УДК 536.12 621.1.016.4

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ПЛАСТОВОГО САМОНАГРЕВАНИЯ НАСЫПИ В СИЛОСЕ

В. П. Ольшанский

Харьковский институт пожарной безопасности, 310023 Харьков

Получено аналитическое решение задачи о поле температур в бесконечном по высоте слое растительного сырья. Приведены простые формулы для определения пожароопасной температуры и времени ее достижения. Результаты аналитического решения хорошо согласуются с данными численного анализа и экспериментом.

ВВЕДЕНИЕ

Нестационарные задачи пластового самонагревания растительного сырья в силосе* рассмотрены в работах [1–6]. Актуальность подобных исследований обусловлена пожарами на элеваторах. Для предотвращения возникновения пожаро- и взрывоопасных ситуаций в хранилищах растительного сырья проводится контроль процесса самонагревания насыпи. Одним из контролируемых параметров является температура сырья [1, 2]. Для теоретического описания температурного поля в работах [2–6] использовалось уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами, причем в [2] экспериментально подтверждена такая возможность. В [2–4] сделаны попытки найти точное аналитическое решение методом интегральных преобразований. Но трудности аналитического обращения преобразования Фурье не позволили довести решение в квадратурах до простых расчетных формул. Поэтому фактические расчеты температурных полей в [2, 3] проводились численно. Имеющиеся в [2] приближенные формулы для оценки времени достижения пожароопасной температуры в центре слабо локализованного («размазанного» по высоте насыпи) пластового очага, установлены из анализа результатов численного расчета.

В данной статье предложена простая формула для расчета времени достижения пожароопасной температуры, полученная в результате аналитического решения нестационарной задачи.

*Специальные сооружения — ямы, рвы, башни, в которых консервируется и хранится силос, также называют иногда силосами.

1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ

Как и в работах [2–6], высоту насыпи в силосе примем бесконечной, а теплофизические характеристики сырья (теплопроводность λ, плотность ρ и удельную теплоемкость c) постоянными. Начало вертикальной оси Ox, совпадающей с осью силоса, поместим в центре пластового очага самонагревания. Отсчет прироста температуры как функции $T(x,t)$ начнем с момента времени $t = 0$. Плотность тепловых источников в очаге зададим распределением типа Гаусса

$$q(x) = (q_0 - q_\text{ф})\exp(-x^2/R^2) + q_\text{ф}, \qquad (1.1)$$

где q_0, $q_\text{ф}$ и R — характерные параметры: первый определяет плотность источников в центре локализованного очага ($x = 0$); второй — дает фоновый прирост температуры, одинаковый для всех поперечных сечений насыпи; от R зависит степень локализации пластового очага.

Выбор удельной интенсивности тепловыделения в форме (1.1) обусловлен тем, что первый этап самонагревания растительного сырья обычно вызван деятельностью микрофлоры. Распределение (плотность) частиц повышенной тепловой активности по высоте насыпи носит вероятностный характер и подчиняется нормальному закону [2]. На втором этапе самонагревания идет экзотермическая реакция окисления, ход которой зависит от прироста температуры, достигнутого на первом этапе.

Распределение (1.1) считалось основным при решении нестационарных тепловых задач в монографии [2]. Для него в [2] приведены многочисленные результаты расчета пластового самонагревания.

На основании введенных предположений прирост температуры T описывается неоднородным дифференциальным уравнением [7]

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho c} q(x)\omega(t), \qquad (1.2)$$

где $a = \lambda/\rho c$ — температуропроводность, $\omega(t)$ — функция Хевисайда.

Кроме уравнения (1.2) искомое решение должно удовлетворять начальному и граничным условиям

$$T(x,0) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=\pm\infty} = 0. \qquad (1.3)$$

Решение $T(x,t)$ при $t \geqslant 0$ построим методом перехода от неоднородного дифференциального уравнения к однородному. Для этого представим $T(x,t)$ в виде суммы [5]:

$$T(x,t) = u(x) + V(x,t) + \frac{q_\text{ф} t}{\rho c}. \qquad (1.4)$$

Сумма (1.4) удовлетворяет уравнению (1.2) и начальному условию в (1.3) в случае, когда

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{q_\text{ф} - q_0}{\lambda} \exp\Big(-\frac{x^2}{R^2}\Big), \qquad (1.5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -a\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \qquad (1.6)$$

$$V(x,0) = -u(x). \qquad (1.7)$$

Интегрируя уравнение (1.5), находим неизвестную функцию

$$u(x) = \frac{(q_\text{ф} - q_0)R^2}{2\lambda}\Big(\sqrt{\pi}\,\frac{x}{R}\,\Phi\Big(\frac{x}{R}\Big) + \exp\Big(-\frac{x^2}{R^2}\Big)\Big) + c_1 x + c_2. \qquad (1.8)$$

Здесь $\Phi(z) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^z \exp(-y^2)\,dy$ — интеграл вероятностей; c_1 и c_2 — произвольные постоянные. В дальнейшем полагаем, что $c = c_2 = 0$, поскольку это упрощение не влияет на конечный результат. Для нулевых значений констант функция $u(x)$ и ее производная стремятся к нулю при $|x| \to \infty$, что согласуется с граничными условиями (1.3).

Известно [7], что решение однородного уравнения (1.6) при начальном условии (1.7) представляется несобственным интегралом

$$V(x,t) = \frac{-1}{2\sqrt{\pi a t}} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi)\exp\Big(-\frac{(\xi - x)^2}{4at}\Big) d\xi.$$

Подставив в него выражение (1.8) и учитывая, что $c_1 = c_2 = 0$, получаем

$$V(x,t) = \frac{(q_\text{ф} - q_0)R^2}{4\lambda\sqrt{at}} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\frac{\xi}{R}\Phi\Big(\frac{\xi}{R}\Big) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\Big(-\frac{\xi^2}{R^2}\Big)\Big)\exp\Big(-\frac{(\xi - x)^2}{4at}\Big) d\xi. \qquad (1.9)$$

2. УПРОЩЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ КВАДРАТУР

Интеграл от второго слагаемого в (1.9) сводится к элементарным функциям [8]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(-\frac{\xi^2}{R^2}\Big)\exp\Big(-\frac{(\xi - x)^2}{4at}\Big) d\xi = \frac{2R\sqrt{\pi a t}}{\sqrt{R^2 + 4at}}\exp\Big(-\frac{x^2}{R^2 + 4at}\Big). \qquad (2.1)$$

Интегрируя по частям первое слагаемое, находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi\Phi\Big(\frac{\xi}{R}\Big)\exp\Big(-\frac{(\xi - x)^2}{4at}\Big) d\xi = \frac{4at}{R\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{\xi^2}{R^2}\Big)\exp\Big(-\frac{(\xi - x)^2}{4at}\Big) d\xi + 2x\exp\Big(-\frac{x^2}{4at}\Big)\int_0^{\infty}\exp\Big(-\frac{\xi^2}{4at}\Big)\operatorname{sh}\Big(\frac{\xi x}{2at}\Big)\Phi\Big(\frac{\xi}{R}\Big) d\xi. \qquad (2.2)$$

Из выражений (1.9), (2.1), (2.2) с учетом того, что [9]

$$\int_0^{\infty} \exp(-px^2)\operatorname{sh}(bx)\Phi(cx)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}\exp\Big(\frac{b^2}{4p}\Big)\Phi\Big(\frac{bc}{2\sqrt{c^2 p + p^2}}\Big),$$

получаем

$$V(x,t) = \frac{(q_0-q_\text{ф})R}{2\lambda}\Big[\sqrt{R^2+4at}\exp\Big(-\frac{x^2}{R^2+4at}\Big)+ x\sqrt{\pi}\Phi\Big(\frac{x}{\sqrt{R^2+4at}}\Big)\Big]. \quad (2.3)$$

Подставив функции (1.8) и (2.3) в выражение (1.4), приходим к замкнутому аналитическому решению нестационарной задачи теплопроводности:

$$T(x,t) = \frac{(q_0-q_\text{ф})R}{2\lambda}\Big[\sqrt{R^2+4at}\exp\Big(-\frac{x^2}{R^2+4at}\Big) - R\exp\Big(-\frac{x^2}{R^2}\Big)+x\sqrt{\pi}\Big(\Phi\Big(\frac{x}{\sqrt{R^2+4at}}\Big) - \Phi\Big(\frac{x}{R}\Big)\Big)\Big]+\frac{q_\text{ф}t}{\rho c}. \quad (2.4)$$

Таким образом, вычисление прироста температуры в различных сечениях насыпи по времени t сводится к применению таблиц интеграла вероятностей [10]. Без таблиц можно обойтись при нахождении прироста температуры в центре пластового очага. Там он максимален и равен

$$T(0,t) = \frac{(q_0-q_\text{ф})R}{2\lambda}(\sqrt{R^2+4at}-R)+\frac{q_\text{ф}t}{\rho c}. \quad (2.5)$$

3. РАСЧЕТ ВРЕМЕНИ ДОСТИЖЕНИЯ ПОЖАРООПАСНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ

В [2] в качестве пожароопасной температуры рекомендуется брать температуру, при которой начинается активное газовыделение в растительном сырье — $100 \div 120$ °C. Формулу (2.5) перепишем в виде

$$T(0,t_\text{п}) = T_\text{п} = \frac{(q_0-q_\text{ф})R}{2\lambda}(\sqrt{R^2+4at_\text{п}}-R)+\frac{q_\text{ф}t_\text{п}}{\rho c}, \quad (3.1)$$

где $t_\text{п}$ — время достижения пожароопасной температуры $T_\text{п}$. Разрешая уравнение (3.1) относительно $t_\text{п}$, получаем

$$t_\text{п} = \frac{\rho c}{q_\text{ф}}(P-\sqrt{P^2-T_\text{п}(T_\text{п}+2q)}\,). \quad (3.2)$$

Здесь $P = T_\text{п}+q\dfrac{q_0}{q_\text{ф}}$, $q = \dfrac{(q_0-q_\text{ф})R^2}{2\lambda}$.

Если $q_\text{ф}=0$, вместо формулы (3.2) следует применять выражение

$$t_\text{п} = \frac{\rho c T_\text{п}}{q_0 R}\Big(\frac{\lambda T_\text{п}}{q_0 R}+R\Big). \quad (3.3)$$

Таким образом, вычисление времени достижения пожароопасной температуры при известных параметрах очага сводится к формулам (3.2), (3.3).

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ АНАЛИЗ

В табл. 1 указаны значения $T(x,t)$ для насыпи травяной муки со следующими параметрами: $\lambda = 0{,}09$ Вт/(м·К); $\rho c = 8{,}5\cdot10^5$ Дж/(м^3·К); $q_\text{ф} = 5$ Вт/м^3.

Значения $T(x,t)$, полученные численным интегрированием квадратур [6] и вычисленные по формуле (2.4) хорошо согласуются между собой.

Чтобы проверить соответствие теории [2, рис. 4.41, с. 110] эксперименту, по формуле (2.5) вычислены приросты температуры для насыпи травяной муки с параметрами $\lambda = 0{,}088$ Вт/(м·К); $\rho c = 8{,}5\cdot10^5$ Дж/(м^3·К); $R = 0{,}25$ м; $q_\text{ф}=0$; $q_0 = 85$ Вт/м^3 (табл. 2). Как видно из таблицы, теоретические и экспериментальные результаты удовлетворительно согласуются, что отмечалось и в работе [2].

Вычислим время достижения пожароопасной температуры $T_\text{п} = 100$ °C в насыпи травяной муки при $R = 0{,}3$ м, $q_0 = 80$ Вт/м^3, $q_\text{ф} = 0$. Расчет по формуле (3.3) дает $t_\text{п} = 27{,}67$ суток. Для сырья с фоновым источником плотностью $q_\text{ф} = 5$ Вт/м^3, применив формулу (3.2), получим $t_\text{п} = 24{,}82$ суток. Наличие фонового источника почти на трое суток сокращает время достижения пожароопасной температуры.

Анализ решений (3.2) и (3.3) показывает, что величина $t_\text{п}$ прямо пропорциональна произведению ρc. Поэтому сложным для хранения оказывается сырье с малыми удельной теплоемкостью и плотностью. Как показано в работе [2], таким продуктом являются отруби.

Таблица 1

x, м	$T(x,t)$, °C					
	$R = 0{,}1$ м $t = 59$ суток $q_0 = 80$ Вт/м^3		$R = 0{,}3$ м $t = 30$ суток $q_0 = 60$ Вт/м^3		$R = 0{,}5$ м $t = 15$ суток $q_0 = 80$ Вт/м^3	
	формула (2.4)	[6]	формула (2.4)	[6]	формула (2.4)	[6]
0	87,18	87,2	87,65	87,7	89,67	89,7
0,1	83,88	83,9	85,49	85,5	87,85	87,9
0,2	77,70	77,7	79,60	79,6	82,68	82,7
0,4	66,28	66,3	62,53	62,5	65,39	65,4
0,6	56,95	57,0	46,46	46,5	45,60	45,6
1,0	43,80	43,8	26,71	26,7	18,75	18,8
1,6	34,13	34,1	16,98	17,0	8,47	8,5
2,0	31,60	31,6	15,62	15,6	7,72	7,7

Таблица 2

t, сутки	$T(0,t)$, °C	
	теория	эксперимент
5	29,1	28,2
7	37,4	37,0
9	44,7	46,8
11	51,4	56,1

Для них время $t_{\text{п}}$ значительно меньше, чем для других видов сырья. Из таблицы теплофизических характеристик растительного сырья в монографии [2] видно, что отруби имеют самое малое произведение ρc из указанных в таблице. Так что, вывод, следующий из простых аналитических решений (3.2) и (3.3), подтвержден численными методами в других работах.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сергунов В. С.** Дистанционный контроль температуры зерна в элеваторах. М.: Колос, 1977.
2. **Вогман Л. П., Горшков В. И., Дегтярев А. Г.** Пожарная безопасность элеваторов. М.: Стройиздат, 1993.
3. **Вогман Л. П., Дегтярев А. Г.** Пожарная безопасность растительного сырья. Математическая модель процесса самонагревания насыпи растительного сырья // Пожаровзрывобезопасность. 1993. Т. 2, № 1. С. 21–24.
4. **Откидач Д. Н., Абрамов Ю. А.** Особенности построения математической модели, описывающей очаг самонагревания зерновой насыпи в симметричной плоскопараллельной области // Проблемы пожарной безопасности: Сб. науч. тр. ХИПБ. Вып. 4. Харьков: Харьк. ин-т пожарной безопасности, 1988.
5. **Ольшанский В. П.** Температурная задача самонагревания сырья в силосе ступенчатым пластовым очагом // Информационные технологии: наука, техника, технология, образование, здоровье: Сб. науч. тр. ХГПУ. Вып. 7. В 4 частях. Харьков: Харьк. гос. политехн. ун-т, 1999. Ч. 1.
6. **Ольшанский В. П.** К расчету пластового самонагревания растительного сырья в силосе // Проблемы пожарной безопасности: Сб. науч. тр. ХИПБ. Вып. 5. Харьков: Харьк. ин-т пожарной безопасности, 1999.
7. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
8. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
9. **Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.** Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.
10. **Абрамовиц А., Стиган И.** Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию 3/VIII 1999 г.,
в окончательном варианте — 23/XII 1999 г.