Теплофизика и аэромеханика, 2014, том 21, № 1

УДК 532.5+536.2

Свободная конвекция на наклонной пластине при изменениях вязкости и температуропроводности

Г. Палани[1], Дж. Д. Кирубавати[1], Кван Ёнг Ким[2]

[1]*Гос. колледж искусств им. др. Амбедкара, Ченнай, Индия*

[2]*Университет Инха, Инчеон, Республика Корея*

E-mail: gpalani32@yahoo.co.in

В представленном численном анализе исследовано конвективное течение вязкой несжимаемой жидкости по наклонной полубесконечной пластине с учетом зависимости вязкости и температуропроводности от температуры. Определяющие уравнения с соответствующими краевыми условиями преобразованы к безразмерной форме с помощью соответствующих безразмерных величин. Вследствие сложности преобразованных уравнений математической модели получить аналитическое решение невозможно. Поэтому схема Кранка–Николсона, как наиболее эффективный и безусловно устойчивый неявный конечно-разностный метод, была использована для решения преобразованных уравнений. Численные результаты получены для различных значений вязкости, теплопроводности, угол наклона, критериев Грасгофа и Прандтля. Результаты подробного исследования изменения скорости, температуры, напряжения сдвига и числа Нуссельта представлены графически. Для проверки точности представленных численных результатов проведено сравнение с имеющимися в литературе данными и установлено хорошее согласование.

Ключевые слова: наклонная пластина, переменная вязкость, конечные разности, число Нуссельта.

Введение

Естественная конвекция жидкости, возникающая вследствие градиентов температуры, очень важна в ряде промышленных применений. Кроме того, плавучесть очень существенна в окружающей среде, поскольку разница температур между землей и воздухом может привести к сложной структуре потока, и в замкнутых пространствах, например, в вентилируемых и отапливаемых помещениях, реакторах.

Благодаря широкой распространенности в естественно происходящих процессах задача о двумерной свободной конвекции вдоль полубесконечной плоской пластины с различными граничными условиями в последние несколько лет привлекает внимание многих исследователей.

Впервые решение задачи о свободноконвективном обтекании полубесконечной пластины с использованием интегрального метода импульсов было опубликовано в работе [1]. В работе [2] было представлено свободноконвективное обтекание полубесконечной изотермической вертикальной пластины с применением автомодельных переменных. Нестационарная свободная конвекция вдоль полубесконечной вертикальной пластины для условий постоянной температуры и теплового потока с использованием интегрального метода впервые была изучена в работе [3]. В работе [4] впервые была представлена задача о конвекции вдоль полубесконечной вертикальной изотермической пластины с использованием сходящегося условно устойчивого явного конечно-разностного метода. С помощью быстро сходящейся, безусловно устойчивой и более точной неявной разностной схемы типа Кранка–Николсона эта задача исследовалась в работе [5]. Авторами [6] были получены автомодельные решения задачи о ламинарной свободной конвекции воздуха и воды в пограничном слое на горизонтальной, наклонной и вертикальной плоских пластинах со степенной зависимостью температуры или поверхностной плотности теплового потока от осевой координаты. В работе [7] представлены конечно-разностые решения для нестационарной естественной конвекции в пограничном слое на наклонной пластине с переменной температурой поверхности.

Во всех вышеперечисленных работах рассматриваются жидкости с постоянными свойствами. Однако жидкости, которые являются важными в теории смазки, где генерируемое внутренним трением тепло и соответствующее повышение температуры влияют на их вязкость и теплопроводность, не могут рассматриваться таким образом. Физические свойства жидкостей, такие как вязкость и теплопроводность, могут значительно изменяться с температурой [8].

Задача с температурно-зависимыми свойствами осложняется еще и тем, что свойства различных жидкостей по-разному зависят от температуры. Авторы работы [9] получили различные соотношения между физическими свойствами жидкостей и температурой. В работе [10] рассматривались алгебраические и экспоненциальные температурные зависимости вязкости для анализа задачи течения ньютоновской жидкости в канале с резким подогревом или охлаждением. Позже исследовалось влияние значительных изменений вязкости на конвективный перенос тепла в водонасыщенных пористых средах [11]. Течение вязкой несжимаемой жидкости вдоль вертикальной пластины с изменением вязкости и теплопроводности было изучено в работе [12].

Автор работы [13] изучал магнитное гидродинамическое (МГД) обтекание нагреваемой вертикальной пластины при изменении вязкости и теплопроводности с температурой. Свободная конвекция вдоль вертикальной пористой пластины с однородным отсосом, нагреваемой тепловым излучением, была численно исследована в работе [14] с учетом переменной вязкости.

Автором работы [15] изучалась свободная нестационарная МГД конвекция вдоль пластины с учетом влияния переменной вязкости и теплового излучения. В работе [16] исследовался стационарный локально-однонаправленный гравитационный дренаж тонкого ривулета ньютоновской жидкости с температурнозависимой вязкостью, текущего по слабонаклонной поверхности, температура которой равномерно выше или ниже температуры окружающей атмосферы. Стационарный ламинарный пограничный слой при свободной конвекции, создаваемой влиянием излучения, описан в работе [17] с учетом зависимости вязкости, теплопроводности и плотности от температуры. Течение вязкой несжимаемой жидкости вдоль непрерывно движущейся полубесконечной пластины с переменными вязкостью и температурой представлено в работе [18].

Авторы работы [19] проанализировали влияние теплового излучения и температуропроводности на растягиваюшейся поверхности с неравномерным потоком тепла. Работа [20] посвящена исследованию влияния переменной вязкости на поток теплового излучения в течении вязкой несжимаемой электропроводной жидкости вдоль движущейся вертикальной пластины с равномерным отсосом и тепловым потоком. Недавно были представлены результаты численного решения задачи о свободной конвекции при обтекании вертикальной пластины с учетом влияния переменных вязкости и теплопроводности с использованием неявной конечно-разностной схемы [21].

Из литературного обзора следует, что влияние изменения вязкости и теплопроводности с изменением температуры играет важную роль в механике жидкости. Влияние изменения вязкости и теплопроводности на свободную конвекцию при обтекании полубесконечной изотермической наклонной пластины рассматривается в настоящем исследовании. Предполагается, что температура пластины выше температуры окружающей жидкости. При этом теплопроводность жидкости считается линейной функцией переменной температуры, а вязкость является экспоненциальной функцией температуры.

В процессе решения задачи о течении жидкости разработаны и применяются различные математические методы, в том числе и метод конечных разностей. Приведенные к безразмерной форме определяющие уравнения решаются численно с помощью неявной конечно-разностной схемы типа Кранка–Николсона.

Изучается влияние изменений вязкости и теплопроводности на скорость, температуру, напряжение сдвига и интенсивность теплообмена в нестационарном течении.

1. Математическая постановка задачи

Рассмотрим математическую постановку задачи ламинарного нестационарного переходного двумерного обтекания полубесконечной изотермической наклонной пластины, основанную на следующих предположениях:

– угол наклона пластины относительно горизонтальной поверхности равен ϕ;

– ось x направлена вдоль пластины, ось y — по нормали к ее поверхности;

– первоначально пластина и жидкость имеют одинаковую температуру T'_∞; в момент времени $t' > 0$ температура пластины мгновенно изменяется до температуры T'_w;

– влияние вязкой диссипации в уравнении энергии предполагается незначительным;

– все физические свойства жидкости остаются постоянными, за исключением вязкости, которая меняется экспоненциально с температурой жидкости, теплопроводности, которая изменяется линейно с температурой жидкости, и плотности, влияние которой в объемной силе уравнения импульса учитываются в приближении Буссинеска.

При этих предположениях уравнения сохранения для нестационарного двумерного ламинарного пограничного слоя рассматриваемой задачи могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t'}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=g\beta\cos\phi\frac{\partial}{\partial x}\int_y^\infty\left(T'-T'_\infty\right)\partial y+g\beta\sin\phi\left(T'-T'_\infty\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t'}+u\frac{\partial T'}{\partial x}+v\frac{\partial T'}{\partial y}=\frac{1}{\rho C_p}\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T'}{\partial y}\right), \tag{3}$$

где u и v — компоненты скорости в направлениях x и y соответственно, ρ — плотность жидкости, T' — температура жидкости в пограничном слое, t' — время, T'_∞ — температура жидкости вдали от пластины, β — это объемный коэффициент теплового расширения, C_p — удельная теплоемкость, ϕ — это угол наклона к горизонтали, μ — коэффициент переменной динамической вязкости, g — ускорение свободного падения, k — переменная теплопроводность жидкости.

Начальные и граничные условия имеют следующий вид:

$$
\begin{gathered}
t' \le 0: \quad u = 0, \quad v = 0, \quad T' = T'_\infty \quad \text{для всех} \ \ y, \\
t' > 0: \quad u = 0, \quad v = 0, \quad T' = T'_\infty \quad \text{при} \ \ y = 0, \\
u = 0, \quad T' = T'_\infty \quad \text{при} \ \ x = 0, \\
u \to 0, \quad T' = T'_\infty \quad \text{при} \ \ y \to \infty.
\end{gathered} \tag{4}
$$

Введем следующие безразмерные переменные:

$$
\begin{gathered}
X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}\mathrm{Gr}^{1/4}, \quad U = \frac{uL}{\nu}\mathrm{Gr}^{-1/2}, \quad V = \frac{vL}{\nu}\mathrm{Gr}^{-1/4}, \quad t = \frac{\nu t'}{L^2}\mathrm{Gr}^{1/2}, \\
T = \frac{T' - T'_\infty}{T'_w - T'_\infty}, \quad \mathrm{Gr} = \frac{g\beta L^3 (T'_w - T'_\infty)}{\nu^2}, \\
\mathrm{Pr} = \frac{\mu_0 C_p}{\kappa_0}, \quad \nu = \frac{\mu_0}{\rho},
\end{gathered} \tag{5}
$$

где L — длина пластины, ν — кинематическая вязкость, Gr — число Грасгофа, Pr — число Прандтля, μ_0 и κ_0 — соответственно вязкость и теплопроводность при температуре T'_w, также имеются зависимости вязкости и теплопроводности от безразмерной температуры T, как предложено авторами работ [10, 12, 16, 19, 22]:

$$
\mu/\mu_0 = \mathrm{e}^{-\lambda T}, \tag{6}
$$

$$
k/k_0 = 1 + \gamma T, \tag{7}
$$

где λ и γ — соответственно параметры зависимостей изменения вязкости и теплопроводности, зависящие от характера жидкости. Уравнения (1)–(3) в безразмерной форме приводятся к следующему виду:

$$
\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \tag{8}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial X} + V\frac{\partial U}{\partial Y} = \mathrm{Gr}^{-1/4}\cos\phi \frac{\partial}{\partial X} Y \int_Y^\infty T\,dY + T\sin\phi + \\
+ \mathrm{e}^{\lambda T}\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - \lambda \mathrm{e}^{-XT}\left(\frac{\partial T}{\partial Y}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right),
\end{gathered} \tag{9}
$$

$$
\frac{\partial T}{\partial t} + U\frac{\partial T}{\partial X} + V\frac{\partial T}{\partial Y} = \frac{1+\gamma T}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} + \frac{\gamma}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial T}{\partial Y}\right)^2. \tag{10}
$$

Соответствующие начальные и граничные условия в безразмерной форме записываются следующим образом:

$$
\begin{gathered}
t \le 0: \quad U = 0, \quad V = 0, \quad T = 0 \ \text{ для всех } y, \\
t > 0: \quad U = 0, \quad V = 0, \quad T = 1 \ \text{ при } Y = 0, \\
U = 0, \quad T = 0 \quad \text{при } X = 0, \\
U \to 0, \ T \to 0 \quad \text{при } Y \to \infty.
\end{gathered} \tag{11}
$$

Уравнения(8)–(10) совместно с начальными и граничными условиями (11) описывают свободноконвективный нестационарный ламинарный пограничный слой на полубесконечной наклонной изотермической пластине с переменной вязкостью и теплопроводностью.

2. Численный метод

Двумерные нелинейные нестационарные связанные интегрально-дифференциальные уравнения (8)–(10) при начальных и граничных условиях (11) аппроксимируются конечными разностями и решаются с использованием безусловно устойчивой быстросходящейся неявной разностной схемы Кранка–Николсона. Конечно-разностные уравнения, соответствующие уравнениям (8)–(10), определяются следующими формулами:

$$\frac{\left[U_{i,j}^{k+1}-U_{i-1,j}^{k+1}+U_{i,j}^{k}-U_{i-1,j}^{k}+U_{i,j-1}^{k+1}-U_{i-1,j-1}^{k+1}+U_{i,j-1}^{k}-U_{i-1,j-1}^{k}\right]}{4\Delta X}+ \\ +\frac{\left[V_{i,j}^{k+1}-V_{i,j-1}^{k+1}+V_{i,j}^{k}-V_{i,j-1}^{k}\right]}{2\Delta Y}=0, \tag{12}$$

$$\frac{\left[U_{i,j}^{k+1}-U_{i,j}^{k}\right]}{\Delta t}+U_{i,j}^{k}\frac{\left[U_{i,j}^{k+1}-U_{i-1,j}^{k+1}+U_{i,j}^{k}-U_{i-1,j}^{k}\right]}{2\Delta X}+V_{i,j}^{k}\frac{\left[U_{i,j+1}^{k+1}-U_{i,j-1}^{k+1}+U_{i,j+1}^{k}-U_{i,j-1}^{k}\right]}{4\Delta Y}=$$

$$=\mathrm{Gr}^{-1/4}\cos\phi\frac{\partial}{\partial X}\int_{Y}^{\infty}TdY+\frac{1}{2}\left[T_{i,j}^{k+1}+T_{i,j}^{k}\right]\sin\phi+$$

$$+\mathrm{e}^{-\lambda\left[\left(T_{i,j}^{k+1}+T_{i,j}^{k}\right)/2\right]}\frac{\left[U_{i,j-1}^{k+1}-2U_{i,j}^{k+1}+U_{i,j+1}^{k+1}+U_{i,j-1}^{k}-2U_{i,j}^{k}+U_{i,j+1}^{k}\right]}{2(\Delta Y)^2}-$$

$$-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda\left[\left(T_{i,j}^{k+1}+T_{i,j}^{k}\right)/2\right]}\frac{\left[T_{i,j+1}^{k+1}-T_{i,j-1}^{k+1}+T_{i,j+1}^{k}-T_{i,j-1}^{k}\right]}{4\Delta Y}\frac{\left[U_{i,j+1}^{k+1}-U_{i,j-1}^{k+1}+U_{i,j+1}^{k}-U_{i,j-1}^{k}\right]}{4\Delta Y}, \tag{13}$$

$$\frac{\left[T_{i,j}^{k+1}-T_{i,j}^{k}\right]}{\Delta t}+U_{i,j}^{k}\frac{\left[T_{i,j}^{k+1}-T_{i-1,j}^{k+1}+T_{i,j}^{k}-T_{i-1,j}^{k}\right]}{2\Delta X}+V_{i,j}^{k}\frac{\left[T_{i,j+1}^{k+1}-T_{i,j-1}^{k+1}+T_{i,j+1}^{k}-T_{i,j-1}^{k}\right]}{4\Delta Y}=$$

$$=\frac{1+\gamma T_{i,j}^{k}}{\mathrm{Pr}}\frac{\left[T_{i,j-1}^{k+1}-2T_{i,j}^{k+1}+T_{i,j+1}^{k+1}+T_{i,j-1}^{k}-2T_{i,j}^{k}+T_{i,j+1}^{k}\right]}{2(\Delta Y)^2}+ \\ +\frac{\gamma}{\mathrm{Pr}}\left[\frac{\left[T_{i,j+1}^{k+1}-T_{i,j-1}^{k+1}+T_{i,j+1}^{k}-T_{i,j-1}^{k}\right]}{4\Delta Y}\right]^2. \tag{14}$$

Область интегрирования — прямоугольник со сторонами $X_{\max}=1$ и $Y_{\max}=16$, где $Y_{\max}$ соответствует координате $Y=\infty$, которая находится далеко за границами пограничных слоев импульса и энергии. Максимум Y был выбран равным 16 после ряда предварительных расчетов, в которых проверялось выполнение последних двух граничных условий (11). Индекс i обозначает узел сетки вдоль оси X, j — вдоль оси Y, и надстрочный индекс k

нумерует временной слой. В течение каждого шага по времени коэффициенты $U_{i,j}^{k}$ и $V_{i,j}^{k}$, входящие в разностные уравнения, рассматриваются как константы. Значения U, V и T при $t = 0$ известны для всех узлов сетки из начальных условий. Вычисления U, V и T на $(k + 1)$ шаге по времени с использованием значений с предыдущего k шага осуществляются следующим образом. Конечно-разностное уравнение (14) во всех внутренних узловых точках любого i-уровня является трехдиагональной системой уравнений. Такая система уравнений решается с помощью алгоритм Томаса [23]. Значения T известны в каждой узловой точке для любого i на $(k + 1)$ временном шаге. Используя эти значения в уравнении (13), находим U на каждом $(k + 1)$ шаге подобным образом. Теперь значения T и U известны на любом i-слое. Наконец, значения V вычисляются явно с помощью уравнения (12) в каждой узловой точке для любого i-слоя на $(k + 1)$ временном шаге. Этот процесс повторяется для всех i-слоев. Таким образом, найдены значения T, U и V для всех точек сетки в прямоугольной области на $(k + 1)$ временном шаге.

После ряда тестов с несколькими сетками с различными шагами были выбраны шаги по координатам $\Delta X = 0{,}05$, $\Delta Y = 0{,}25$ и шаг по времени $\Delta t = 0{,}01$. При тестировании размер пространственных шагов сетки уменьшался сначала на 50 % в одном направлении, затем в обоих направлениях, и результаты сравнивались. Сравнение показало, что при уменьшении размера ячейки на 50 % в X- и Y-направлениях результаты отличаются в четвертом знаке после запятой. Поэтому указанные шаги сетки можно считать приемлемыми для расчетов. Расчеты проводились до достижения стационарного состояния. Предполагалось, что стационарное решение получено, если абсолютная разница между значениями U, а также значениями T на двух последовательных шагах составляла менее 10^{-5} в узлах сетки. Локальная ошибка усечения равна $O(\Delta t^{2} + \Delta Y^{2} + \Delta X)$ и стремится к нулю при ΔT, ΔX и ΔY стремящихся к нулю, что показывает согласованность схемы. Для неявных конечно-разностных схем типа Кранка–Николсона доказана безусловная устойчивость в свободноконвективных потоках, в которых U всегда неотрицательна и V не положительна (см. [7]). Таким образом, согласованность и устойчивость неявной конечно-разностной схемы гарантирует сходимость.

3. Обсуждение результатов

В настоящем исследовании для λ, γ и Pr приняты следующие диапазоны значений (см. [8], [12]):

– для воздуха: $-0{,}7 \le \lambda \le 0 \le \gamma \le 6$, $\mathrm{Pr} = 0{,}733$;

– для воды: $0 \le \lambda \le 0{,}6$, $0 \le \gamma \le 0{,}12$, $2 \le \mathrm{Pr} \le 6$;

– для смазочного масла: $0 \le \lambda \le 3$, $-0{,}1 \le \gamma \le 0$, $5 \le \mathrm{Pr} \le 2500$.

Из уравнения (6) следует, что при $\lambda < 0$ вязкость среды возрастает с увеличением температуры, в данном случае — воздуха. При $\lambda > 0$ вязкость жидкости уменьшается с увеличением температуры, в данном случае — воды и масла. Из уравнения (7) следует, что при $\gamma > 0$ теплопроводность увеличивается с повышением температуры, в данном случае — воды и воздуха. При $\gamma < 0$ теплопроводность уменьшается с повышением температуры, в данном случае — смазочного масла.

Для проверки точности настоящих результатов проведено их сравнение с результатамиё работы [12] (для вертикальной пластины с переменной вязкостью и температуропроводностью), полученными в стационарном случае для скорости U и температуры T при $\phi = 90^{0}$, $\lambda = -0{,}4$ с различными значениями γ для воздуха ($\mathrm{Pr} = 0{,}733$). Результаты настоящей работы, представленные на рис. 1, хорошо согласуются с результатами работы [12]. Также вычисленные значения скорости U хорошо согласуются с теоретическими результатами работы [6] для значений $\phi = 57{,}65°$, $\mathrm{Gr} = 10^{6}$, $\mathrm{Pr} = 0{,}7$, $\lambda = 0$, $\gamma = 0$, соответствующих случаю $\zeta = 16$ работы [6] (рис. 2).

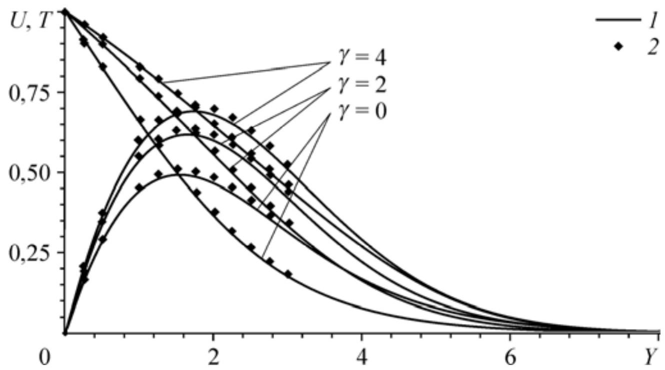

Рис. 1. Сравнение профилей скорости и температуры при $X = 1$ для $\lambda = -0{,}4$ и Pr = 0,733.
$\phi = 90°$; *1* — результаты настоящей работы, *2* — результаты работы [12].

В задаче нестационарной свободной конвекции было установлено, что время является важным фактором при изучении этого явления переноса. Изменения профилей скорости и температуры со временем, представленные на графиках, показывают, что после определенного промежутка времени значения скорости и температуры достигают стационарного значения. Также наблюдались временные максимумы профилей скорости и температуры. Явления этого типа наблюдалось некоторыми исследователями задачи нестационарной свободной конвекции на вертикальной или наклонной пластине.

Рассмотрим влияние наклона пластины на время достижения стационарого состояния. При $\mathrm{Gr} = 10^5$, когда угол наклона пластины составляет $\phi = 60°$ с горизонталью, скорость с течением времени увеличивается и достигает временно́го максимума 0,613 при $Y = 1{,}75$ для $t = 2{,}58$, и впоследствии достигает стационарного значения при $t = 4{,}95$, в то время как в случае $\mathrm{Gr} = 10^7$ скорость приобретает максимальное значение 0,58529 при $Y = 1{,}5$, для $t = 2{,}61$ и впоследствии достигает стационарного значения. Для стационарного режима установлено, что скорость уменьшается при увеличении числа Грасгофа. Из результатов расчетов следует, что разница между временным максимумом и стационарным значением убывает с ростом числа Грасгофа.

На рис. 3 и 4 изменения скорости и температуры показаны для Pr = 0,733 (воздух) при $\gamma = 1$, $\lambda = -0{,}1$, $\mathrm{Gr} = 10^5, 10^7$, $\phi = 30°, 60°$. Когда угол наклона ϕ увеличивается, нормальная составляющая силы плавучести уменьшается вблизи передней кромки, что создает подъемную силу на течение жидкости вдоль пластины, то есть подъемная сила вдоль пластины уменьшается с увеличением ϕ. Время, необходимое для достижения

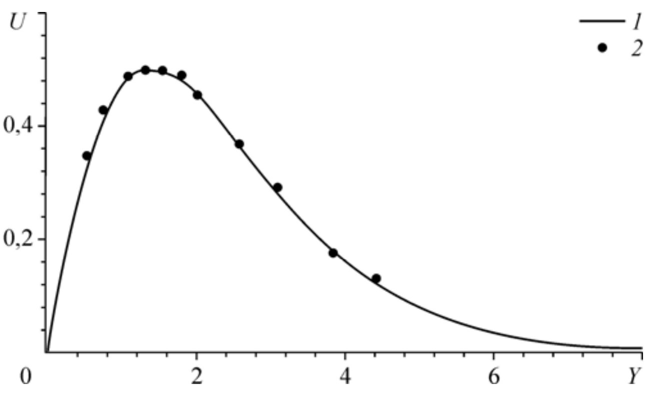

Рис. 2. Сравнение стационарных профилей скорости при $X = 1$.
$\phi = 57{,}65°$, $\mathrm{Gr} = 10^6$, Pr = 0,7, $\lambda = 0$, $\gamma = 0$; *1* — результаты настоящей работы, *2* — результаты работы [6].

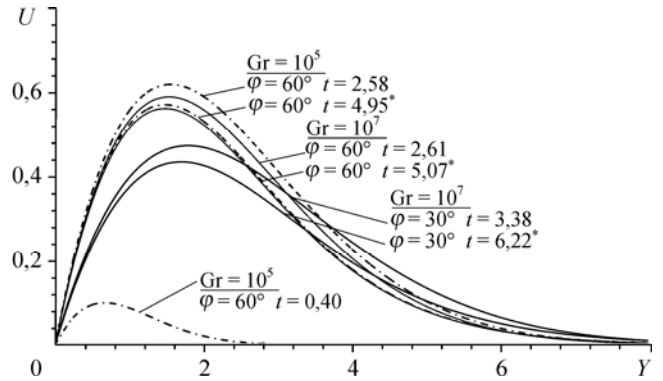

Рис. 3. Изменение профилей скорости при различных Gr и φ.

* — стационарное решение; $\lambda = -0{,}1$, $\gamma = 1$, Pr = 0,733.

установившегося режима, уменьшается с увеличением угла наклона ϕ. Так как тангенциальная сила плавучести доминирует вниз по течению и также увеличивается с ϕ, то и скорость возрастает с увеличением угла наклона, но в случае распределения температуры это происходит по-другому. Численные результаты показывают, что нет никаких заметных изменений в распределении температуры при изменении Gr.

Рисунки 5–8 демонстрируют изменения скорости и температуры при различных значениях вязкости и теплопроводности воздуха (Pr = 0,733) в переходном процессе, при временном максимуме и для установившегося режима при $X = 1$. Скорость жидкости возрастает и достигает своего максимального значения очень близко к поверхности при $0 \le Y \le 2$, а затем монотонно убывает к нулю при увеличении Y при всех значениях t. Следует заметить, что скорость и температура увеличиваются с течением времени t, достигают временного максимума, после этого наблюдается умеренная тенденция к снижению и затем достигается стационарное состояние.

На рис. 5 и 6 показаны изменения переходных профилей скорости и температуры для различных значений λ при $\gamma = 2$ в воздухе (Pr = 0,733). Скорость жидкости возрастает со временем до тех пор, пока не достигается временной максимум, и затем наблюдается умеренное снижение вплоть до достижения окончательного стационарного состояния. Время, необходимое для достижения стационарного состояния, немного уменьшается с увеличением параметра изменения вязкости. Из рис. 5 следует, что скорость U возле

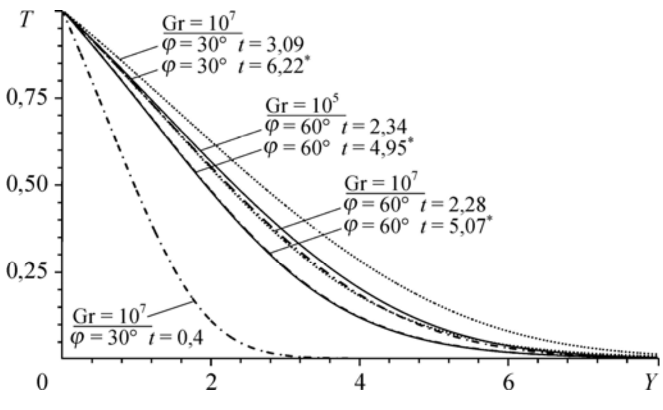

Рис. 4. Изменение профилей температуры при различных Gr и φ при $X = 1$.

* — стационарное решение; $\lambda = -0{,}1$, $\gamma = 1$, Pr = 0,733.

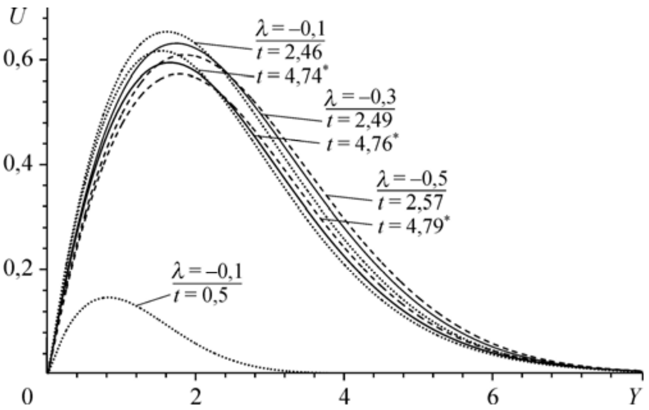

Рис. 5. Профили скорости при различных λ для $\gamma = 2$.
* — стационарное решение; Pr = 0,733, Gr = 10^6, $\phi = 60°$.

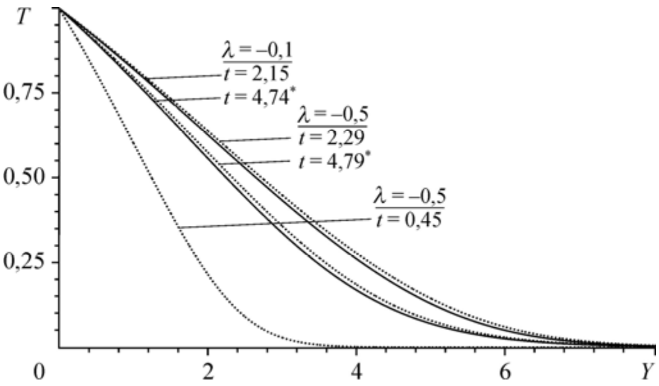

Рис. 6. Профили температуры при различных λ для $\gamma = 2$.
* — стационарное решение; Pr = 0,733, Gr = 10^6, $\phi = 60°$.

стенки увеличивается с увеличением λ (вязкость воздуха уменьшается). Однако противоположная тенденция заметна на некотором расстоянии от стенки. Из рис. 6 видно, что температура жидкости уменьшается при увеличении λ (вязкость воздуха уменьшается).

Численные значения изменений переходных профилей скорости и температуры для различных γ при значении $\lambda = -0{,}2$ в воздухе (Pr = 0,733) изображены графически на рис. 7 и 8. При $\gamma = 5$ скорость достигает своего максимального значения 0,74499 при

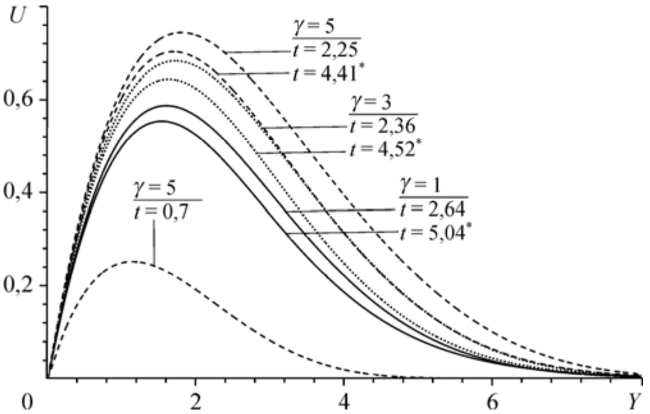

Рис. 7. Профили скорости при различных γ для $\lambda = -0{,}2$.
* — стационарное решение; Pr = 0,733, Gr = 10^6, $\phi = 60°$.

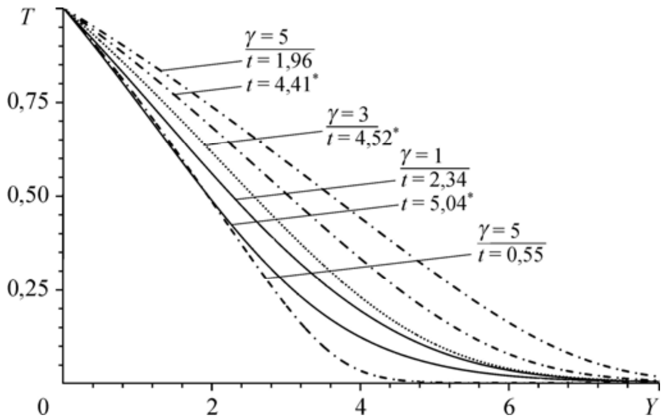

Рис. 8. Профили температуры при различных γ для $\lambda = -0{,}2$.

* — стационарное решение; Pr = 0,733, Gr = 10^6, $\phi = 60°$.

Y = 1,75 для t = 2,25 и затем наблюдается умеренное снижение до достижения стационарного состояния при t = 4,41. Для постоянного значения λ распределение скорости и температуры воздуха увеличивается с увеличением γ (теплопроводность воздуха возрастает). Кроме того, можно отметить, что увеличение теплопроводности γ приводит к заметному росту скорости и температуры, то есть объемный расход воздуха возрастает с увеличением γ. Влияние изменения теплопроводности на скорость и температуру более значительно, особенно на самых ранних этапах переходного периода. Время достижения временного максимума и стационарного состояния уменьшается с увеличением γ. Разница между временным максимумом и стационарным состоянием уменьшается при уменьшении γ.

На рис. 9–16 представлены изменения скорости и температуры в зависимости от координаты Y для переходного периода, временного максимума и стационарного состояния на передней кромке пластины X = 1 для различных углов наклона, вязкости, теплопроводности и чисел Прандтля в воде.

Изменения скорости и температуры для различных чисел Грасгофа и угла наклона φ в воде представлены на рис. 9 и 10. С увеличением угла наклона горизонтальная скорость увеличивается. Следует отметить, что скорость увеличивается с уменьшением числа Грасгофа.

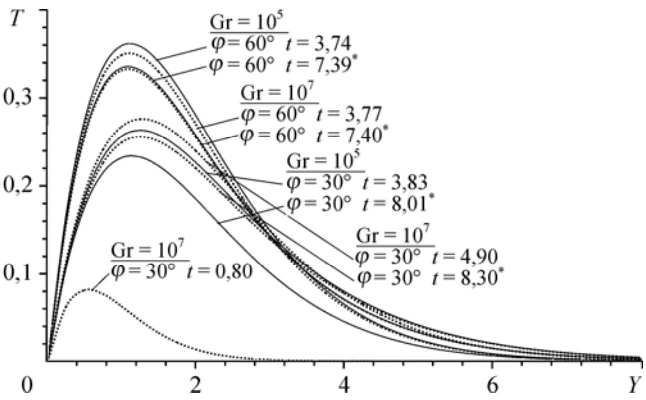

Рис. 9. Профили скорости при различных Gr и φ.

* — стационарное решение; Pr = 3, $\lambda = 0{,}2$, $\gamma = 0{,}02$.

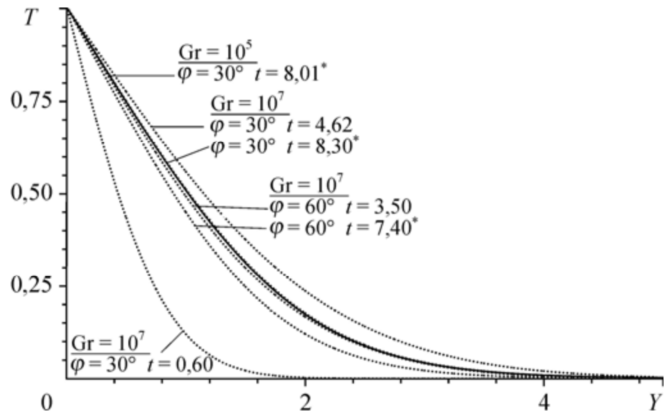

Рис. 10. Профили температуры при различных Gr и ϕ.
* — стационарное решение; Pr = 3, λ = 0,2, γ = 0,02.

Численные значения изменений скорости и температуры, вычисленные из уравнений (13) и (14), представлены на рис. 11 и 12 для различных значений λ при γ = 0,02 в воде (Pr = 3). Время, необходимое для достижения временного максимума и стационарного состояния, уменьшается с увеличением параметра вязкости λ.

Из рис. 11 следует, что скорость течения около стенки увеличивается с увеличением параметра λ и уменьшением вязкости воды, что следует из уравнения (6). Кроме того, максимум скорости смещается к стенке (Y = 1,25) для более высоких значений λ. Этот качественный эффект возникает потому, что в случае с переменной вязкостью ($\lambda > 0$) жидкость может двигаться более легко в области вблизи нагретой поверхности, т. к. вязкость жидкости с $\lambda > 0$ меньше, чем в жидкости с постоянной вязкостью. Оно приводит к утончению скоростного и теплового пограничных слоев. При увеличении λ (вязкость воды уменьшается) скорость жидкости увеличивается только в интервале $0 \le Y \le 1{,}5$.

На рис. 12 приведено изменение профилей температуры с увеличением λ. Оно согласуется с тем, что увеличение λ приводит к увеличению пика скорости, как показано на рис. 11. Однако следует обратить внимание на два противоположных эффекта действия на жидкость при увеличении λ. Первый эффект — увеличение скорости частицы жидкости

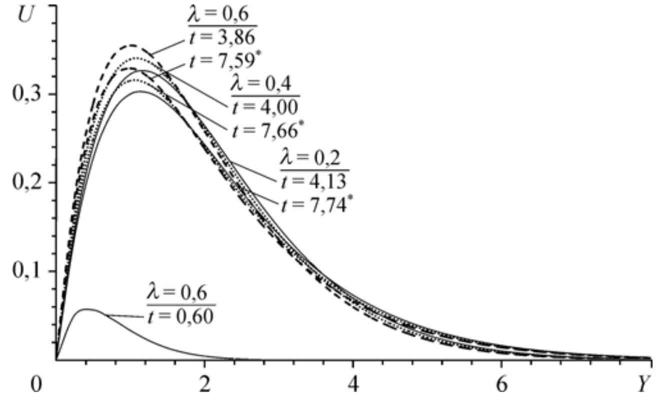

Рис. 11. Профили скорости при различных λ для γ = 0,02.
* — стационарное решение; Pr = 3, Gr = 10^5, ϕ = 45°.

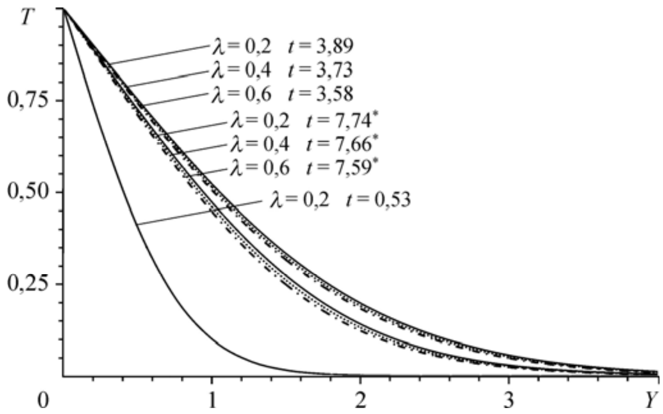

Рис. 12. Профили температуры при различных λ для $\gamma = 0{,}02$.
* — стационарное решение; Pr = 3, Gr = 10^5, $\phi = 45°$.

из-за уменьшения вязкости, и второй эффект — снижение скорости частиц жидкости из-за снижения температуры. В области ($0 \le Y \le 1{,}5$) температура T высока, следовательно, первый эффект будет доминирующим и скорость U будет возрастать по мере увеличения λ (рис. 11). С другой стороны, так как температура T становится ниже с удалением от стенки, второй эффект будет доминирующим и скорость будет уменьшаться с увеличением λ (рис. 11). Из изложенного следует, что пренебрежение изменениями вязкости и теплопроводности жидкости может вносить существенные погрешности.

На рис. 13 и 14 представлены изменения скорости и температуры для различных значений γ при $\lambda = 0{,}3$ в воде (Pr = 3). Видно, что время, необходимое для достижения стационарного состояния, убывает с ростом γ. Можно заметить, что скорость воды уменьшается с уменьшением γ, а при увеличении Y заметна обратная тенденция. Кроме того видно, что распределение температуры жидкости возрастает с увеличением значения γ.

Изменения переходных скорости и температуры при изменении числа Прандтля для постоянных значений других параметров показаны на рис. 15 и 16. При более высоких значениях числа Прандтля требуется больше времени для достижения временного максимума и стационарного состояния, чем при более низких.

Из рис. 15 следует, что скорость уменьшается с увеличением числа Прандтля. Большие значения числа Прандтля увеличивают кривизну профилей температуры

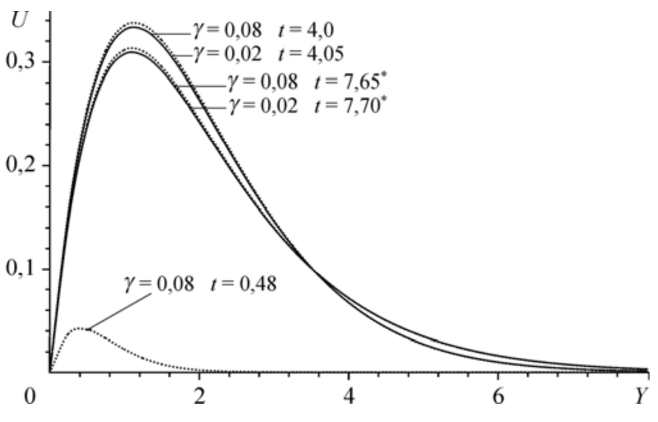

Рис. 13. Профили скорости при различных γ для $\lambda = 0{,}3$.
* — стационарное решение; Gr = 10^6, $\phi = 45°$, Pr = 3.

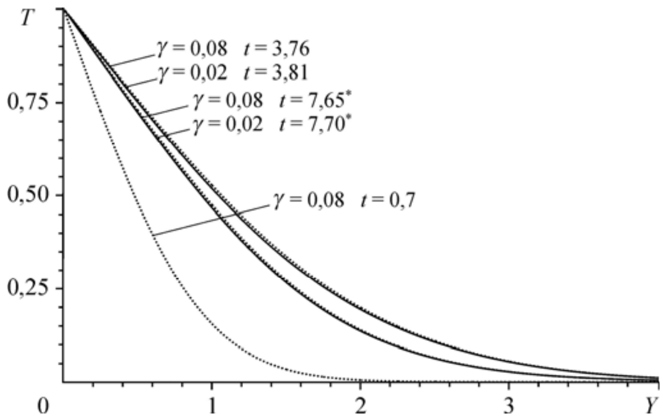

Рис. 14. Профили температуры при различных γ для $\lambda = 0{,}3$.

* — стационарное решение; $Gr = 10^6$, $\phi = 45°$, $Pr = 3$.

потому, что большее значение числа Прандтля означает, что диффузия тепла от стенки незначительна, в то время как диффузия скорости простирается далеко от стенки.

На рис. 17–24 представлены изменения скорости и температуры в зависимости от координаты *Y* для переходного периода, временного максимума и стационарного

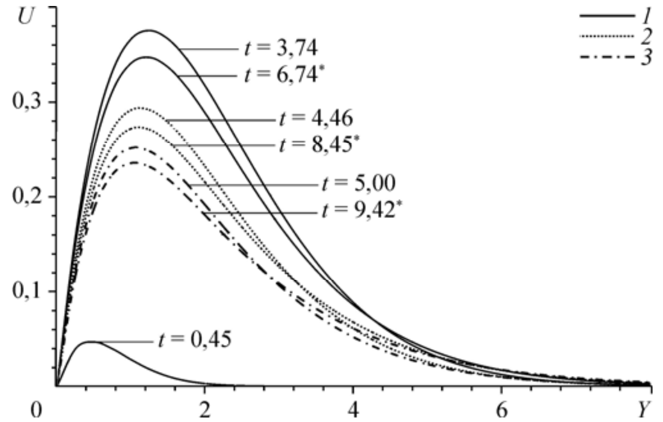

Рис. 15. Профили скорости при различных Pr.

* — стационарное решение; $Gr = 10^6$, $\phi = 45°$, $\lambda = 0{,}2$, $\gamma = 0{,}02$; Pr = 2 (*1*), 4 (*2*), 6 (*3*).

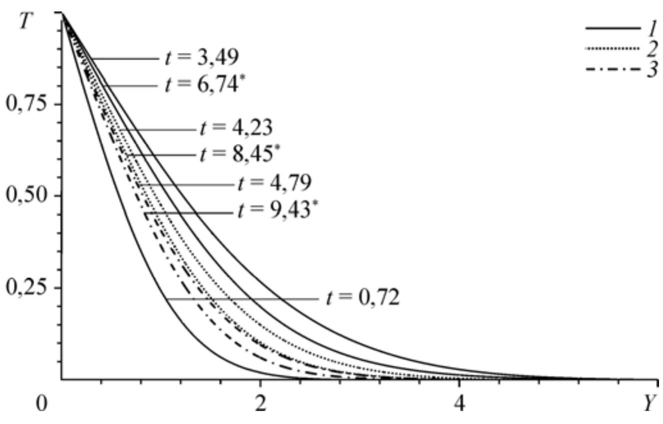

Рис. 16. Профили температуры при различных Pr.

* — стационарное решение; $Gr = 10^6$, $\phi = 45°$, $\lambda = 0{,}2$, $\gamma = 0{,}02$; Pr = 2 (*1*), 4 (*2*), 6 (*3*).

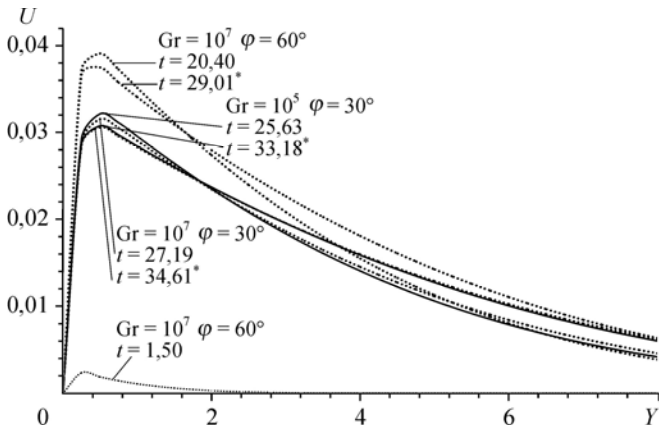

Рис. 17. Профили скорости при различных Gr и ϕ.
* — стационарное решение; Pr = 500, $\lambda = 1$, $\gamma = -0{,}1$.

состояния на передней кромке пластины $X = 1$ для различных чисел Грасгофа, угла наклона, вязкости, теплопроводности и чисел Прандтля в смазочных маслах.

Вычисленные изменения скорости и температуры смазочного масла для различных чисел Грасгофа и угла наклона представлены на рис. 17 и 18. Скорость резко возрастает вблизи стенки, а затем уменьшается вдали от стенки. Влияние числа Грасгофа на скорость увеличивается с уменьшением ϕ. Скорость достигает временного максимума 0,03215 при $Y = 0{,}5$, $t = 25{,}63$ и затем наблюдается умеренное снижение до достижения стационарного состояния при $t = 33{,}18$ (Gr = 105, $\phi = 30°$). Скорость уменьшается с увеличением Gr, такая же тенденция отмечается в случае воздуха и воды (рис. 3, 9). Кроме того, скорость увеличивается с повышения угла наклона к горизонтали.

Изменения профилей скорости и температуры с изменением λ для постоянного значения $\gamma = -0{,}05$ для смазочного масла (Pr = 500) представлены на рис. 19 и 20. На рисунках видно, что время, необходимое для достижения стационарного режима, увеличивается при уменьшении λ. Также скорость увеличивается при увеличении λ (вязкость масла уменьшается). Температура жидкости уменьшается при увеличении λ. Изменения переходных профилей скорости и температуры при изменении γ для постоянного значения $\lambda = 1$ для смазочного масла (Pr = 500) представлены на рис. 21 и 22. Распределения скорости и температуры в жидкости увеличиваются с увеличением γ.

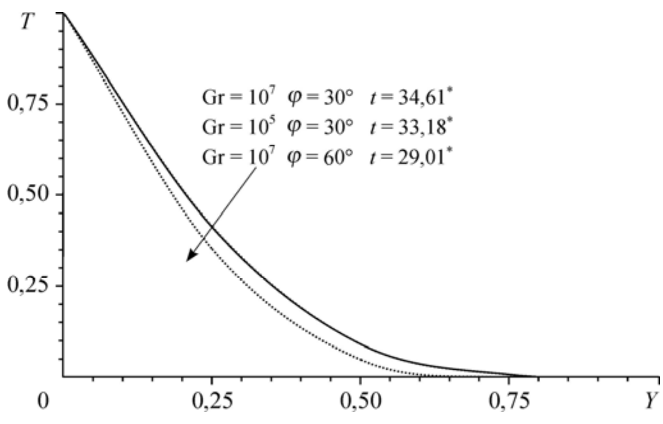

Рис. 18. Профили температуры при различных Gr и ϕ.
* — стационарное решение; $\lambda = 0{,}2$, $\gamma = 0{,}02$.

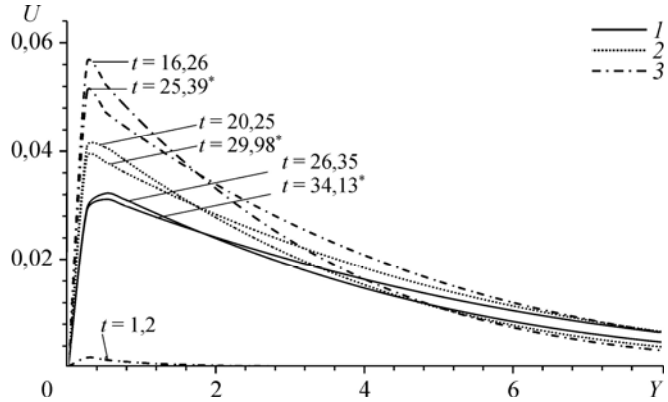

Рис. 19. Профили скорости при различных λ для $\gamma = -0{,}05$.
* — стационарное решение; Pr = 500, Gr = 10^6, $\phi = 30°$; $\lambda = 1$ (*1*), 2 (*2*), 3 (*3*).

Зная скоростные и температурные поля, с практической точки зрения интересно исследовать наиболее важные характеристики течения — касательные напряжения и коэффициент теплопередачи на пластине.

Местные сдвиговые напряжения на пластине определяется как

$$\tau_x = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}. \tag{15}$$

Вводя безразмерные величины из выражений (5) и (6) в (15), получаем безразмерный коэффициент трения

$$\tau_X = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{Gr}^{3/4}\left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)_{Y=0}. \tag{16}$$

Интегрирование уравнения (16) от $X = 0$ до $X = 1$ дает средний коэффициент трения

$$\overline{\tau} = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{Gr}^{3/4}\int_0^1 \left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)_{Y=0} dX. \tag{17}$$

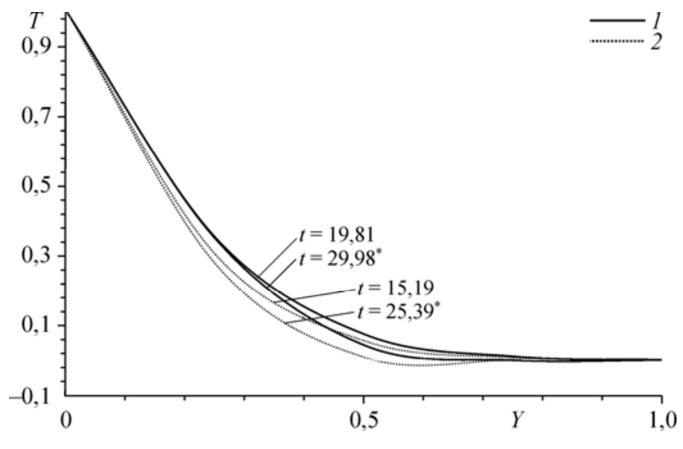

Рис. 20. Профили температуры при различных λ для $\gamma = -0{,}05$.
* — стационарное решение; Pr = 500, Gr = 10^6, $\phi = 30°$; $\lambda = 2$ (*1*), 3 (*2*).

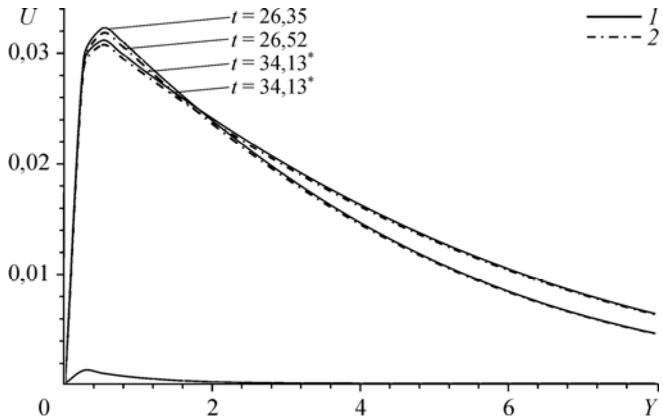

Рис. 21. Профили скорости при различных γ для $\lambda = 1$.
* — стационарное решение; Pr = 500, Gr = 10^6, $\phi = 30°$; $\gamma = -0{,}05$ (*1*), $-0{,}1$ (*2*).

Локальное число Нуссельта определяется как

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{-L\left(k(\partial T'/\partial y)\right)_{y=0}}{k_0(T'_w - T'_\infty)}. \tag{18}$$

С помощью безразмерных переменных, определенных в уравнениях (5) и (7), из выражения (18) получим безразмерное число Нуссельта

$$Nu_X = -(1+\gamma)\mathrm{Gr}^{1/4}\left(\frac{\partial T}{\partial Y}\right)_{Y=0}. \tag{19}$$

Интегрирование (19) от $X = 0$ до $X = 1$ дает среднее число Нуссельта

$$\overline{\tau} = -(1+\gamma)\mathrm{Gr}^{1/4}\int_0^1\left(\frac{\partial T}{\partial Y}\right)_{Y=0} dX. \tag{20}$$

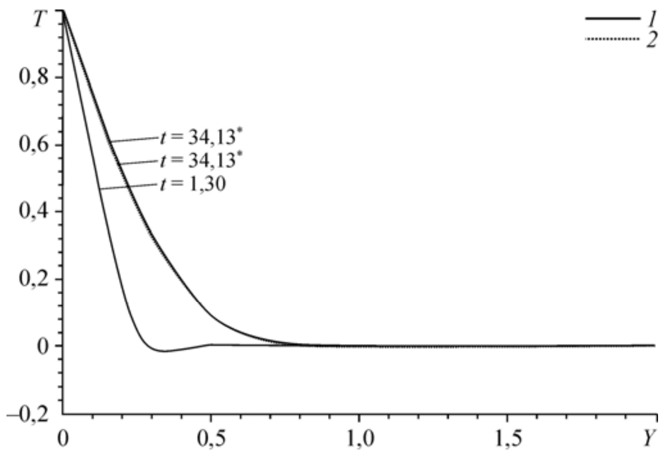

Рис. 22. Профили температуры при различных γ для $\lambda = 1$.
* — стационарное решение; Pr = 500, Gr = 10^6, $\phi = 30°$; $\gamma = -0{,}05$ (*1*), $-0{,}1$ (*2*).

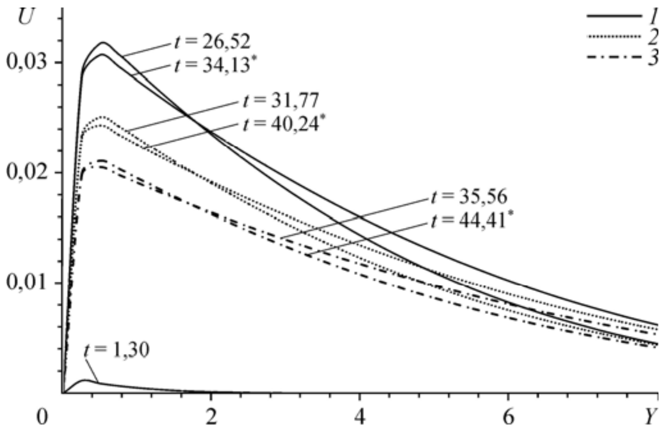

Рис. 23. Профили скорости при различных Pr.

* — стационарное решение; Gr = 10^6, ϕ = 30°, λ = 1, γ = –0,1; Pr = 500 (*1*), 750 (*2*), 1000 (*3*).

Производные, входящие в выражения (16), (17), (19) и (20), вычисляются с применением пятиточечной аппроксимации, затем интегралы вычисляются с помощью формулы интегрирования Ньютона–Котеса.

Изменение локального напряжения сдвига при различных значениях параметров γ и λ для воды и воздуха представлено на рис. 25 и 26. Локальные касательные напряжения возрастает монотонно с ростом X. Из численных результатов следует, что локальные касательные напряжения возрастают с уменьшением параметра вязкости λ. Кроме того, локальные касательные напряжения возрастают с увеличением параметра теплопроводности γ.

Распределение локального теплообмена при различных значениях параметров γ и λ для воздуха и воды представлено на рис. 27 и 28. Локальная теплопередача возрастает с увеличением параметров λ и γ.

Средние значения поверхностного трения представлены на рис. 29 и 30. Среднее значение поверхностного трения увеличивается с течением времени и асимптотически достигает постоянного значения. Среднее значение поверхностного трения возрастает с уменьшением величины λ. Но при изменении γ заметна обратная тенденция.

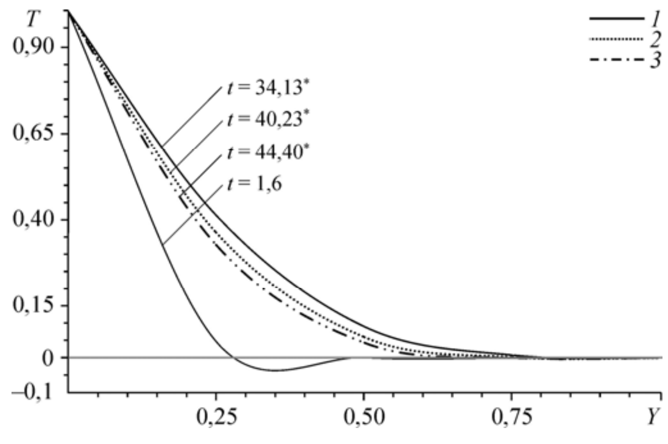

Рис. 24. Профили температуры при различных Pr.

* — стационарное решение; Gr = 10^6, ϕ = 30°, λ = 1, γ = –0,1; Pr = 500 (*1*), 750 (*2*), 1000 (*3*).

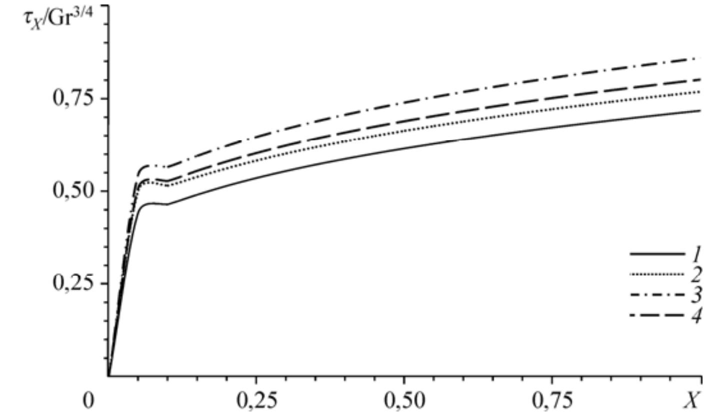

Рис. 25. Распределение локального трения.
Gr = 10[6], ϕ = 30°, Pr = 0,733; *1* — λ = –0,2, γ = 2, *2* — λ = –0,4, γ = 4, *3* — λ = –0,6, γ = 3, *4* — λ = –0,4, γ = 3.

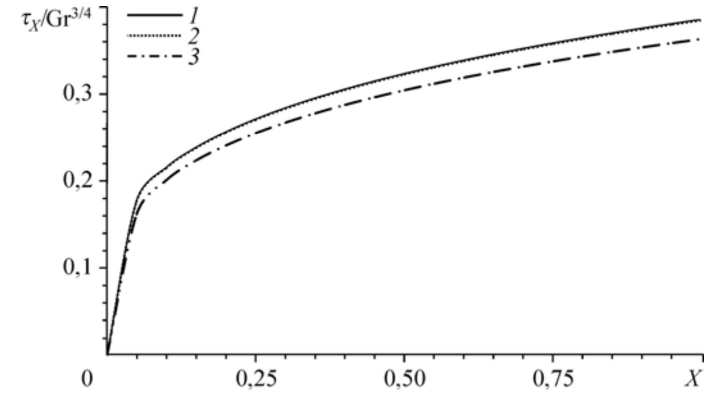

Рис. 26. Распределение локального трения.
Gr = 10[6], ϕ = 30°, Pr = 5; *1* — λ = 0,2, γ = 0,08, *2* — λ = 0,2, γ = 0,06, *3* — λ = 0,4, γ = 0,06.

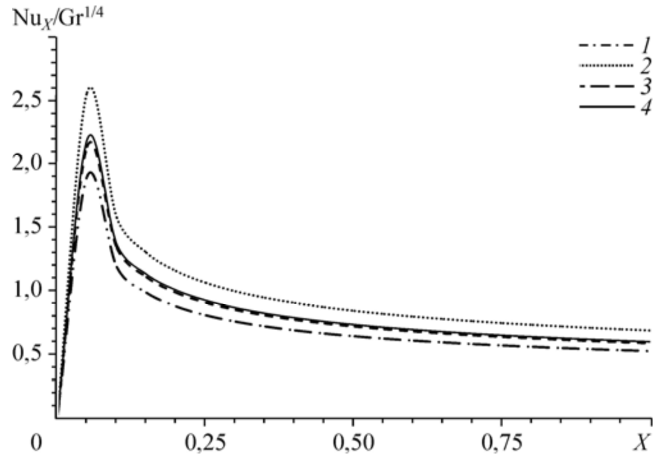

Рис. 27. Распределение локального числа Nu.
Gr = 10[6], ϕ = 30°, Pr = 0,733; *1* — λ = –0,2, γ = 2, *2* — λ = –0,2, γ = 4, *3* — λ = –0,6, γ = 3, *4* — λ = –0,4, γ = 3.

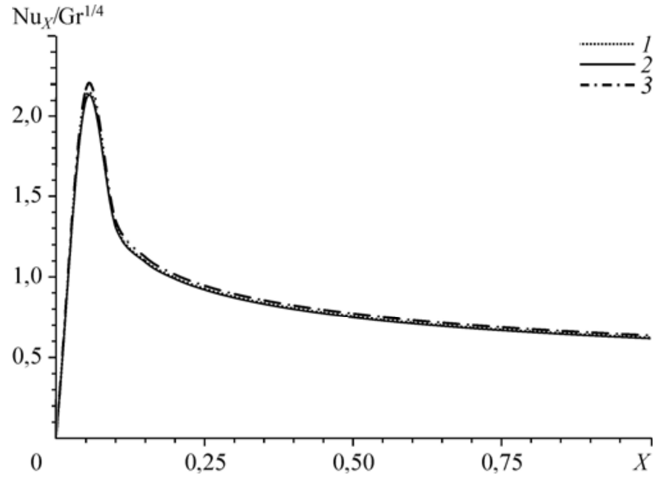

Рис. 28. Распределение локального числа Nu.
Gr = 10^6, ϕ = 30°, Pr = 5; *1* — λ = 0,2, γ = 0,04, *2* — λ = 0,2, γ = 0,06, *3* — λ = 0,4, γ = 0,06.

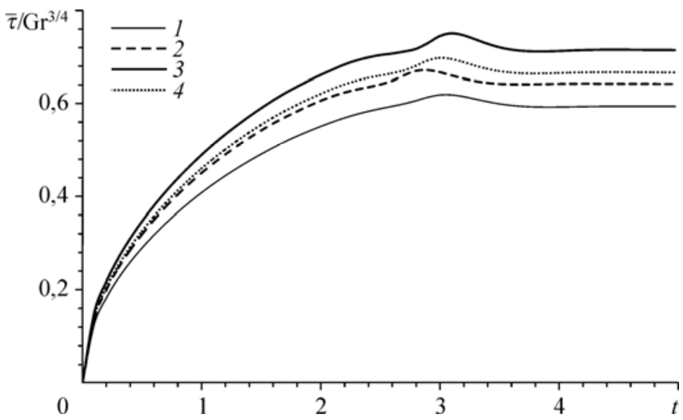

Рис. 29. Зависимость среднего трения от времени.
Gr = 10^6, ϕ = 30°, Pr = 0,733; *1* — λ = –0,2, γ = 2, *2* — λ = –0,2, γ = 4, *3* — λ = –0,6, γ = 3, *4* — λ = –0,4, γ = 3.

Средние значения числа Нуссельта для воды и воздуха приведены на рис. 31 и 32. Можно отметить, что среднее число Нуссельта увеличивается с увеличением как параметра вязкости λ, так и параметра теплопроводности γ.

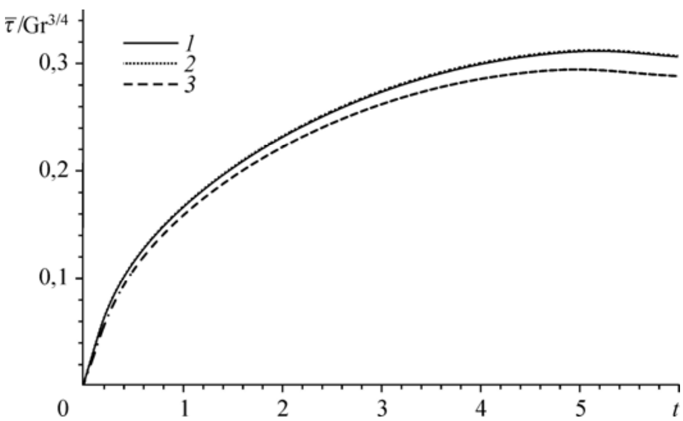

Рис. 30. Зависимость среднего трения от времени.
Gr = 10^6, ϕ = 30°, Pr = 5; *1* — λ = 0,2, γ = 0,04, *2* — λ = 0,2, γ = 0,06, *3* — λ = 0,4, γ = 0,06.

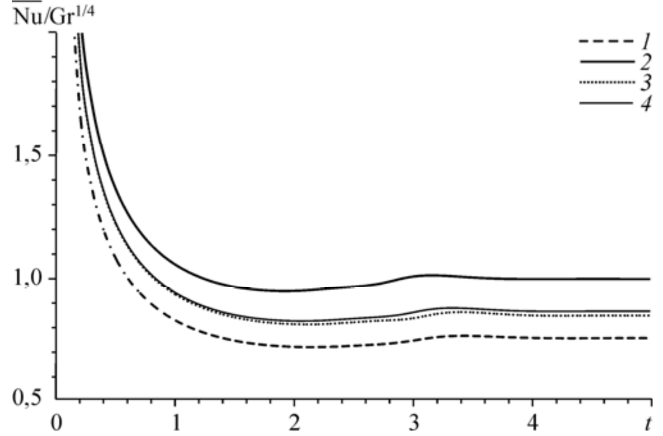

Рис. 31. Зависимость среднего числа Nu от времени.
$\mathrm{Gr} = 10^6$, $\phi = 30°$, $\mathrm{Pr} = 0{,}733$; *1* — $\lambda = -0{,}2$, $\gamma = 2$, *2* — $\lambda = -0{,}6$, $\gamma = 4$, *3* — $\lambda = -0{,}6$, $\gamma = 3$, *4* — $\lambda = -0{,}4$, $\gamma = 3$.

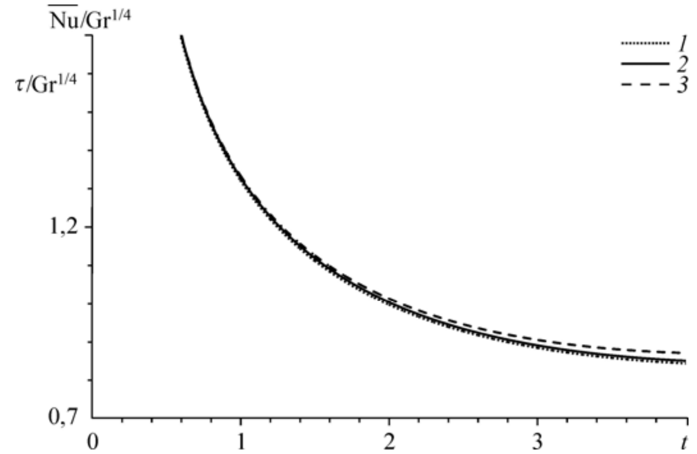

Рис. 32. Зависимость среднего числа Nu от времени.
$\mathrm{Gr} = 10^6$, $\phi = 30°$, $\mathrm{Pr} = 5$; *1* — $\lambda = 0{,}2$, $\gamma = 0{,}04$, *2* — $\lambda = 0{,}2$, $\gamma = 0{,}06$, *3* — $\lambda = 0{,}4$, $\gamma = 0{,}06$.

Выводы

Проведено численное исследование течения жидкости вдоль полубесконечной изотермической наклонной пластины с учетом влияния переменных вязкости и теплопроводности. Вязкость жидкости предполагалась экспоненциальной функцией температуры, теплопроводность — линейной функцией. Система определяющих дифференциальных уравнений решалась с помощью неявной разностной схемы типа Кранка–Николсона. Подробно изучено влияние переменной вязкости и теплопроводности на поля скорости и температуры, напряжения сдвига и теплообмен. Проведено также сравнение численных результатов с данными ранее опубликованных работ и установлена хорошая согласованность.

Из проведенного исследования следует:

1. Коэффициент трения увеличивается с уменьшением параметра λ (вязкость воды уменьшается с увеличением температуры) и возрастает с увеличением параметра γ (температуропроводность воды увеличивается с увеличением температуры).

2. Вязкость, теплопроводность и число Прандтля жидкости чувствительны к изменениям температуры в задаче естественной конвекции. Следовательно, влияние переменных вязкости, теплопроводности и числа Прандтля следует учитывать для точного предсказания коэффициента трения и интенсивности теплообмена.

3. Результаты для жидкости с переменной вязкостью и теплопроводностью существенно отличаются от аналогичных результатов для жидкости с постоянными свойствами.

4. Следует отметить, что пренебрежение изменениями вязкости и теплопроводности приведет к значительным ошибкам. Таким образом, для получения более точных результатов следует учитывать влияние переменных вязкости и теплопроводности.

Список литературы

1. **Pohlhausen E.** Der Wärmeaustausch zwischen festen körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und kleiner Wärmeleitung / Z. Angew // Math. Mech. 1921. Vol. 1. P. 115–121.
2. **Ostrach S.** An analysis of laminar free convection ow and heat transfer about a flat plate parallel to the direction of the generating body force // NACA Report. 1953. No. 1111. P. 63–79.
3. **Seigel R.** Transient free convection from a vertical flat plate // Trans. Amer. Soc. Mech. Engs. 1958. Vol. 80. P. 347–359.
4. **Hellums J.D., Churchill S.W.** Transient and steady state free and natural convection, numerical solution. Part 1. The isothermal vertical plate // AIChE J. 1962. Vol. 8. P. 690–692.
5. **Soundalgekar V.M., Ganesan P.** Finite difference analysis of transient free convection on an isothermal flat plate // Reg. J. Energy Heat Mass Transfer. 1981. Vol. 3. P. 219–224.
6. **Chen T.S., Tien H.C., Armaly B.F.** Natural convection on horizontal, inclined and vertical plates with variable surface temperature or heat flux // Inter. J. Heat Mass Transfer. 1986. Vol. 29. P. 1465–1478.
7. **Ekambavannan K., Ganesan P.** Finite difference solution of unsteady natural convection boundary layer flow over an inclined plate with variable surface temperature // Wärme- und Stoffübertragung. 1994. Vol. 30. P. 63–69.
8. **Schlichting H.** Boundary Layer Theory. New York: McGraw Hill, 1979. 817 p.
9. **Kays W.M., Crawford M.E.** Convective heat and mass transfer. New York: McGraw Hill, 1980. 420 p.
10. **Ockendon H. Ockendon J.R.** Variable-viscosity flows in heated and cooled channels // J. of Fluid Mechanics. 1977. Vol. 83, No. 1. P. 177–190.
11. **Gary J., Kassory D.R., Tadjeran H., Zebib A.** Effect of significant viscosity variation on convective heat transport in water saturated porous media // J. of Fluid Mechanics. 1982. Vol. 117. P. 233–249.
12. **Elbashbeshy E.M.A., Ibrahim F.N.** Steady free convection flow with variable viscosity and thermal diffusivity along a vertical plate // J. of Physics D: Applied Physics. 1993. Vol. 26, No. 12. P. 2137–2143.
13. **Elbashbeshy E.M.A.** Free convection flow with variable viscosity and thermal diffusivity along a vertical plate in the presence of the magnetic field // Int. J. Engg. Sci. 2000. Vol. 38. P. 207–213.
14. **Hossain M.A., Khanafer K., Vafai K.** The effect of radiation on free convection flow of fluid with variable viscosity from a porous vertical plate // Int. J. Therm. Sci. 2001. Vol. 40. P. 115–124.
15. **Seddeek M.A.** Effect of variable viscosity on a MHD free convection flow past a semi-infinite flat plate with an aligned magnetic field in the case of unsteady flow // Int. J. Heat Mass Transfer. 2002. Vol. 45, No. 4. P. 931–935.
16. **Wilson, S.K., Duffy, B.R.** Strong temperature-dependent-viscosity effects on a rivulet draining down a uniformly heated or cooled slowly varying substrate // Physics of Fluids. 2003. Vol. 15, No. 4. P. 827–840.
17. **Abo-Eldahab E.M.** The effects of temperature-dependent fluid properties on free convective flow along a semi-infinite vertical plate by the presence of radiation // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2004. Vol. 41, No. 2. P. 163–169.
18. **Soundalgekar V.M., Takhar H.S., Das U.N., Deka, R.K., Sarmah A.** Effect of variable viscosity on boundary layer flow along a continuously moving plate with variable surface temperature // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 2004. Vol. 40. P. 421–424.
19. **Seddeek M.A., Abdelmeguid M.S.** Effects of radiation and thermal diffusivity on heat transfer over a stretching surface with variable heat flux // Physics Letters A. 2006. Vol. 348. No. 3–6. P. 172–179.
20. **Mahmoud Mostafa A.A.** Variable viscosity effects on hydromagnetic boundary layer flow along a continuously moving vertical plate in the presence of radiation // Appl. Math. Sci. 2007. Vol. 1, No. 17. P. 799–814.
21. **Palani G., Kwang-Yong Kim.** Numerical study on a vertical plate with variable viscosity and thermal conductivity // Arch. Appl. Mech. 2010. Vol. 80, No. 7. P. 711–725.
22. **Slattery J.C.** Momentum, energy and mass transfer in continua. New York: McGraw Hill: 1972. 704 p.
23. **Carnahan B., Luther H.A., Wilkes J.O.** Applied numerical methods. New York: John Wiley and Sons, 1969. 604 p.

Статья поступила в редакцию 14 февраля 2013 г.