Теплофизика и аэромеханика, *2012*, *том 19*, *№ 6*

УДК 664.78.42

Решение методом быстрых разложений задачи о сушке зерна

А.Д. Чернышов[1], И.О. Павлов[1], Е.В. Воронова[1], В.В. Горяйнов[2]

[1]*Воронежская государственная технологическая академия*

[2]*Воронежский государственный архитектурно-строительный университет*

E-mail: chernyshovad@mail.ru, gorvit77@mail.ru

Приведены краткие сведения о построении быстрых разложений. На их основе рассмотрен нестационарный термический процесс сушки зерна, описываемый системой уравнений А.В. Лыкова. Решение имеет аналитическую форму в виде суммы специальной граничной функции и быстрых рядов Фурье таким образом, что в рядах можно сохранять всего по одному первому слагаемому, поскольку последующие члены быстро убывают. Это упрощение приводит к линейной системе четырех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. При этом максимальная погрешность составляет 10^{-2}. Если требуется более высокая точность ($\sim 10^{-3}$), то в рядах следует учитывать по два члена и система будет содержать шесть подобных уравнений, и т. д. Данное решение позволяет вычислить температуру и влагосодержание в любой точке зерна в любой момент времени.

Ключевые слова: сушка, температура, влагосодержание, зерно пшеницы, шар, разложения, быстрые ряды Фурье.

Введение

Для решения задач тепломассопереноса применяются различные методы: сеток [1], прямых [2], разделения переменных [3], интегральных преобразований Лапласа [4]. Из приближенных аналитических методов механики сплошных сред одним из эффективных является метод возмущений [5]. Аналитические решения можно также получать методом лучевых разложений в степенные ряды [6], которые могут быть применены и в задачах тепломассопереноса.

Исследуемым пищевым продуктом является зерно пшеницы, принимаемое в известных работах однородным материалом. В работе [3] отдельное зерно считается бесконечным цилиндром и для решения рассматриваемой задачи используется метод прямых. В работе [4] форму зерна аппроксимируют цилиндром конечных размеров и задачу решают разностным методом, в работе [7] зерно — прямоугольный параллелепипед, три ребра которого имеют размеры: $a_0 = 1{,}6 \div 3{,}8$, $b_0 = 1{,}8 \div 4{,}0$, $c_0 = 4{,}8 \div 8{,}6$. Подобные разнообразные приближенные геометрические представления формы зерна обусловлены определенными проблемами при использовании соответствующих этим случаям математических методов.

В настоящей статье с помощью метода быстрых разложений, разработанного в работах [8, 9], рассматривается внутренний тепломассообмен процесса сушки зерна, описываемого математической моделью А. В. Лыкова [1].

Краткие сведения о быстрых разложениях

Пусть $f(x) \in C^{(1)}$ $(0 < x < a)$, запишем классический ряд Фурье:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin m\pi \frac{x}{a} \ , \ f_m = \frac{2}{a}\int_0^a f(x) \sin m\pi \frac{x}{a} dx \ , \ x \in (0, a) . \qquad (1)$$

Если $f(0) \neq 0$, $f(a) \neq 0$, то ряд (1) медленно сходится внутри отрезка $(0, a)$ и расходится на его границах при $x = 0$, $x = a$, его нельзя почленно дифференцировать, поскольку для производных получим расходящиеся ряды [10]. В этом можно практически убедиться при разложении в ряд Фурье, например, функции $f(x) = x$. Таким образом, классические ряды Фурье неэффективны при решении различных проблем с дифференциальными уравнениями.

В работах [8, 9] предложено использовать следующие модификации рядов Фурье, которые будем называть быстрыми синус- или косинус-разложениями:

$$\begin{gathered} f(x) = M_{2p}(x) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin m\pi \frac{x}{a}, \\ g(x) = M_{2p-1}(x) + g_0 + \sum_{m=1}^{\infty} g_m \cos m\pi (x/a), \end{gathered} \qquad (2)$$

где $M_{2p}(x)$ и $M_{2p-1}(x)$ называются граничными функциями. Эти функции, взятые из класса полиномов наименьшей степени, можно представить в виде

$$M_{2p}(x) = f(0)\left(1 - \frac{x}{a}\right) + f(a)\frac{x}{a} + \sum_{i=1}^{p} f^{(2i)}(0) A_{2i}(x) + \sum_{i=1}^{p} f^{(2i)}(a) B_{2i}(x),$$

$$B_{2i}(x) = F_{2i}(x) - \frac{x}{a} F_{2i}(a) \ , \ F_{2i}(x) = \int_0^x \left[\int_0^x B_{2i-2}(x) dx\right] dx \ , \ B_0(x) = \frac{x}{a}. \qquad (3)$$

$$A_{2i}(x) = \Phi_{2i}(x) - \frac{x}{a}\Phi_{2i}(a) \ , \ \Phi_{2i}(x) = \int_0^x \left[\int_0^x A_{2i-2}(x) dx\right] dx \ , \ A_0(x) = 1 - \frac{x}{a} \ ,$$

$$\begin{gathered} M_{2p+1}(x) = g'(0)\left(x - \frac{x^2}{2a}\right) + g'(a)\frac{x^2}{2a} + \sum_{i=1}^{p} g^{(2i+1)}(0) A_{2i+1}(x) + \sum_{i=1}^{p} g^{(2i+1)}(a) B_{2i+1}(x), \\ A_{2i+1}(x) = \int_0^x A_{2i}(x) dx, \ \ B_{2i+1}(x) = \int_0^x B_{2i}(x) dx \ , \ i = 1 \div p \geq 1. \end{gathered} \qquad (4)$$

Здесь обозначения заимствованы из работы [8]. Ряды (2) допускают почленное дифференцирование до производных $(2p+2)$ или, соответственно, до $(2p+1)$ порядков включительно. При этом для ряда по синусам производные до $(2p+1)$ порядка включительно или для ряда по косинусам производные до $2p$ порядка, равномерно сходятся всюду при $x \in [0, a]$, а производная порядка $(2p+2)$ для ряда по синусам или порядка $(2p+1)$ для ряда по косинусам сходятся при $x \in (0,a)$ и в общем случае расходятся на границах $x = 0$, $x = a$.

Граничные функции (3) и (4) обеспечивают высокую скорость сходимости рядов (2), поскольку имеют место оценки для коэффициентов разложений:

$$f_m \sim (m\pi)^{-(2p+3)}, \;\; g_m \sim (m\pi)^{-(2p+2)}. \tag{5}$$

При использовании $M_1(x)$ или $M_2(x)$ в рядах (2) имеем оценки:

$$f_m \sim (m\pi)^{-5}, \; g_m \sim (m\pi)^{-4}. \tag{6}$$

Оценки (6) указывают на то, что для обеспечения погрешности менее 1 % в ряде по синусам достаточно удерживать только первое слагаемое, в ряде по косинусам — первые два слагаемых. Подобная быстрая сходимость данных рядов значительно сокращает объем вычислительных работ на ЭВМ и позволяет получать решения различных задач в аналитическом виде. С ростом целого параметра p в формулах (2), (3) скорость сходимости рядов (2) в соответствии с оценкой (5) растет, но при этом увеличивается количество неизвестных величин: $f(0)$, $f(a)$, $f''(0)$, $f''(a),\dots,f^{(2p)}(0), f^{(2p)}(a)$, через которые выражается граничная функция $M_{2p}(x)$.

Ввиду существенных качественных отличий (2) от классических рядов Фурье (1) в дальнейшем подобные равенства будем называть быстрыми разложениями, а используемые при этом ряды — быстрыми рядами Фурье.

При рассмотрении некоторой краевой задачи неизвестную функцию $f(x)$ следует представить быстрым разложением. Тогда в разложениях по синусам решение сведется к нахождению постоянных

$$f(0),\, f(a),\, f''(0),\, f''(a),\dots,f^{(2p)}(0),\, f^{(2p)}(a),\, \{f_m\},\, m=1,2,\dots, \tag{7}$$

или при использовании разложений по косинусам постоянных

$$g'(0),\, g'(a),\, g'''(0),\, g'''(a),\dots,g^{(2p-1)}(0),\, g^{(2p-1)}(a),\, \{g_m\},\, m=0,1,\dots. \tag{8}$$

Относительно этих постоянных составляется замкнутая система алгебраических уравнений и строится решение в аналитическом виде. В случае нестационарных процессов данные коэффициенты будут зависеть от времени и для них составляется система обыкновенных дифференциальных уравнений.

Алгоритм применения метода быстрых разложений

1. Исходя из удобств вычислений по постановке краевой задачи выбрать величину целого параметра p и тип быстрого разложения (2).
2. При использовании синус-разложения от левой и правой частей (2) вычислить все четные производные $2j$-го порядка на концах отрезка $x = 0$, $x = a$, где $j = 1 \div p$. Для косинус-разложения потребуются все нечетные производные $2j$–1-го порядка на концах отрезка $x = 0$, $x = a$, которые подставим в граничные функции M_{2p} или M_{2p-1} соответственно.
3. Умножить левую и правую части синус-разложения на $\sin n\pi x$, или в случае косинус-разложения — на 1 и затем на $\cos n\pi x$, и проинтегрировать в пределах $x \in [0,a]$ (аналог вычисления коэффициентов Фурье).

Применение этого алгоритма к дифференциальным уравнениям краевой задачи, начальным и граничным условиям приводит к замкнутой системе либо обыкновенных дифференциальных уравнений, либо к системе алгебраических уравнений. В рассматриваемой ниже задаче о сушке зерна при использовании функции M_2 вследствие быстрой сходимости с оценкой (6) в рядах можно ограничиться одним–тремя слагаемыми. Система будет состоять всего из четырех–восьми линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Вследствие высокой скорости сходимости метод быстрых разложений позволяет решать многие прикладные задачи повышенной трудности: с подвижными границами, с фазовыми превращениями, многомерные нелинейные задачи, заменять сложные нелинейные граничные условия на более удобные линейные условия и т. д. Покажем применение метода на примере задачи о сушке зерна.

Постановка задачи

Отдельное зерно злаковых культур имеет весьма сложную форму, которую в первом приближении будем аппроксимировать шаром радиуса R_0, не имеющим углов и являющимся простейшей классической фигурой, наиболее близкой к действительной форме зерна. Решение задачи, основанной на системе уравнений модели А.В. Лыкова, будем строить с помощью быстрых синус-разложений неизвестных функций.

Основными характеристиками нестационарного процесса сушки являются температура $\theta(x,t)$, влагосодержание $u(x,t)$ и давление $P(x,t)$, где t — время, x — радиус. Из экспериментов [4] известно, что в условиях, близких к атмосферным, которые встречаются на практике, давление слабо влияет на сушку, и в целях упрощения модели в дальнейшем будем пренебрегать его влиянием.

Введем следующие безразмерные переменные: $r = x/R_0$ — радиус, отнесенный к эффективному радиусу зерна R_0; $T = (\theta - \theta_0)/\theta_c$ — разность температуры исследуемого тела и его начальной температуры, отнесенная к температуре среды; время t, отнесенное к некоторому времени t_0 ($t_0 = 1$); $U = u/u_0$ — влагосодержание исследуемого тела, отнесенное к его начальному значению. Запишем систему уравнений А.В. Лыкова без учета давления в безразмерной форме в сферических координатах

$$\begin{gathered}\frac{\partial T}{\partial \tau} = A_{11}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) + A_{12}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right),\\ \frac{\partial U}{\partial \tau} = A_{21}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) + A_{22}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right),\ r \in (0,1]\ ,\ \ \tau \ge 0\ ,\ \ \tau = t/t_0\end{gathered} \tag{9}$$

с граничными условиями третьего рода на шаровой поверхности зерна

$$\begin{gathered}-\left.\frac{\partial T(r,\tau)}{\partial r}\right|_{r=1} + a_1(1 - T(r,\tau)|_{r=1}) - a_2(U(r,\tau)|_{r=1} - u_p/u_0) = q_t \exp(-\alpha\tau),\\ \left.\frac{\partial U(r,\tau)}{\partial r}\right|_{r=1} + b_1(1 - T(r,\tau)|_{r=1}) + b_2(U(r,\tau)|_{r=1} - u_p/u_0) = q_u \exp(-\alpha\tau),\end{gathered} \tag{10}$$

где u_p, u_0 — соответственно равновесное и начальное влагосодержания, α^{-1} — некоторая экспериментальная постоянная, имеющая смысл времени релаксации теплового удара, а величины q_t, q_u составляют

$$q_t = a_1 - a_2(1 - u_p/u_0),\quad q_u = b_1 + b_2(1 - u_p/u_0). \tag{11}$$

Начальные условия имеют вид

$$T(r,0)=0,\ \ U(r,0)=1. \tag{12}$$

Правые части в (10) подобраны так, чтобы граничные условия при $\tau=0$ и начальные (12) при $r=1$ были согласованы между собой и, кроме того, при $\tau\to\infty$ правые части в (10) быстро стремились к нулю.

Решение задачи

К соотношениям (10) добавим условия ограниченности

$$\left|T,\,U\right|<\infty\ \text{ при }\ r\to 0. \tag{13}$$

Для упрощений сделаем замену неизвестных функций:

$$T=\frac{Z(r,\tau)}{r},\ U=\frac{W(r,\tau)}{r},\ \left(Z,\,W\right)\in C^{(3)}\left(0<r\le 1\right). \tag{14}$$

Тогда уравнения (9) примут более простую форму:

$$\frac{\partial Z}{\partial\tau}=A_{11}\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2}+A_{12}\frac{\partial^2 W}{\partial r^2},\quad \frac{\partial W}{\partial\tau}=A_{21}\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2}+A_{22}\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}. \tag{15}$$

Поскольку T и U при $r\to 0$ — ограниченные функции по условию (13), что согласуется с физическим смыслом задачи, то из (14) имеем

$$Z(r,\tau)\big|_{r=0}=W(r,\tau)\big|_{r=0}=0. \tag{16}$$

Таким образом, задача сводится к нахождению решения системы дифференциальных уравнений (15), удовлетворяющего граничным условиям (10), (16) и начальным условиям (12). Сложность данной начально-краевой задачи заключается не только в системе (15), но и в постановке граничных условий различного рода: при $r=1$ — условия (10) смешанного типа, при $r=0$ — условия Дирихле (16). Подобная сложность успешно преодолевается при использовании быстрых разложений. В этой связи отметим: если бы решение было найдено, то на сферической границе зерна при $r=1$ функции Z и W принимали бы некоторые значения

$$Z\big|_{r=1}=\phi(\tau),\ \ W\big|_{r=1}=\psi(\tau), \tag{17}$$

где $\phi(\tau),\,\psi(\tau)$ — пока неизвестные функции.

Возникает следующая новая задача: найти решение системы (15) с начальным условием (12) и граничными условиями (10), (16) и (17), где неизвестные $\phi(\tau),\,\psi(\tau)$ следует определить из граничных условий (10). Решение представим следующими быстрыми разложениями:

$$Z=M_z+\sum_{m=1}^{\infty}Z_m(\tau)\sin(m\pi r),\ \ W=M_w+\sum_{m=1}^{\infty}W_m(\tau)\sin(m\pi r). \tag{18}$$

Граничные функции второго порядка M_z и M_w с учетом условий (16) и (17) могут быть получены из (3) при $p=1$:

$$\begin{gathered}M_z=\phi(\tau)r+\phi_0(\tau)\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{6}-\frac{r}{3}\right)+\phi_1(\tau)\left(\frac{r^3}{6}-\frac{r}{6}\right),\ \phi_0(\tau)=\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2}\bigg|_{r=0},\ \phi_1(\tau)=\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2}\bigg|_{r=1},\\ M_w=\psi(\tau)r+\psi_0(\tau)\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{6}-\frac{r}{3}\right)+\psi_1(\tau)\left(\frac{r^3}{6}-\frac{r}{6}\right),\ \psi_0(\tau)=\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}\bigg|_{r=0},\ \psi_1(\tau)=\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}\bigg|_{r=1}.\end{gathered} \tag{19}$$

Теперь решение задачи можно представить зависимостями

$$\begin{aligned}
Z &= \varphi(\tau)r + \varphi_0(\tau)\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{6}-\frac{r}{3}\right) + \varphi_1(\tau)\left(\frac{r^3}{6}-\frac{r}{6}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(\tau)\sin(m\pi r),\\
W &= \psi(\tau)r + \psi_0(\tau)\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{6}-\frac{r}{3}\right) + \psi_1(\tau)\left(\frac{r^3}{6}-\frac{r}{6}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} W_m(\tau)\sin(m\pi r),\\
T &= \varphi(\tau) + \varphi_0(\tau)\left(\frac{r}{2}-\frac{r^2}{6}-\frac{1}{3}\right) + \varphi_1(\tau)\left(\frac{r^2}{6}-\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{r}\sum_{m=1}^{\infty} Z_m(\tau)\sin(m\pi r),\\
U &= \psi(\tau) + \psi_0(\tau)\left(\frac{r}{2}-\frac{r^2}{6}-\frac{1}{3}\right) + \psi_1(\tau)\left(\frac{r^2}{6}-\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{r}\sum_{m=1}^{\infty} W_m(\tau)\sin(m\pi r).
\end{aligned} \tag{20}$$

Функции Z и W в виде (20) по построению удовлетворяют граничным условиям (16), (17) и выражены через неизвестные функции только времени: $\phi(\tau)$, $\phi_0(\tau)$, $\phi_1(\tau)$, $\psi(\tau)$, $\psi_0(\tau)$, $\psi_1(\tau)$, $Z_m(\tau)$, $W_m(\tau)$, $m = 1,2,\ldots$. Перечисленные неизвестные найдем, выполнив дифференциальные уравнения (15), граничные (10) и начальные условия (12). Для этого вначале подставим Z и W из (20) в систему дифференциальных уравнений (15):

$$\begin{aligned}
&\phi'(\tau)r + \phi_0'(\tau)\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{6}-\frac{r}{3}\right) + \phi_1'(\tau)\frac{1}{6}(r^3-r) + \sum_{m=1}^{\infty} Z_m'(\tau)\sin(m\pi r) =\\
&= A_{11}\left[\phi_0(\tau)(1-r) + \phi_1(\tau)r - \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(\tau)m^2\pi^2\sin(m\pi r)\right] +\\
&+ A_{12}\left[\psi_0(\tau)(1-r) + \psi_1(\tau)r - \sum_{m=1}^{\infty} W_m(\tau)m^2\pi^2\sin(m\pi r)\right],\\
&\psi'(\tau)r + \psi_0'(\tau)\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{6}-\frac{r}{3}\right) + \psi_1'(\tau)\frac{1}{6}(r^3-r) + \sum_{m=1}^{\infty} W_m'(\tau)\sin(m\pi r) =\\
&= A_{21}\left[\phi_0(\tau)(1-r) + \phi_1(\tau)r - \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(\tau)m^2\pi^2\sin(m\pi r)\right] +\\
&+ A_{22}\left[\psi_0(\tau)(1-r) + \psi_1(\tau)r - \sum_{m=1}^{\infty} W_m(\tau)m^2\pi^2\sin(m\pi r)\right].
\end{aligned} \tag{21}$$

В соответствии с п. 2 алгоритма применения метода быстрых разложений в уравнениях (21) следует положить $r = 0$ и $r = 1$, после чего будем иметь четыре уравнения:

$$r = 0: \quad A_{11}\varphi_0(\tau) + A_{12}\psi_0(\tau) = 0\ , \ A_{21}\varphi_0(\tau) + A_{22}\psi_0(\tau) = 0, \tag{22}$$

$$r = 1: \quad \varphi'(\tau) = A_{11}\varphi_1(\tau) + A_{12}\psi_1(\tau)\ , \ \psi'(\tau) = A_{21}\varphi_1(\tau) + A_{22}\psi_1(\tau). \tag{23}$$

Из (22) найдем

$$\varphi_0(\tau) = \psi_0(\tau) = 0. \tag{24}$$

Неизвестные $Z_m(\tau), W_m(\tau)$ определим с помощью п. 3 из алгоритма. Для этого левые и правые части системы (21) после упрощений с помощью (24) умножим на $\sin(m\pi r)$ и проинтегрируем по r в пределах [0, 1]:

$$\frac{(-1)^m \varphi_1'(\tau)}{m^3\pi^3}+\frac{1}{2}Z_m'(\tau)=-A_{11}\frac{1}{2}\pi^2m^2Z_m(\tau)-A_{12}\frac{1}{2}\pi^2m^2W_m(\tau)\ ,$$
$$\frac{(-1)^m \psi_1'(\tau)}{m^3\pi^3}+\frac{1}{2}W_m'(\tau)=-A_{21}\frac{1}{2}\pi^2m^2Z_m(\tau)-A_{22}\frac{1}{2}\pi^2m^2W_m(\tau)\ ,\ m=1\div N. \tag{25}$$

После подстановки Z и W из (20) в (10) при $r = 1$, будем иметь:

$$\frac{1}{3}\varphi_1(\tau)+a_1\varphi+a_2\psi+\sum_{m=1}^{N}Z_m(\tau)m\pi(-1)^m=a_1+a_2\frac{u_p}{u_0}-q_t\exp(-\alpha\tau),$$
$$\frac{1}{3}\psi_1(\tau)-b_1\varphi+b_2\psi+\sum_{m=1}^{N}W_m(\tau)m\pi(-1)^m=-b_1+b_2\frac{u_p}{u_0}+q_u\exp(-\alpha\tau). \tag{26}$$

Относительно функций $\varphi(\tau), \psi(\tau), \varphi_1(\tau), \psi_1(\tau), Z_m(\tau), W_m(\tau)$ получили замкнутую систему: (23), (25) и (26). Начальные условия для них найдем с помощью (12). Для этого подставим $Z = rT$ и $W = rU$ из (20) в начальные условия (12):

$$r\varphi(0)+\varphi_1(0)\left(\frac{r^3}{6}-\frac{r}{6}\right)+\sum_{m=1}^{N}Z_m(0)\sin m\pi r=0,$$
$$r\psi(0)+\psi_1(0)\left(\frac{r^3}{6}-\frac{r}{6}\right)+\sum_{m=1}^{N}W_m(0)\sin m\pi r=r. \tag{27}$$

В соответствии с алгоритмом применения быстрого разложения (п. 2, 3) в (27) положим $r = 0$, $r = 1$; затем обе части (27) дважды продифференцируем по r и вновь возьмем $r = 0$, $r = 1$;

$$(r=1)\Rightarrow\ \ \varphi(0)=0,\ \psi(0)=1;\ \left(\partial^2/\partial r^2\Big|_{r=1}\right)\Rightarrow\ \ \varphi_1(0)=\psi_1(0)=0. \tag{28}$$

Обе части (27) умножим на $\sin m\pi r$ и проинтегрируем по $r\in(0,1]$.

Из полученного уравнения найдем следующие начальные условия:

$$\psi(0)=1,\ \varphi(0)=\varphi_1(0)=\psi_1(0)=Z_m(0)=W_m(0)=0;\ m=1\div N. \tag{29}$$

Таким образом, получена замкнутая система уравнений (23), (25), (26) относительно функций $\psi(\tau), \varphi(\tau), \varphi_1(\tau), \psi_1(\tau), Z_m(\tau), W_m(\tau)$ ($m = 1\div N$) с начальными условиями (29). Решение этой системы можно получить либо с помощью стандартной программы на ЭВМ, либо классическим методом, описанным в литературе [11], которое с учетом обозначений

$$\varphi(\tau)=y_1(\tau),\ \ \psi(\tau)=y_2(\tau),\ \ Z_m(\tau)=y_{m+2}(\tau),\ \ W_m(\tau)=y_{m+2+N}(\tau),\ \ m=1...N \tag{30}$$

представим зависимостью

$$y_k(\tau)=D_k+G_k\exp(-\alpha\tau)+\sum_{j=1}^{2(1+N)}E_jC_{kj}\exp(\lambda_j\tau), \tag{31}$$

где D_k, G_k, C_{kj}, E_j — постоянные коэффициенты, λ_j — характеристические корни.

С помощью зависимости (31), с учетом обозначений (30) из (20), найдем T и U в явном аналитическом виде, которые точно удовлетворяют начальным (12) и граничным (10) условиям и приближенно дифференциальным уравнениям системы (15).

Таблица

Максимальные невязки δ второго дифференциального уравнения из (15)

N	$\tau = 0$	$\tau = 0{,}1$	$\tau = 0{,}5$
$N = 1$ ($r = 0{,}8$)	$\delta = 9{,}6 \cdot 10^{-2}$	$\delta = 6{,}5 \cdot 10^{-3}$	$\delta = 6{,}4 \cdot 10^{-4}$
$N = 0{,}2$ ($r = 0{,}89$)	$\delta = 4{,}8 \cdot 10^{-2}$	$\delta = 1{,}1 \cdot 10^{-3}$	$\delta = 2{,}4 \cdot 10^{-4}$
$N = 3$ ($r = 0{,}92$)	$\delta = 3{,}5 \cdot 10^{-2}$	$\delta = 6{,}1 \cdot 10^{-4}$	$\delta = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$

Величина максимальной невязки уравнений (15) даже при $N = 1$ весьма незначительная и с ростом времени τ быстро уменьшается (см. табл.). Невязка первого дифференциального уравнения системы (15) примерно в два раза меньше, чем второго. При учете двух, трех слагаемых в рядах Фурье (20) точность быстро возрастает, невязка быстро уменьшается.

Полученные результаты и их обсуждение

Из анализа рядов (20) следует, что для инженерных целей в этих рядах можно ограничиться только одним первым слагаемым и приближенное решение представить суммой граничных функций и первых членов быстрых рядов:

$$T \approx \frac{1}{r}\left[M_z + Z_1(\tau)\sin \pi r\right],\ U \approx \frac{1}{r}\left[M_w + W_1(\tau)\sin \pi r\right].$$

Подобные случаи быстрой сходимости известны. Так, например, в работе [12] при решении задачи о кручении упругого стержня прямоугольного сечения показано, что в используемых рядах достаточно ограничиться только первым слагаемым.

В частности, с помощью (20) можно найти закон изменения T и U в центре зерна:

$$T(0,\tau) = \varphi(\tau) - \frac{1}{6}\varphi_1(\tau) + \sum_{m=1}^{N} m\pi Z_m(\tau),\ U(0,\tau) = \psi(\tau) - \frac{1}{6}\psi_1(\tau) + \sum_{m=1}^{N} m\pi W_m(\tau).$$

Распределения температуры и влагосодержания при $\alpha = 10$, вычисленные по данным работы [13]:

$$A_{11} = 1{,}1;\ A_{12} = 0{,}1;\ A_{21} = A_{22} = 1;\ a_1 = b_1 = b_2 = 0{,}05;\ a_2 = 0;\ u_p / u_0 = 0 \quad (32)$$

(что соответствует $\mathrm{Lu} = 1$, $\mathrm{P_n} = 1$, $\mathrm{Ko} = 0{,}1$, $\mathrm{Bi}_m = 0{,}05$, $\mathrm{Bi}_q = 0{,}05$ и $\varepsilon = 1$), показаны на рис. 1. Отсюда видно, что при малых числах Bi_m и Bi_q температура T и влагосодержание U незначительно зависят от r и существенно от времени сушки τ.

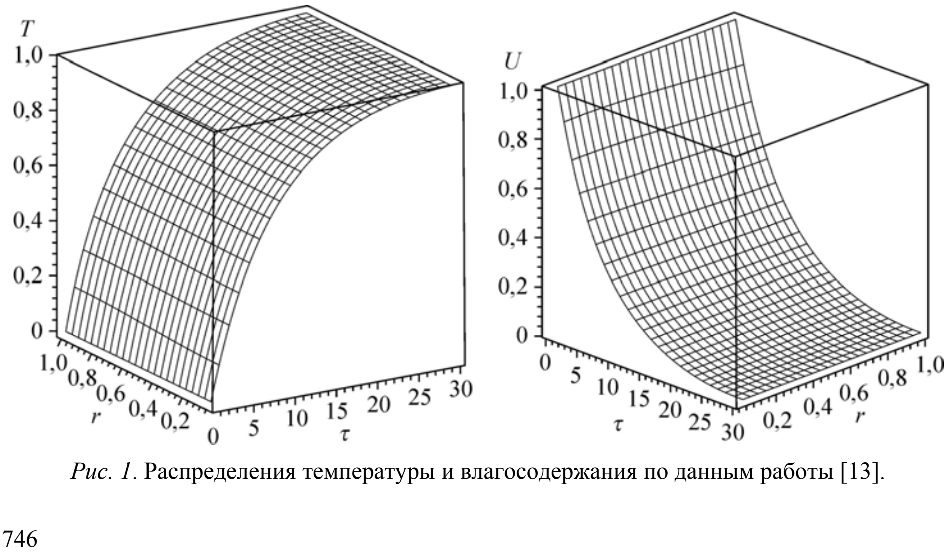

Рис. 1. Распределения температуры и влагосодержания по данным работы [13].

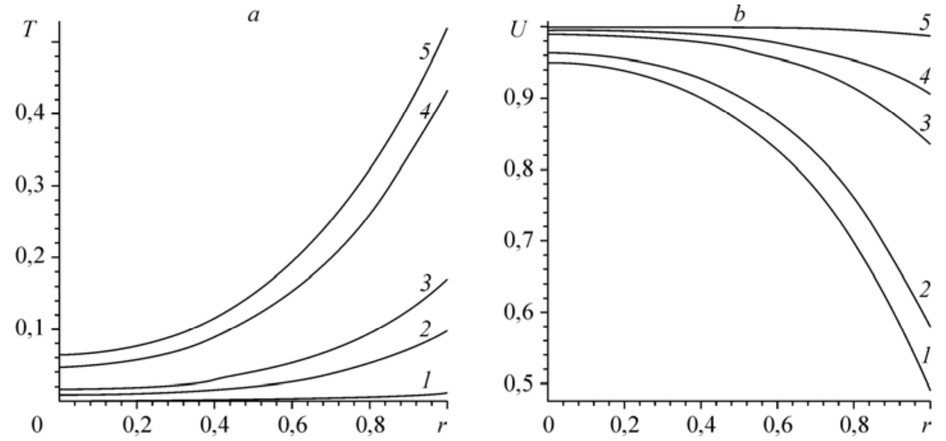

Рис. 2. Неравномерность профилей температуры и влагосодержания в зерне в зависимости от радиуса.

Bi_q (*a*) = Bi_m (*b*) = 0,05 (*1*), 0,5 (*2*), 1 (*3*), 5 (*4*), 10 (*5*).

При больших значениях числа Bi_q неравномерность температуры в зерне при нестационарном тепло- и массообмене будет существенной (рис. 2), что согласуется с работой [14]. Здесь же видно, что при больших значениях Bi_m в зерне наблюдается неравномерность влагосодержания. Кривые на рис. 2 получены по данным (32) при изменении Bi_m или Bi_q.

На рис. 3 представлено сравнение результатов численных экспериментов по предложенной математической модели с результатами, полученными в работе [13] (T и U при $r = 1$).

Для проверки адекватности предложенной математической модели процесса сушки зерна была использована модифицированная экспериментальная установка, основанная на материалах ВНИИЗа [15], которая оснащена системами автоматического регулирования температуры и расхода сушильного агента, измерения и записи температуры зерна в контрольных точках. Влажность высушенного зерна определялась методом высушивания проб в сушильном шкафу до постоянной массы при температуре 403 K в течение 40 минут.

Проведена серия экспериментов с различными параметрами агента сушки и значениями начальной влажности зерна. Результаты математического моделирования сопоставлялись с результатами проведенных экспериментов. На рис. 4 изображены распределения температуры и влагосодержания, полученные при $\mathrm{Lu} = 0{,}001204$, $\mathrm{Pn} = 0{,}27493 \cdot 10^{-5}$, $\mathrm{Ko} = 2{,}1860$, $\mathrm{Bi}_m = 3{,}7354$, $\mathrm{Bi}_q = 0{,}015$ и $\varepsilon = 1$.

Для сравнения экспериментальных данных с результатами численных экспериментов по формулам [1]

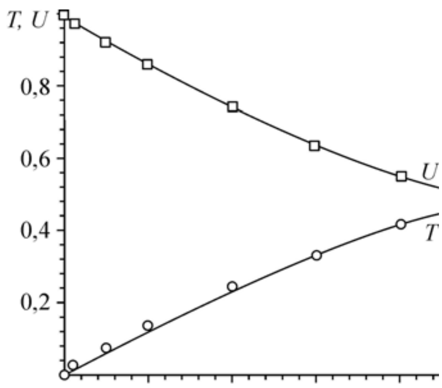

Рис. 3. Сравнение результатов численных экспериментов по предложенной математической модели (кривые) с результатами, полученными в работе [13] (символы).

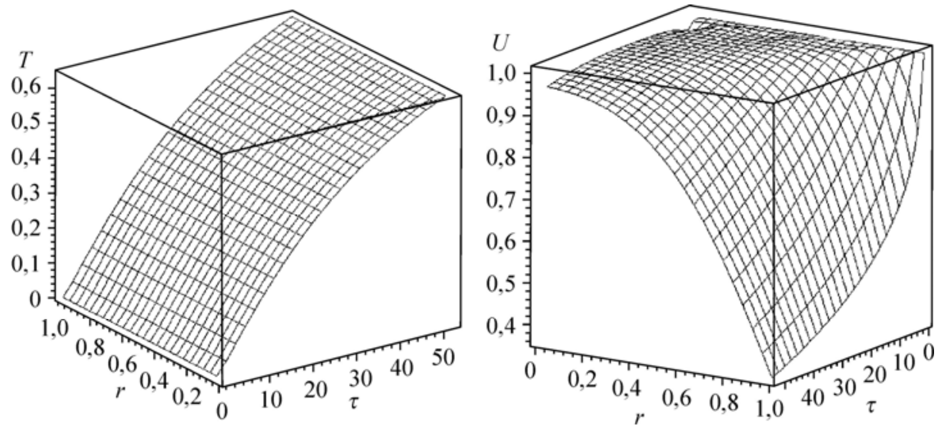

Рис. 4. Распределения температуры и влагосодержания по экспериментальным данным.

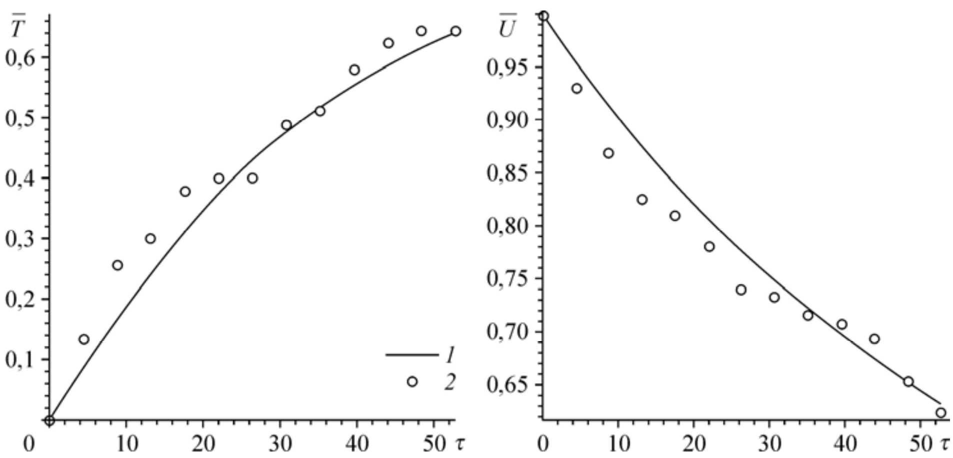

Рис. 5. Сравнение расчетных (*1*) и экспериментальных данных (*2*) для средних по объему *T* и *U*.

$$\overline{T}(\tau)=\frac{3}{R^3}\int_0^R r^2 T\,dr,\quad \overline{U}(\tau)=\frac{3}{R^3}\int_0^R r^2\,U\,dr$$

были определены средние по объему значения температуры $\overline{T}(\tau)$ и влагосодержания $\overline{U}(\tau)$. Результаты сравнения отображены на рис. 5. Средняя относительная погрешность за время $\tau = 52{,}8$ для влагосодержания составляет ≈ 2 %, а для температуры ≈ 9 %.

Таким образом, можно сделать вывод, что математическая модель А.В. Лыкова и представленное аналитическое решение (20) в рамках сделанных допущений достаточно адекватно описывает реальный процесс сушки зерновых культур. Применение быстрых разложений, разработанных в работах [8, 9], для решения подобных задач тепломассообмена позволяет получить приближенное решение в аналитическом виде (20) с любой заданной точностью при минимальных вычислительных затратах на ЭВМ.

Список литературы

1. **Лыков А.В., Михайлов Ю.А.** Теория тепло- и массопереноса. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963. 536 с.

2. **Полянин А.Д., Вязьмин А.В., Журов А.И. Казенин Д.А.** Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса. М.: Факториал, 1998. 368 с.
3. **Котляр Я.М.** Методы и задачи тепломассообмена. М.: Машиностроение, 1987. 320 с.
4. **Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А.** Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984. 288 с.
5. **Ивлев Д.Д., Ершов Л.В.** Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
6. **Буренин А.А., Рагозина В.Е.** К построению приближенных решений краевых задач ударного деформирования // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 2. С. 106–113.
7. **Горелова Е.И.** Основы хранения зерна. М.: Агропромиздат, 1986. 136 с.
8. **Чернышов А.Д.** Улучшенные ряды Фурье и граничные функции // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. тр. междунар. конф. Ч. 2. Воронеж.: ВГУ, 2009. С. 236–238.
9. **Чернышов А.Д.** Улучшение дифференцируемости решений краевых задач механики в форме обобщенных рядов Фурье с помощью граничных функций // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 1. С. 174–192.
10. **Толстов Г.П.** Ряды Фурье. М.: Наука, 1980. 384 с.
11. **Степанов В.В.** Курс дифференциальных уравнений. М.: ГИФМЛ, 1958. 468 с.
12. **Тимошенко С.П., Гудьер Дж.** Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
13. **Жидко В.И., Бомко А.С.** Решение системы уравнений тепло- и массопереноса методом прямых // ИФЖ. 1966. Т. 11, № 3. С. 362–366.
14. **Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С.** // Теплопередача. М.: Энергия, 1975. 488 с.
15. **Жидко В.И., Резчиков В.А., Уколов В.С.** Зерносушение и зерносушилки. М.: Колос, 1982. 239 с.

Статья поступила в редакцию 10 сентября 2011 г.,
после переработки — 16 ноября 2011 г.