел. Вестн. ЛГУ, Сер. матем., механ., астрон., 1968, № 19, вып. 4.
8. B e r n s t e i n B., K e a r s l e y E., Z a p a s L. Elastic stress-strain relations in perfect elastic fluids. Trans. Soc. Rheology, 1965, vol. 9, No. 1.
9. S c h a p e r y R. A. A theory of non-linear thermoviscoelasticity based on irreversible thermodynamics. Proc. US Nat. Congr. Appl. Mech. 5th, New York, 1966; N. Y., ASME, 1966.
10. К о л т у н о в М. А. К вопросу построения нелинейных соотношений термовязко-упругости. Механика полимеров, 1967, № 6.
11. Mc G u i r t C. W., L i a n i s G. Experimental investigation of non-linear, nonisotermal viscoelasticity. Internat. J. Engng Sci., 1969, vol. 7, No. 6.
12. Б у г а к о в И. И. Применение измеренных функций в нелинейной наследственной теории ползучести. Изв. АН СССР, МТТ, 1970, № 6.