УДК 533.6+517.944

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ ИЗОЭНТРОПИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ГАЗА

Ю. А. Чиркунов

Новосибирский государственный технический университет, 630092 Новосибирск
E-mail: chr01@rambler.ru

С помощью метода $\boldsymbol{A}$-операторов выполнена классификация по законам сохранения нулевого порядка системы уравнений изоэнтропического движения газа при $n \geqslant 2$. Установлено, что новые законы сохранения имеют место только для потенциального изоэнтропического движения газа Чаплыгина. В этом случае число нетривиальных законов сохранения наибольшее, причем n скалярных законов сохранения являются нелокальными. Показано, с какими дополнительными свойствами симметрии рассматриваемых уравнений связаны эти законы сохранения.

Ключевые слова: закон сохранения, классификация уравнений изоэнтропического движения газа, нелокальные законы сохранения, нелокальные симметрии, газ Чаплыгина.

Введение. Отысканию законов сохранения для систем дифференциальных уравнений посвящено большое количество работ. В частности, в работе [1] получена полная система законов сохранения нулевого порядка для уравнений движения совершенного газа в трехмерном случае. В [2] для уравнений движения политропного газа в результате действия операторов точечных симметрий на классические законы сохранения найдены дополнительные законы сохранения. В работе [2] также получен дополнительный закон сохранения для системы уравнений потенциального изоэнтропического движения политропного газа.

В настоящей работе методом $\boldsymbol{A}$-операторов [3] выполнена классификация по законам сохранения нулевого порядка системы уравнений изоэнтропического движения газа при $n \geqslant 2$. Показано, что условие изоэнтропического характера течения не приводит к появлению в этой системе (в отличие от обычной системы уравнений движения газа) новых законов сохранения. Методом $\boldsymbol{A}$-операторов выполнена классификация по законам сохранения нулевого порядка системы уравнений безвихревого изоэнтропического движения газа и системы уравнений потенциального изоэнтропического движения газа. Для последней системы наибольшее число нетривиальных законов сохранения имеет место в случае газа Чаплыгина, при этом n скалярных законов сохранения являются нелокальными. Для системы уравнений потенциального изоэнтропического движения газа проведена групповая классификация, позволяющая расширить множество нетривиальных законов сохранения нулевого порядка. Установлено, что в случае газа Чаплыгина эта система допускает наиболее широкую группу Ли преобразований.

Изоэнтропическое движение газа описывается уравнениями

$$\boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)u + f(\rho)\nabla\rho = \boldsymbol{0}, \qquad \rho_t + \boldsymbol{u} \cdot \nabla\rho + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-01-00497) и в рамках межрегионального Интеграционного проекта СО РАН № 103.

где t — время; $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})$ — вектор скорости; $\rho = \rho(t, \boldsymbol{x})$ — плотность; $\boldsymbol{x} = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$; $f = f(\rho) = c^2/\rho$; $c = c(\rho) > 0$ — скорость звука.

В случае безвихревого изоэнтропического движения к системе (1) добавляется уравнение

$$\nabla \Lambda \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}. \tag{2}$$

Введя потенциал $\varphi = \varphi(t, \boldsymbol{x})$ вектора скорости

$$\boldsymbol{u} = \nabla \varphi \tag{3}$$

и проинтегрировав уравнение импульса в системе (1), получим интеграл Коши — Лагранжа

$$\varphi_t + |\nabla \varphi|^2/2 + i(\rho) = 0, \tag{4}$$

где $i = i(\rho)$ — удельная энтальпия $(i'(\rho) > 0)$.

С использованием метода $\boldsymbol{A}$-операторов решается задача классификации уравнений (1)–(4) по законам сохранения нулевого порядка и установления для этих уравнений дополнительных свойств симметрии, обусловленных новыми законами сохранения.

1. Законы сохранения. Законом сохранения нулевого порядка для системы (S) дифференциальных уравнений первого порядка с независимыми переменными t, $\boldsymbol{x}$ и зависимыми переменными $\boldsymbol{u}$, ρ, φ называется соотношение вида [2]

$$(\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{A})_{(S)} = 0,$$

где $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \rho, \varphi) = (A^0, A^1, \ldots, A^n)$; $\boldsymbol{D} = (D_0, D_1, \ldots, D_n)$; $D_i = D_{x^i}$ — оператор полного дифференцирования по переменной x^i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$; $\boldsymbol{x}^0 = t$. В газовой динамике физический смысл закона сохранения $\boldsymbol{A} = (A^0, A^1, \ldots, A^n)$ определяется компонентой A^0, представляющей собой плотность в законе сохранения, и вектором потока $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}_1 - A^0 \boldsymbol{u}$, где $\boldsymbol{A}_1 = (A^1, \ldots, A^n)$.

В качестве порождающего закона сохранения $\boldsymbol{A}$ [3] принимается закон сохранения импульса

$$A^0 = \rho \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a}, \qquad \boldsymbol{B} = p \boldsymbol{a},$$

где $\boldsymbol{a}$ — постоянный фиксированный единичный вектор; p — давление.

Результаты проведенной классификации позволяют сделать следующие выводы.

1. Множество нетривиальных законов сохранения нулевого порядка для системы (1), описывающей изоэнтропическое движение газа, в случае произвольной функции $f(\rho)$ исчерпывается классическими законами сохранения. Расширение этого множества происходит только для политропного газа с показателем адиабаты, равным $(n + 2)/n$. В этом случае выполняются также законы сохранения

$$\begin{gathered} A^0 = t(\rho |\boldsymbol{u}|^2 + np) - \rho \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{B} = p(2t\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x}), \\ A^0 = t^2(\rho |\boldsymbol{u}|^2 + np) - \rho \boldsymbol{x} \cdot (2t\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{B} = 2tp(t\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x}), \end{gathered} \tag{5}$$

полученные в [2].

2. Множество нетривиальных законов сохранения нулевого порядка для системы (1), (2), описывающей безвихревое изоэнтропическое движение газа, в случае произвольной функции $f(\rho)$ исчерпывается классическими законами сохранения и законом сохранения

$$A^0 = \boldsymbol{u} \cdot \operatorname{div} \Omega(t, \boldsymbol{x}),$$

$$B = (|\boldsymbol{u}|^2/2 + i(\rho)) \operatorname{div} \Omega(t, \boldsymbol{x}) + \Omega_t(t, \boldsymbol{x}) \langle \boldsymbol{u} \rangle - (\boldsymbol{u} \cdot \operatorname{div} \Omega(t, \boldsymbol{x})) \boldsymbol{u}$$

($\Omega(t, \boldsymbol{x})$ — произвольный антисимметричный тензор ранга 2 в $\mathbb{R}^n$), являющимся следствием безвихревого характера движения. Расширение этого множества происходит только для политропного газа с показателем адиабаты, равным $(n+2)/n$. В этом случае справедливы также законы сохранения (5).

3. Множество нетривиальных законов сохранения нулевого порядка для системы (1)–(4), описывающей потенциальное изоэнтропическое движение газа, в случае произвольной функции $f(\rho)$ исчерпывается классическими законами сохранения. Дополнительные законы сохранения имеют место только при $f(\rho) = \alpha\rho^{\gamma-2}$ ($\alpha \neq 0$; γ — произвольные постоянные).

При $\gamma \neq -1, (n+2)/n$ выполняется также закон сохранения

$$\begin{gathered} A^0 = \rho[(\gamma(n+2)-n)t|\boldsymbol{u}|^2/2 - (\gamma n-(n+2))(ti(\rho)+\varphi) + (\gamma+1)(ntp/\rho - (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}))], \\ \boldsymbol{B} = 2(n+1)t\rho^2 i'(\rho)\boldsymbol{u} - (\gamma+1)p(nt\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x}), \end{gathered} \tag{6}$$

эквивалентный закону сохранения, приведенному в [2] для политропного газа с уравнением состояния $p = \alpha\rho^\gamma$ ($\alpha = \text{const} \neq 0$) при $\gamma \neq \pm 1$.

При $\gamma = (n+2)/n$ справедливы также законы сохранения (5).

При $\gamma = -1$ (газ Чаплыгина) помимо закона сохранения (6) выполняется закон сохранения

$$A^0 = \rho\boldsymbol{b}\cdot[(|\boldsymbol{u}|^2/2 - p/\rho - (\rho i(\rho))')\boldsymbol{x} - \varphi\boldsymbol{u}], \qquad \boldsymbol{B} = p(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{u} + \varphi\rho^2 i'(\rho)\boldsymbol{b}, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{b}$ — произвольный постоянный единичный вектор.

Формулы (7) определяют n независимых законов сохранения для системы (1)–(4). Следовательно, в случае газа Чаплыгина эта система имеет наибольшее число нетривиальных законов сохранения нулевого порядка.

Закон сохранения (6) при $\gamma \neq (n+2)/n$ и закон сохранения (7) при $\gamma = -1$ являются нелокальными законами сохранения для системы (1) с нелокальной переменной φ. Таким образом, система (1) имеет нетривиальные нелокальные законы сохранения нулевого порядка, зависящие от нелокальной переменной $\varphi = \varphi(t, \boldsymbol{x})$, тогда и только тогда, когда уравнение состояния газа задается соотношением $f(\rho) = \alpha\rho^{\gamma-2}$, где $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq (n+2)/n$ — произвольные постоянные. Соответствующие нелокальные законы сохранения определяются по формулам (6), (7). При этом наибольшее число таких законов сохранения имеет место в случае газа Чаплыгина.

2. Групповые свойства. Для получения ответа на вопрос о том, какими свойствами симметрии уравнений, описывающих потенциальное изоэнтропическое движение газа, обусловлено наличие дополнительных законов сохранения, рассматривается задача групповой классификации системы уравнений (1)–(4) относительно произвольного элемента $f(\rho)$.

Преобразования эквивалентности, сохраняющие дифференциальную структуру системы (1)–(4), задаются соотношениями

$$t' = at, \quad \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}, \quad \varphi' = \frac{\varphi}{a} + abt, \quad \rho' = k\rho, \quad \boldsymbol{u}' = \frac{\boldsymbol{u}}{a},$$

где a, b, k ($ak \neq 0$) — произвольные постоянные. При этом произвольный элемент преобразуется по формуле

$$f'(\rho') = \frac{1}{a^2 k}\, f\Big(\frac{\rho'}{k}\Big).$$

Ядро основных групп Ли преобразований системы (1)–(4) порождается операторами

$$\partial_t, \quad \partial_{\boldsymbol{x}}, \quad t\,\partial_t + \boldsymbol{x}\cdot\partial_{\boldsymbol{x}} + \varphi\,\partial_\varphi, \quad t\,\partial_{\boldsymbol{x}} + \partial_{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{x}\,\partial_\varphi, \quad Q\langle\boldsymbol{x}\rangle\cdot\partial_{\boldsymbol{x}} + Q\langle\boldsymbol{u}\rangle\cdot\partial_{\boldsymbol{u}}, \quad \partial_\varphi$$

(Q — произвольный антисимметричный тензор ранга 2 в $\mathbb{R}^n$) и является (с точностью до оператора ∂_φ) представлением группы Галилея в пространстве $\mathbb{R}^{2n+2}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \varphi)$.

Расширение основной группы имеет место только при $f(\rho) = \alpha\rho^{\gamma-2}$, где $\alpha \neq 0$; γ — произвольные постоянные.

При $\gamma \neq \pm 1$, $(n+2)/n$ система (1)–(4) допускает дополнительный оператор

$$t\,\partial_t - \boldsymbol{u}\cdot\partial_{\boldsymbol{u}} - \varphi\,\partial_\varphi - \frac{2}{\gamma-1}\,\rho\,\partial_\rho. \tag{8}$$

При $\gamma = 1$ система (1)–(4) допускает дополнительный оператор

$$t\,\partial_\varphi - \rho\,\partial_\rho.$$

При $\gamma = (n+2)/n$ система (1)–(4) допускает два дополнительных оператора: оператор (8) и оператор

$$t^2\,\partial_t + t\boldsymbol{x}\cdot\partial_{\boldsymbol{x}} + (\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{u})\cdot\partial_{\boldsymbol{u}} + (1/2)|\boldsymbol{x}|^2\,\partial_\varphi - nt\rho\,\partial_\rho.$$

При $\gamma = -1$ (газ Чаплыгина) система (1)–(4) допускает следующие дополнительные операторы: оператор (8) и нелокальный векторный оператор

$$\boldsymbol{x}\partial_t + \varphi\partial_{\boldsymbol{x}} + (|\boldsymbol{u}|^2/2 - 1/\rho^2)\,\partial_{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\partial_{\boldsymbol{u}} - \rho\,\partial_\rho), \tag{9}$$

где $\varphi = \varphi(t, \boldsymbol{x})$ — нелокальная переменная. Следовательно, именно в случае газа Чаплыгина система (1)–(4) допускает наиболее широкую группу Ли преобразований.

Закон сохранения (5) является (с точностью до тривиального закона сохранения) результатом действия на закон сохранения импульса канонического оператора Ли — Бэклунда [2], эквивалентного оператору (9).

Замечание. При групповой классификации системы

$$\varphi_t + |\nabla\varphi|^2/2 + i(\rho) = 0, \qquad \rho_t + \nabla\varphi\cdot\nabla\rho + \rho\,\Delta\varphi = 0,$$

являющейся подсистемой системы (1)–(4), газ Чаплыгина не имеет особых свойств.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шмыглевский Ю. Д.** Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
2. **Ибрагимов Н. Х.** Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
3. **Чиркунов Ю. А.** Метод $\boldsymbol{A}$-операторов и законы сохранения для уравнений газовой динамики // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 2. С. 53–60.

Поступила в редакцию 4/XII 2008 г.,
в окончательном варианте — 12/II 2009 г.