

УДК 532.72; 669.015.23

## ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В УПРУГОЙ СФЕРЕ, СОДЕРЖАЩЕЙ КОНИЧЕСКИЕ ВЫРЕЗЫ

В. В. Мельников

Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики,  
456770 Снежинск  
E-mail: snow@vniitf.ru

С использованием метода, основанного на вариационном принципе Кастильяно, решена осесимметричная термоупругая задача для сферы с коническими вырезами в полюсах при действии квазистационарного температурного поля, зависящего от меридионального угла и радиуса сферы. При этом в качестве координатных функций применялись ортонормированные системы полиномов. Представлены результаты численного расчета напряженного состояния сферического тела.

Ключевые слова: уравнения равновесия, граничные условия, функции напряжений, потенциальная энергия деформации.

Исследованию термоупругого состояния толстостенной сферы посвящен ряд работ (см., например, [1–3]). В работе [1] приведены выражения для напряжений и перемещений в случае действия объемных сил, потенциал которых является гармонической функцией радиуса сферы. Подобная задача рассматривалась в [2], причем полученное решение используется и для случая сплошного сферического тела. Исследование напряженно-деформированного состояния сферического тела при действии произвольного температурного поля, зависящего от радиуса и меридионального угла, выполнено в работе [3]. Однако в указанных работах рассматривалось только толстостенное сферическое тело, не содержащее конических вырезов.

Настоящая работа является продолжением работы [4], в которой представлено решение термоупругой задачи для полого сферического тела с одним коническим вырезом.

Пусть в толстостенной сфере, содержащей в полюсах два конических выреза, действует осесимметричное температурное поле  $T = T(r, \theta)$  (рис. 1). Необходимо определить напряженное состояние тела при отсутствии поверхностных и объемных нагрузок. Задача включает уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial \tau}{\partial \theta} + 2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta \right] &= 0, \\ \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + (\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{r\theta} \right] &= 0, \end{aligned}$$

уравнения неразрывности деформаций

$$\begin{aligned} r \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial r} + \operatorname{ctg} \theta \left[ \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial \theta} - \operatorname{ctg} \theta (\varepsilon_\theta - \varepsilon_\varphi) - \gamma_{r\theta} \right] - \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi &= 0, \\ \frac{\partial^2 (r\varepsilon_\varphi)}{\partial r^2} - \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r} \left[ \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial \theta} - \frac{\partial (r\gamma_{r\theta})}{\partial r} \right] &= 0 \end{aligned}$$

и граничные условия

$$\sigma_r|_{r=a} = \sigma_r|_{r=b} = \tau_{r\theta}|_{r=a} = \tau_{r\theta}|_{r=b} = 0, \quad \sigma_\theta|_{\theta=\theta_1} = \sigma_\theta|_{\theta=\theta_2} = \tau_{r\theta}|_{\theta=\theta_1} = \tau_{r\theta}|_{\theta=\theta_2} = 0.$$

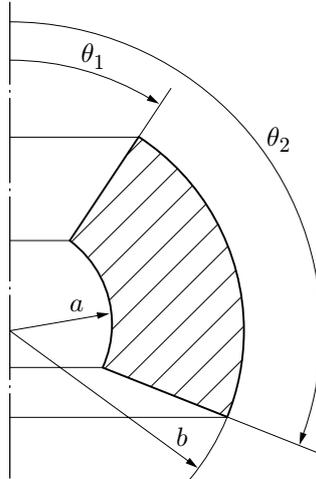


Рис. 1. Геометрия и размеры сферы

Здесь  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_{r\theta}$ ,  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\varphi$ ,  $\varepsilon_\theta$ ,  $\gamma_{r\theta}$  — соответственно радиальные, окружные, меридиональные и касательные напряжения и деформации, согласно закону Гука связанные соотношениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= [\sigma_r - \nu(\sigma_\varphi + \sigma_\theta)]/E + \alpha T, & \varepsilon_\varphi &= [\sigma_\varphi - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)]/E + \alpha T, \\ \varepsilon_\theta &= [\sigma_\theta - \nu(\sigma_\varphi + \sigma_r)]/E + \alpha T, & \gamma_{r\theta} &= 2(1 + \nu)\tau_{r\theta}/E, \end{aligned}$$

$\alpha$ ,  $\nu$ ,  $E$  — коэффициент теплового расширения, коэффициент Пуассона и модуль упругости, которые полагаются зависящими от температуры, а следовательно, от координат  $r$ ,  $\theta$ .

Используя вариационный принцип Кастильяно, найдем такое напряженное состояние исследуемого тела, при котором потенциальная энергия деформации принимает минимальное значение, т. е.  $\delta V = 0$ , и выполняются уравнения неразрывности деформаций.

Выражение для потенциальной энергии имеет вид

$$\begin{aligned} V = \int_a^b \int_{\theta_1}^{\theta_2} & \left[ \frac{1}{2E} (\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 + \sigma_\theta^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_r \sigma_\varphi + \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\varphi \sigma_\theta) + \right. \\ & \left. + \frac{1 + \nu}{E} \tau_{r\theta}^2 + \alpha T (\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_\theta) \right] r^2 \sin \theta d\theta dr. \quad (1) \end{aligned}$$

В качестве искоемых функций напряжений примем одно из решений уравнений равновесия [5]

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r^3} \left[ 2rW_1 + \left( \frac{\partial W_2}{\partial \theta} + \text{ctg} \theta W_2 \right) \right], & \sigma_\varphi &= \frac{1}{r^2} \left( - \frac{\partial^2 W_1}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial W_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \theta} \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{r^2} \left( - \text{ctg} \theta \frac{\partial W_1}{\partial \theta} + 2r \frac{\partial W_1}{\partial r} + \text{ctg} \theta \frac{\partial W_2}{\partial r} \right), & \tau_{r\theta} &= \frac{1}{r^3} \left( - r \frac{\partial W_1}{\partial \theta} + W_2 \right), \end{aligned}$$

где  $W_1$ ,  $W_2$  — произвольные функции  $r$  и  $\theta$ , выбираемые таким образом, чтобы выполнялись нулевые граничные условия на поверхностях  $r = a$ ,  $r = b$  для напряжений  $\sigma_r$ ,  $\tau_{r\theta}$  и на поверхностях  $\theta = \theta_1$ ,  $\theta = \theta_2$  для напряжений  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_{r\theta}$ . Функции  $W_1$ ,  $W_2$  примем в виде

$$W_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}^1 F_{1m}(\theta) R_{1n}(r), \quad W_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}^2 F_{2m}(\theta) R_{2n}(r),$$

где  $F_{1m}(\theta)$ ,  $F_{2m}(\theta)$ ,  $R_{1n}(r)$ ,  $R_{2n}(r)$  — координатные функции, удовлетворяющие следующим граничным условиям:

$$F_{1m}(\theta_1) = F_{1m}(\theta_2) = F'_{1m}(\theta_1) = F'_{1m}(\theta_2) = 0, \quad F_{2m}(\theta_1) = F_{2m}(\theta_2) = 0, \\ R_{1n}(a) = R_{1n}(b) = 0, \quad R_{2n}(a) = R_{2n}(b) = 0,$$

$A_{mn}^1$ ,  $A_{mn}^2$  — константы, определяемые ниже; штрих обозначает производную. Для координатных функций  $F_{1m}(\theta)$  примем ортонормированные полиномы вида

$$F_{1m}(\theta) = \sqrt{\frac{2^7 m!(2m+9)}{\pi(m+9)!}} \Gamma\left(\frac{9}{2}\right) \left[ \left( \frac{2\theta - \theta_1 - \theta_2}{\theta_2 - \theta_1} \right)^2 - 1 \right]^2 C_m^{9/2} \left( \frac{2\theta - \theta_1 - \theta_2}{\theta_2 - \theta_1} \right),$$

для координатных функций  $F_{2m}(\theta)$ ,  $R_{1n}(r)$ ,  $R_{2n}(r)$  — ортонормированные полиномы вида

$$F_{2m}(\theta) = \sqrt{\frac{2^7 m!(2m+5)}{\pi(m+4)!}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \left[ \left( \frac{2\theta - \theta_1 - \theta_2}{\theta_2 - \theta_1} \right)^2 - 1 \right] C_m^{5/2} \left( \frac{2\theta - \theta_1 - \theta_2}{\theta_2 - \theta_1} \right), \\ R_{1n}(r) = R_{2n}(r) = \sqrt{\frac{2^7 n!(2n+5)}{\pi(n+4)!}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \left[ \left( \frac{2r - a - b}{b - a} \right)^2 - 1 \right] C_n^{5/2} \left( \frac{2r - a - b}{b - a} \right),$$

где  $C_k^{9/2}(x)$ ,  $C_k^{5/2}(x)$  — многочлены Гегенбауэра [6] степени  $k$  и порядков  $9/2$  и  $5/2$ .

Варьируя потенциальную энергию, т. е. дифференцируя выражение (1) по  $A_{mn}^1$  и  $A_{mn}^2$ , получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (a_{ijmn}^{11} A_{mn}^1 + a_{ijmn}^{12} A_{mn}^2) = d_{ij}^1, \quad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (a_{ijmn}^{21} A_{mn}^1 + a_{ijmn}^{22} A_{mn}^2) = d_{ij}^2. \quad (2)$$

Здесь

$$d_{ij}^k = \int_a^b \int_{\theta_1}^{\theta_2} \alpha T(r, \theta) (u_{ij}^{kr} + u_{ij}^{k\varphi} + u_{ij}^{k\theta}) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta, \\ a_{ijmn}^{ks} = \int_a^b \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left\{ \frac{1}{E} (u_{ij}^{kr} u_{mn}^{sr} + u_{ij}^{k\varphi} u_{mn}^{s\varphi} + u_{ij}^{k\theta} u_{mn}^{s\theta}) - \right. \\ \left. - \frac{\nu}{E} [u_{ij}^{kr} (u_{mn}^{s\varphi} + u_{mn}^{s\theta}) + u_{ij}^{k\varphi} (u_{mn}^{s\theta} + u_{mn}^{sr}) + u_{ij}^{k\theta} (u_{mn}^{sr} + u_{mn}^{s\varphi})] + \right. \\ \left. + \frac{2(1+\nu)}{E} u_{ij}^{k\tau} u_{mn}^{s\tau} \right\} r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta, \\ u_{mn}^{1r} = \frac{2F_{1m}R_{1n}}{r^2}, \quad u_{mn}^{2r} = \frac{F'_{2m}R_{2n} + \operatorname{ctg} \theta F_{2m}R_{2n}}{r^3}, \quad u_{mn}^{1\varphi} = \frac{rF_{1m}R'_{1n} - F'_{1m}R_{1n}}{r^2}, \\ u_{mn}^{2\varphi} = \frac{F'_{2m}R'_{2n}}{r^2}, \quad u_{mn}^{1\theta} = \frac{rF_{1m}R'_{1n} - \operatorname{ctg} \theta F'_{1m}R_{1n}}{r^2}, \quad u_{mn}^{2\theta} = \frac{\operatorname{ctg} \theta F'_{2m}R'_{2n}}{r^2}, \\ u_{mn}^{1\tau} = -\frac{F'_{1m}R_{1n}}{r^2}, \quad u_{mn}^{2\tau} = \frac{F_{2m}R_{2n}}{r^3}, \quad k, s = 1, 2, \quad i, j, m, n = 0, 1, 2, \dots$$

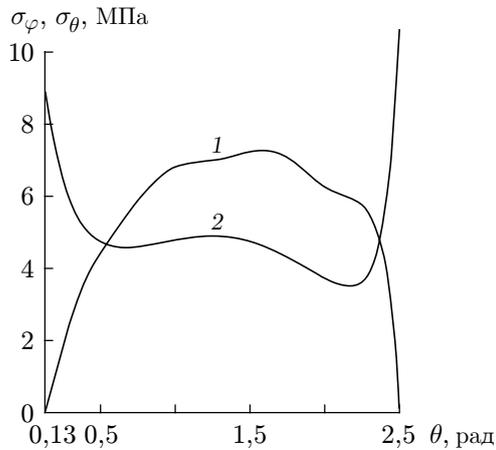


Рис. 2

Рис. 2. Зависимости окружного  $\sigma_\varphi$  и меридионального  $\sigma_\theta$  напряжений от угла  $\theta$  при  $r = b$ :

1 —  $\sigma_\theta$ , 2 —  $\sigma_\varphi$

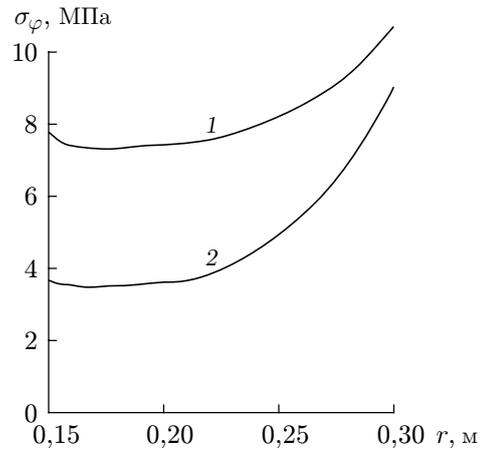


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость окружного напряжения  $\sigma_\varphi$  от радиуса  $r$  при  $\theta = \theta_2$  (1) и  $\theta = \theta_1$  (2)

Уравнения (2) решались при следующих исходных данных:  $a = 0,15$  м,  $b = 0,30$  м,  $\theta_1 = 0,13$  рад,  $\theta_2 = 2,5$  рад,  $\nu = 0,3$ ,  $E = 10^4$  МПа,  $\alpha = 7,3 \cdot 10^{-5}$  К $^{-1}$ ,  $T(r) = -0,213r^2 + 7,2r - 255$  К. Из анализа результатов численных экспериментов следует, что для получения приближенного решения рассматриваемой задачи в рядах (2) достаточно ограничиться значениями  $m = n = 18$ . При этом порядок системы уравнений (2) равен  $2 \times m \times n = 648$ .

На рис. 2, 3 приведены зависимости окружного и меридионального напряжений  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_\theta$  от радиуса  $r$  и угла  $\theta$ .

На рис. 2 видно, что при  $r = b$  окружные напряжения  $\sigma_\varphi$  достигают максимального значения на границах  $\theta = \theta_1$  и  $\theta = \theta_2$ . Это согласуется с результатами работы [4] и обусловлено более значительной деформацией тела вследствие изгиба сферы на границах  $\theta = \theta_1$ ,  $\theta = \theta_2$ . Меридиональные напряжения  $\sigma_\theta$  на этих границах равны нулю.

На рис. 3 представлена зависимость окружного напряжения  $\sigma_\varphi$  от радиуса  $r$  при  $\theta = \theta_1$ ,  $\theta = \theta_2$ . Видно, что при любых значениях  $r$  значения напряжений при  $\theta = \theta_2$  выше, чем при  $\theta = \theta_1$ . Это обусловлено тем, что при  $\theta = \theta_2$  вследствие большей свободы перемещения оболочки изгиб сферы больше, чем при  $\theta = \theta_1$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехтеоретиздат, 1958.
2. Боли Б. Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер. М.: Мир, 1964.
3. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. Киев: Наук. думка, 1970.
4. Литвинов Б. В., Мельников В. В. Температурные напряжения в упругом сферическом слое // Прикл. механика. 1983. Т. 19, № 4. С. 30–34.
5. Введенский Г. А., Ионов В. Н. О возможных формах общего решения уравнений равновесия в криволинейных координатах // Изв. вузов. Математика. 1964. № 6. С. 59–66.
6. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. М.: Наука, 1974. Т. 2.

Поступила в редакцию 3/ХІІ 2008 г.