

УДК 539.370

## ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ВЫПУЧИВАНИЯ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ РАДИАЛЬНОМ СЖАТИИ

Л. И. Шкутин

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск  
E-mail: shkutin@icm.krasn.ru

Нелинейная краевая задача осесимметричного выпучивания шарнирно опертой конической оболочки (купола) при радиальном сжатии по опорному контуру сформулирована для системы шести обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с независимыми полями конечных перемещений и конечных поворотов. Многочисленные решения получены методом стрельбы с контролируемой точностью. В зависимости от параметра нагрузки исследовано ветвление решений задачи и построена параметрическая диаграмма ветвления. Даны графики форм выпучивания, соответствующие трем изолированным ветвям решений.

**Ключевые слова:** коническая оболочка, выпучивание, численный анализ.

Нелинейная задача осесимметричного выпучивания конических оболочек под равномерным давлением исследовалась в [1]. Работы [2, 3] посвящены анализу осесимметричного выпучивания радиально сжатых пластин. В указанных работах даны ссылки на более ранние публикации по рассматриваемой проблеме. Никакие результаты анализа выпучивания радиально сжатых оболочек-куполов автору не известны.

**Система уравнений.** В цилиндрической системе координат меридиан конического купола до деформации задается параметрическими уравнениями

$$r = bt, \quad z = a(1 - t) \quad \forall t \in [0, 1],$$

где  $a$  — высота купола;  $b$  — радиус опорного контура;  $t$  — независимая переменная, отсчитываемая вдоль меридиана. Изучается деформация купола, в процессе которой его срединная поверхность остается осесимметричной, так что меридиан в актуальном состоянии представляется параметрическими зависимостями

$$r = ly_2(t), \quad z = ly_3(t) \quad \forall t \in [0, 1],$$

где  $l$  — длина меридиана;  $y_2(t)$  и  $y_3(t)$  — искомые координаты точки. Параметры  $a, b, l$  связаны соотношениями  $a = l \sin \alpha$ ,  $b = l \cos \alpha$ , в которых  $\alpha$  — угол наклона меридиана к плоскости основания.

Для анализа осесимметричной деформации купола используются уравнения нелинейной модели деформации оболочки с независимыми полями конечных перемещений и конечных поворотов [1]. Кроме функций  $y_2(t)$  и  $y_3(t)$ , определяющих положение точки, вводится функция  $\theta(t)$  — угол поворота локального координатного базиса относительно цилиндрического. Материал, из которого изготовлена оболочка, считается трансверсально-изотропным и линейно-упругим.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04-01-00267).

Сформулированная в [1] система уравнений справедлива для произвольной оболочки вращения. В рассматриваемом случае она представляется в модифицированной форме

$$\begin{aligned} y'_0 &= x^{-1}[(1 - \nu^2)y_1 - \nu(\sin y_0 - \sin \alpha)], & y'_1 &= x^{-1}(\nu y_1 + \sin y_0 - \sin \alpha) \cos y_0 + \varepsilon^{-1}f_3 - xq_2, \\ y'_2 &= \varepsilon\gamma x^{-1}f_3 \sin y_0 + (1 + \varepsilon f_1) \cos y_0, & y'_3 &= \varepsilon\gamma x^{-1}f_3 \cos y_0 - (1 + \varepsilon f_1) \sin y_0, \\ y'_4 &= x^{-1}[\nu f_2 + \varepsilon^{-1}(y_2 - x)] - xp_1, & y'_5 &= -xp_3, \\ f_1 &\equiv x^{-1}[(1 - \nu^2)f_2 - \varepsilon^{-1}\nu(y_2 - x)], & f_2 &\equiv y_4 \cos y_0 - y_5 \sin y_0, \\ f_3 &\equiv y_4 \sin y_0 + y_5 \cos y_0, & x &\equiv t \cos \alpha \end{aligned} \quad (1)$$

с шестью неизвестными функциями

$$y_0 = \theta, \quad y_1 = \frac{xM_{11}l}{H}, \quad y_2 = \frac{r}{l}, \quad y_3 = \frac{z}{l}, \quad y_4 = \frac{xT_1}{C}, \quad y_5 = \frac{xT_3}{C}$$

и параметрами  $\alpha$ ,  $\gamma = E/G$ ,  $\varepsilon^2 = h^2/(3l^2)$ ,  $p_j = P_j l/C$ ,  $q_2 = Q_2 l^2/H$ . Здесь и ниже введены обозначения:  $C = 2h\varepsilon E$ ;  $3H = 2h^3 E$ ;  $E$  — модуль Юнга;  $G$  — модуль поперечного сдвига;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $T_{ii}(t)$ ,  $M_{ii}(t)$  — компоненты усилий и моментов в локальном базисе;  $T_1(t)$ ,  $T_3(t)$ ,  $P_1(t)$ ,  $P_3(t)$ ,  $Q_2(t)$  — компоненты усилий, поверхностных сил и моментов в цилиндрическом базисе;  $i = 1, 2$ ;  $j = 1, 3$ ; штрих обозначает производную по  $t$ .

Квазилинейная система (1) определяет осесимметричные состояния равновесия конического купола при заданных значениях параметров нагрузки  $p_1, p_3, q_2$ , параметров жесткости  $\varepsilon, \gamma, \nu$  и заданных условиях закрепления опорного контура. Она сингулярна по переменной  $t$  в точке  $t = 0$ . При  $\gamma = 0$  система (1) — система уравнений задачи сильного изгиба купола без поперечных сдвигов (модель Кирхгофа для больших поворотов). Задача выпучивания пластины следует из (1) при  $\alpha = 0$ .

Для системы (1) ставится краевая задача об осесимметричном выпучивании конического купола при сжатии равномерно распределенным по опорному контуру радиальным усилием интенсивности  $P$ . Поскольку поверхностная нагрузка отсутствует, в системе (1) следует задать  $q_2 = p_3 = p_1 = 0$ . В полюсе  $t = 0$  должны быть выполнены условия симметрии и регулярности, которые при численном анализе заменяются асимптотически точными условиями в близкой к полюсу точке  $t = \delta$  (см. [1, 3]):

$$\begin{aligned} y_5 &= 0, & (\nu - 1)y_1 + \sin y_0 - \sin \alpha &= 0, \\ (\nu - 1)(y_4 \cos y_0 - y_5 \sin y_0) + \varepsilon^{-1}(y_2 - \delta) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Они обеспечивают выполнение в этой точке равенств  $T_3 = 0$ ,  $T_{22} = T_{11}$ ,  $M_{22} = M_{11}$ , которые должны иметь место в полюсе.

В граничной точке  $t = 1$  задаются условия подвижного шарнирного опирания

$$y_1(1) = 0, \quad y_3(1) = 0, \quad y_4(1) = -p \quad (p = P/C). \quad (3)$$

Из уравнений (1) и условий (2) следует очевидный результат  $y_5(t) \equiv 0$  (т. е.  $T_3 \equiv 0$ ), который не использовался в вычислительном алгоритме, а служил одним из элементов контроля устойчивости решений по отношению к малым возмущениям граничных параметров.

Нелинейная краевая задача (1)–(3) решалась методом стрельбы из точки  $t = 1$  в точку  $t = \delta$ . Граничные условия (2) образуют систему неявных уравнений относительно дополнительных начальных параметров метода стрельбы. В зависимости от параметра нагрузки исследовалось ветвление решений краевой задачи. При численной реализации алгоритма использовался программный пакет Mathcad.

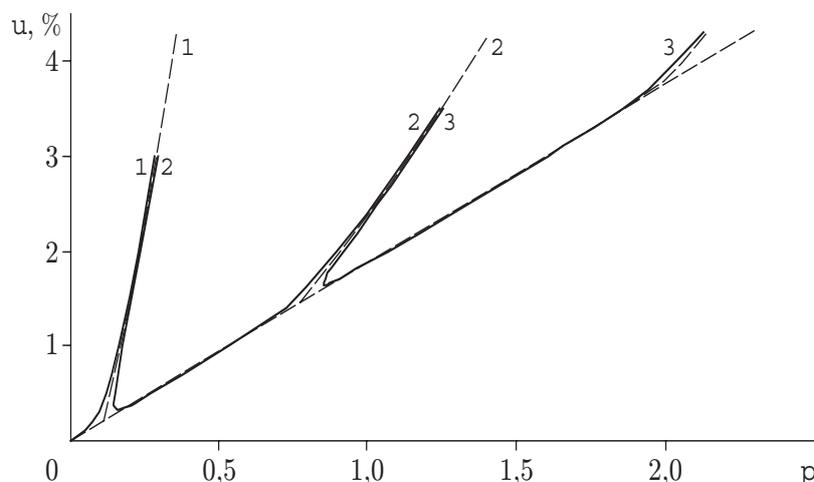


Рис. 1

**Результаты численного анализа.** Некоторые результаты решения нелинейной краевой задачи (1)–(3) для изотропных конических куполов представлены ниже на рисунках и в таблицах. В расчетах параметр  $\alpha$  варьировался, остальные параметры имели фиксированные значения:  $\nu = 0,25$ ;  $\gamma = 2,5$ ;  $\varepsilon = 0,025$ . При этом введены дополнительные обозначения:  $\vartheta = \theta(1)$  — граничное значение угла поворота;  $u = 1 - r(1)/b$  — параметр радиального перемещения точки опорного контура;  $w = z(\delta)/a + \delta - 1$  — параметр осевого перемещения точки  $t = \delta$ ;  $\tau_i = T_{ii}/C$  — параметры внутренних усилий;  $\mu_i = M_{ii}R/H$  — параметры внутренних моментов;  $\tau_0 = \tau_1(\delta) = \tau_2(\delta)$ ;  $\mu_0 = \mu_1(\delta) = \mu_2(\delta)$ .

В соответствии с рекомендациями работы [2] зависимость решений от параметра нагрузки  $p = P/C$  представлена графиками на плоскости  $(p, u)$ , где  $u$  — параметр радиального перемещения в процентном отношении к радиусу  $b$  опорного контура ( $u > 0$  при смещении опорной точки к полюсу).

Ветвление решений для купола с углом  $\alpha = \pi/180$  показано на рис. 1 в сравнении с ветвлением решений для пластины. Сплошные кривые 1, 2, 3 — это ветви (траектории) выпученных состояний купола. Их разделяют ветви выпученных состояний пластины (штриховые линии) [2]. Ветви купола вложены между ветвями выпученных форм пластины и ветвью ее плоских (основных) форм равновесия (нижняя штриховая линия, исходящая из начала системы координат). Основными формами купола следует считать выпученные формы, соответствующие точкам первой ветви, исходящей из начала системы координат (точка исходного состояния купола). На рис. 1 приведены только первые три ветви выпученных форм купола и пластины.

С увеличением угла  $\alpha$  ветви высших мод купола опускаются ниже линии плоских форм пластины и даже ниже оси абсцисс. На рис. 2 представлены такие решения для купола с углом  $\alpha = \pi/12$  (15-градусный купол). Здесь вторая ветвь выпученных состояний пересекает ось абсцисс, а это значит, что при сжимающем радиальном усилии ( $p > 0$ ) имеются выпученные формы с нулевыми и отрицательными значениями параметра  $u$ . В последних случаях опорный контур не сжимается, а растягивается. Этот результат кажется парадоксальным, однако он достоверен и будет пояснен ниже.

На рис. 3 приведена диаграмма ветвления пути деформирования 15-градусного купола. Она изображена в плоскости  $(p, w)$ , где  $w$  — традиционный параметр осевого перемещения в отношении к высоте купола  $a$ . Хотя эта диаграмма коренным образом отличается от представленной на рис. 2, имеет место взаимное соответствие ветвей, показанных на рис. 2 и 3. Поэтому любой из этих рисунков может служить иллюстрацией ветвления решений

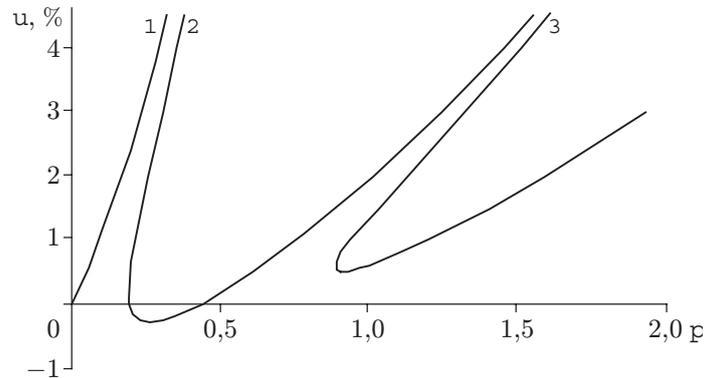


Рис. 2

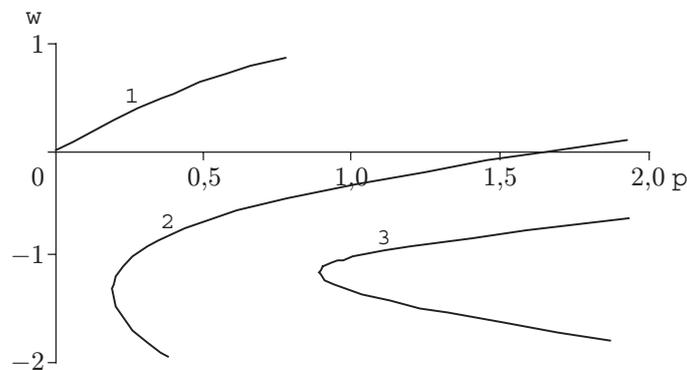


Рис. 3

в рассматриваемой задаче. Однако рис. 2 более информативен и выразителен, поскольку его координатные параметры являются энергетически сопряженными величинами.

В табл. 1, 2, 3 соответственно ветвям 1, 2, 3 рис. 2 представлены численные значения нескольких параметров состояния 15-градусного купола для отдельных точек ветвей. Один из параметров задавался в расчетах, остальные вычислялись методом стрельбы. Размещенные в таблицах данные позволяют судить об эволюции параметров состояния купола. Для равновесных состояний, соответствующих первой ветви, характерно монотонное изменение всех параметров с увеличением нагрузки (табл. 1). Монотонность нарушается для состояний, соответствующих ветвям более высокого уровня (табл. 2, 3). Характерная особенность этих состояний — наличие знакопеременных параметров. Внимания заслуживает точка 4 из табл. 2, показывающая согласованное изменение знака у параметров  $u$  и  $\tau_2(1)$ .

Формы выпучивания 15-градусного купола, соответствующие отдельным точкам ветвей 1, 2, 3, показаны на рис. 4, 5, 6 в виде зависимостей параметра осевого перемещения (прогиба)  $u_3 = z/a + t - 1$  от меридиональной координаты  $t$ . Кривые 1, 2, 3 на рис. 4 соответствуют точкам первой ветви из табл. 1. Они подобны первым формам выпучивания пластины [3]. На рис. 5 изображены прогибы меридиана в выпученных состояниях — точках второй ветви (для данных табл. 2), при этом кривые 3 и 5 — две формы выпучивания, соответствующие значению  $u = 0$ , а кривая 4 — это форма выпучивания при отрицательном значении параметра  $u$ . Рис. 6 иллюстрирует прогибы меридиана в выпученных состояниях — точках третьей ветви (для данных табл. 3). Как видно, у прогибов, соответствующих первой ветви, отсутствуют точки перегиба, у прогибов второй ветви

Таблица 1

Номер точки	$p$	$100u$	$w$	$\vartheta$	$\tau_1(1)$	$\tau_2(1)$	$\tau_0$	$\mu_0$
1	0,1054	1,150	0,1529	0,1	-0,0986	-0,4845	0,0511	-0,0189
2	0,1955	2,411	0,2825	0,2	-0,1750	-1,0082	0,0892	-0,0495
3	0,2783	3,786	0,3953	0,3	-0,2355	-1,5732	0,1191	-0,0844

Таблица 2

Номер точки	$p$	$100u$	$w$	$\vartheta$	$\tau_1(1)$	$\tau_2(1)$	$\tau_0$	$\mu_0$
1	0,3064	3	-1,8108	-0,7791	-0,2663	-1,2666	-0,9138	-0,9958
2	0,2123	1	-1,5448	-0,6275	-0,1982	-0,4496	-0,9434	-0,6730
3	0,1919	0	-1,2725	-0,5400	-0,1845	-0,0461	-0,8322	-0,2037
4	0,2573	-0,28	-1,0139	-0,5005	-0,2500	0,0495	-0,5903	0,2183
5	0,4385	0	-0,7372	-0,4834	-0,4278	-0,1069	-0,2817	0,5029
6	0,7608	1	-0,4684	-0,4977	-0,7397	-0,5849	0,0102	0,6178
7	1,2466	3	-0,1920	-0,5542	-1,1937	-1,4984	0,2688	0,5846
8	1,8348	6	0,06558	-0,6424	-1,7035	-2,8259	0,4533	0,4562

Таблица 3

Номер точки	$p$	$100u$	$w$	$\vartheta$	$\tau_1(1)$	$\tau_2(1)$	$\tau_0$	$\mu_0$
1	1,6958	5	-1,7147	0,08205	-1,5965	-2,3991	-1,1273	-2,7789
2	1,3246	3	-1,5391	0,01522	-1,2741	-1,5185	-1,3489	-2,6142
3	0,9058	0,51	-1,1072	-0,1164	-0,8962	-0,4281	-1,7646	-1,0081
4	1,2004	1	-0,9156	-0,1254	-1,1892	-0,6973	-1,4630	0,3990
5	1,9287	3	-0,6451	-0,0677	-1,8925	-1,6731	-0,4959	1,5980
6	2,5359	5	-0,4580	-0,0138	-2,4583	-2,6146	0,0775	1,7549

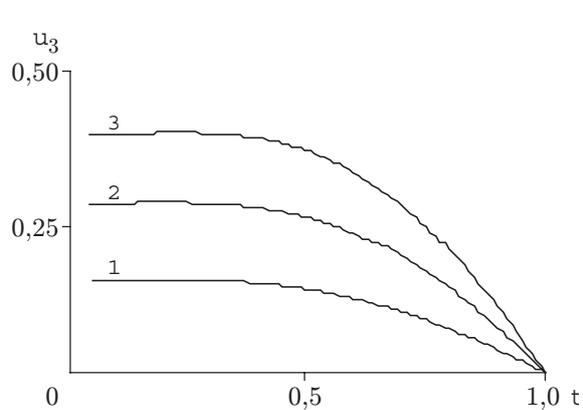


Рис. 4

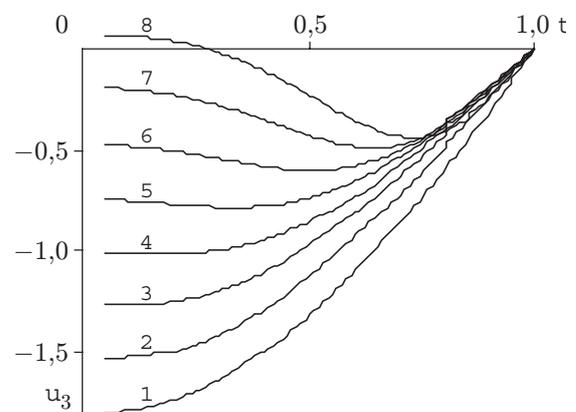


Рис. 5

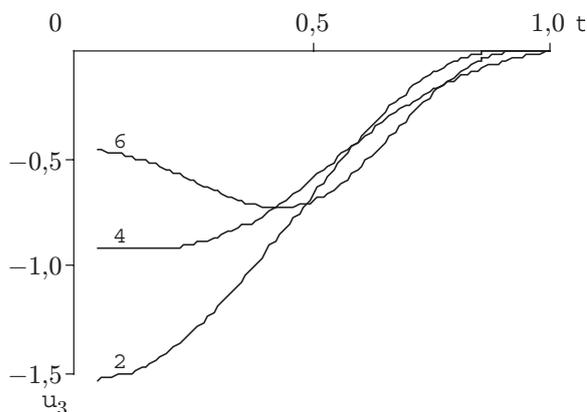


Рис. 6

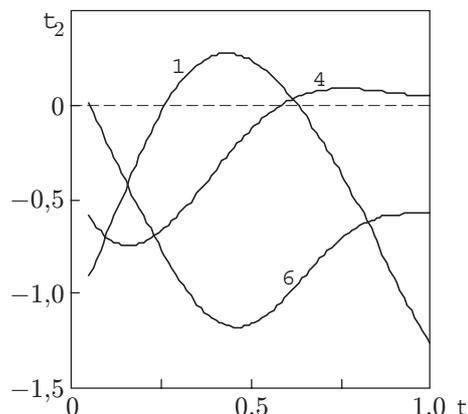


Рис. 7

появляется одна точка, у прогибов третьей ветви — две точки перегиба. Высота купола увеличивается при положительных прогибах и уменьшается при отрицательных (до полного выворачивания купола при  $w = -2$ ).

Рис. 7 демонстрирует эволюцию кольцевых усилий в выпученных состояниях второй ветви при переходе от точки 1 к точке 6 в соответствии с табл. 2. Возникшая во внутренней кольцевой области купола зона растяжения (кривая 1) постепенно распространяется к опорному контуру (кривая 4), что и приводит к его растяжению. За точкой 4 зона растяжения у контура исчезает и возникает зона сжатия (кривая 6).

**Заключение.** Численные решения рассматриваемой нелинейной задачи получены методом стрельбы с контролируемой точностью (рис. 4–7). Разветвленные траектории деформации купола представлены плоскими проекциями (рис. 1–3). В отличие от пластины траектории купола состоят из изолированных ветвей, причем разрыв происходит при сколь угодно малых отклонениях купола от пластины и в окрестности точек бифуркации траектории деформации пластины. Поэтому возможна скачкообразная потеря устойчивости равновесных состояний купола. При сжимающей нагрузке обнаружено наличие равновесных состояний с растянутым опорным контуром купола.

Данная в работе формулировка уравнений позволяет ставить и решать сильно нелинейные осесимметричные задачи для изотропных и трансверсально-изотропных оболочек при иных нагрузках и граничных условиях.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шкутин Л. И. Численный анализ осесимметричных форм выпучивания конических оболочек // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 6. С. 159–165.
2. Шкутин Л. И. Численный анализ осесимметричных форм выпучивания радиально сжатой пластины // Изв. вузов / Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. Спецвыпуск: Нелинейные проблемы механики сплошных сред. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 2003. С. 299–304.
3. Шкутин Л. И. Численный анализ осесимметричных форм выпучивания пластин при радиальном сжатии // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 1. С. 107–114.

Поступила в редакцию 3/ХІІ 2003 г.