УДК 532.5:532.517.4

ЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА КОЛЕБАТЕЛЬНО-ВОЗБУЖДЕННОГО ГАЗА 2. ВЯЗКАЯ ЗАДАЧА

Ю. Н. Григорьев*,**, И. В. Ершов*

* Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
** Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия
E-mails: grigor@ict.nsc.ru, i_ershov@ngs.ru

На основе линейной теории исследована устойчивость вязких возмущений в сверхзвуковом плоском течении Куэтта колебательно-возбужденного газа, описываемых системой линеаризованных уравнений двухтемпературной газовой динамики, включающих сдвиговую и объемную вязкости. Показано, что в спектре задачи устойчивости плоских волн, как и в случае совершенного газа, выделяются два множества. Одно из них состоит из вязких акустических мод, которые при больших числах Рейнольдса сходятся к четным и нечетным невязким акустическим модам. Собственные значения из другого множества не имеют асимптотической связи с невязкой задачей и характеризуются большими декрементами затухания. Выделены две наиболее неустойчивые вязкие акустические моды I и II, пределы которых рассматривались ранее в невязком приближении. Показано, что для обеих мод в пространстве параметров задачи существуют области, в которых наличие вязкости вызывает сильную дестабилизацию течения, причем декременты нарастания возмущений существенно превышают соответствующие значения для невязкого течения, в то же время термическое возбуждение во всем расчетном диапазоне параметров повышает устойчивость вязкого потока. Установлено, что в случае колебательно-возбужденного газа критические числа Рейнольдса в зависимости от степени термической неравновесности на 12 % больше, чем в случае совершенного газа.

Ключевые слова: линейная теория устойчивости, колебательная релаксация, уравнения двухтемпературной аэродинамики, моды возмущений.

DOI: 10.15372/PMTF20160207

Введение. В работе [1] в невязком приближении подробно исследована устойчивость сверхзвукового плоского течения Куэтта колебательно-возбужденного двухатомного газа. В частности, для выделенных в [2–4] в идеальном газе мод возмущений I, II показано, что релаксация колебательных уровней приводит к значительному уменьшению инкрементов нарастания наиболее неустойчивой моды II и повышению устойчивости моды I.

В данной работе, являющейся продолжением [1], изучается влияние колебательной релаксации на развитие вязких возмущений. Кроме того, представляло интерес разрешить противоречие в результатах работы [2] и более поздних работ [3, 4], в которых исследовалась устойчивость возмущений в сверхзвуковом течении Куэтта совершенного газа при

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-00274а).

конечных числах Рейнольдса. В [2] выявлены стабилизирующее влияние вязкости и отсутствие растущих вязких мод вплоть до значений числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = 5 \cdot 10^6$ при числах Маха $\mathrm{M}_\infty \leqslant 5$. В работах [3, 4], наоборот, при $\mathrm{Re} \geqslant 5 \cdot 10^5$, $\mathrm{M} \geqslant 3$ показана неустойчивость вязкой моды II и в некоторой узкой подобласти параметров режима обнаружена сильная дестабилизация моды I, устойчивой в невязком пределе. В работе [1] сделано предположение, что причина различия заключается в несовершенстве реализации использованного в [2] численного метода коллокаций, для которого в [3, 4] применялось математическое обеспечение, разработанное для решения задач гидродинамической устойчивости. Кроме того, асимптотика спектра собственных мод для конечных чисел Рейнольдса в [2] оценивалась на основе подхода, отличающегося от обычного для линейной теории [5] асимптотического построения кривой нейтральной устойчивости.

В данной работе, как и в [2–4], используется метод коллокаций, модифицированный для решения спектральных задач теории гидродинамической устойчивости [6, 7] и апробированный в работах [8, 9]. Для независимой проверки результатов численных расчетов, так же как в [3], спектральная задача решалась методом стрельбы с помощью процедуры Рунге — Кутты четвертого порядка. Результаты расчетов для случая совершенного газа, выполненные с целью оценки диссипативного воздействия колебательной релаксации на неустойчивые вязкие возмущения, хорошо согласуются с результатами [3, 4]. Таким образом, противоречие между работами [2] и [3, 4] можно считать разрешенным в пользу последних. Основной результат данной работы состоит в том, что повышение линейной устойчивости сверхзвукового течения Куэтта при наличии колебательной релаксации, установленное в [1] для невязких мод I, II, имеет место и для конечных чисел Рейнольдса.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Рассматривается задача линейной устойчивости плоского сжимаемого течения Куэтта колебательно-возбужденного молекулярного газа. Задача описывается системой уравнений двухтемпературной аэродинамики [10, 11], линеаризованной относительно точного решения:

$$
\begin{gathered}
U_s(y) = y, \qquad T_s(y) = T_{v,s}(y) = 1 + \frac{(\gamma-1)\mathrm{Pr}\mathrm{M}^2}{2}\,(1-y^2), \\
\rho_s(y) = \frac{1}{T_s(y)}, \qquad p_s(x_2) = \frac{1}{\gamma \mathrm{M}^2}\,.
\end{gathered} \tag{1}
$$

Система линейных уравнений для возмущений гидродинамических величин в безразмерных переменных имеет вид [1]

$$
\frac{\partial\hat\rho}{\partial t} + U_s\,\frac{\partial\hat\rho}{\partial x} + \rho_s\Big(\frac{\partial\hat u_x}{\partial x} + \frac{\partial\hat u_y}{\partial y}\Big) + \hat u_y\,\frac{\partial\rho_s}{\partial y} = 0,
$$

$$
\rho_s\Big(\frac{\partial\hat u_x}{\partial t} + U_s\,\frac{\partial\hat u_x}{\partial x} + \hat u_y\,\frac{\partial U_s}{\partial y}\Big) = -\frac{\partial\hat p}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Big(\frac{\partial^2\hat u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\hat u_x}{\partial y^2}\Big) + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Big(\alpha_1 + \frac{1}{3}\Big)\Big(\frac{\partial^2\hat u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\hat u_y}{\partial x\,\partial y}\Big),
$$

$$
\rho_s\Big(\frac{\partial\hat u_y}{\partial t} + U_s\,\frac{\partial\hat u_y}{\partial y}\Big) = -\frac{\partial\hat p}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Big(\frac{\partial^2\hat u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\hat u_y}{\partial y^2}\Big) + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Big(\alpha_1 + \frac{1}{3}\Big)\Big(\frac{\partial^2\hat u_x}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\hat u_y}{\partial y^2}\Big),
$$

$$
\begin{aligned}
\rho_s\Big(\frac{\partial\hat T}{\partial t} + U_s\,\frac{\partial\hat T}{\partial x} + \hat u_y\,\frac{\partial T_s}{\partial y}\Big) + \gamma(\gamma-1)\mathrm{M}^2 p_s\,\Big(\frac{\partial\hat u_x}{\partial x} + \frac{\partial\hat u_y}{\partial y}\Big) &= \\
= \frac{\gamma}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\,\Big(\frac{\partial^2\hat T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\hat T}{\partial y^2}\Big) + \frac{\gamma_v\rho_s(\hat T_v - \hat T)}{\tau} + \frac{2\gamma(\gamma-1)\mathrm{M}^2}{\mathrm{Re}}\Big(\frac{\partial\hat u_x}{\partial y} + \frac{\partial\hat u_y}{\partial x}\Big)\frac{dU_s}{dy}&,
\end{aligned} \tag{2}
$$

$$\gamma_v\rho_s\Big(\frac{\partial\hat T_v}{\partial t}+U_s\,\frac{\partial\hat T_v}{\partial x}+\hat u_y\,\frac{\partial T_{v,s}}{\partial y}\Big)=\frac{20}{33}\,\frac{\gamma\gamma_v}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\Big(\frac{\partial^2\hat T_v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\hat T_v}{\partial y^2}\Big)-\frac{\gamma_v\rho_s(\hat T_v-\hat T)}{\tau},$$
$$\gamma\mathrm{M}^2\hat p=\rho_s\hat T+\hat\rho T_s.$$

Характерные значения параметров для обезразмеривания, обозначения переменных, параметров течения и критериев подобия совпадают с использованными в [1]. Принималось, что на границах канала $y = 0$ и $y = 1$ все возмущения обращаются в нуль и периодичны по продольной координате x.

Периодические по x возмущения рассматриваются в виде бегущих плоских волн:

$$\boldsymbol q(x,y,t)=\boldsymbol q_0(y)\,\mathrm{e}^{i\alpha(x-ct)},$$
$$\boldsymbol q(x,y,t)=(\hat u_x,\hat u_y,\hat\rho,\hat T,\hat T_v,\hat p),\qquad \boldsymbol q_0(y)=(u,\alpha v,\rho,\theta,\theta_v,p). \tag{3}$$

Здесь α — волновое число, связанное с периодической переменной x; $c = c_r + ic_i$ — комплексная фазовая скорость; i — мнимая единица. После подстановки (3) в уравнения системы (2) задача сводится к следующей системе уравнений для амплитуд возмущений:

$$D\rho+\alpha\rho_s'v+\rho_s\sigma=0,\quad \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\Delta u-\rho_sDu-\alpha\rho_svU_s'-i\alpha\varepsilon=0,\quad \frac{\alpha}{\mathrm{Re}}\,\Delta v-\alpha\rho_sDv-\varepsilon'=0,$$
$$\frac{\gamma}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\,\Delta\theta-\rho_sD\theta-\alpha\rho_svT_s'-(\gamma-1)\sigma+\frac{2\gamma(\gamma-1)\mathrm{M}^2}{\mathrm{Re}}\,(u'+i\alpha^2v)U_s'+\frac{\gamma_v\rho_s}{\tau}\,(\theta_v-\theta)=0,$$
$$\frac{20\gamma\gamma_v}{33\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\,\Delta\theta_v-\gamma_v\rho_sD\theta_v-\alpha\gamma_v\rho_svT_s'-\frac{\gamma_v\rho_s}{\tau}\,(\theta_v-\theta)=0,\qquad \gamma\mathrm{M}^2p=\rho_s\theta+\rho T_s, \tag{4}$$
$$D=i\alpha(U_s-c),\qquad \sigma=\alpha(v'+iu),\qquad \varepsilon=p-\frac{\sigma}{\mathrm{Re}}\Big(\alpha_1+\frac{1}{3}\Big),\qquad \Delta=\frac{d^2}{dy^2}-\alpha^2.$$

Здесь и далее штрихи обозначают дифференцирование по переменной y. На стенках канала ($y = 0$ и $y = 1$) функции амплитуды принимают нулевые значения.

2. Спектральная задача. Система (4) с однородными граничными условиями представляет собой спектральную задачу, в которой собственными значениями являются комплексные фазовые скорости возмущений $c = c_r + ic_i$, а число Рейнольдса Re, число Маха M и волновое число α служат параметрами. Для расчета собственных значений вязких мод спектральная задача (4) с однородными граничными условиями решалась численно в среде пакета Matlab. Использовался метод коллокаций [6, 7], ранее примененный в работах [8, 9]. Следует отметить, что в работах [2–4], посвященных исследованию линейной устойчивости течения Куэтта в невозбужденном совершенном газе, также применялся метод коллокаций, причем в [3, 4] использовался пакет Matlab. В данном случае спектральная задача записывалась в матричном представлении:

$$A_1\boldsymbol\varphi''+A_2\boldsymbol\varphi'+A_3\boldsymbol\varphi=cA_4\boldsymbol\varphi,\qquad \boldsymbol\varphi\big|_{y=0}=\boldsymbol\varphi\big|_{y=1}=0. \tag{5}$$

Здесь $\boldsymbol\varphi = (\rho, u, v, \theta, \theta_v)$; A_k ($k = 1, 2, 3, 4$) — матрицы размером 5×5:

$$A_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/\mathrm{Re} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & (\alpha_1+4/3)/\mathrm{Re} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \gamma/(\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20\gamma\gamma_v/(33\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr})\end{pmatrix},$$

$$A_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\rho_s & 0 & 0\\ 0 & 0 & i\alpha^2(\alpha_1+1/3)/\mathrm{Re} & 0 & 0\\ -T_s/(\gamma\mathrm{M}^2) & i\alpha(\alpha_1+1/3)/\mathrm{Re} & 0 & -\rho_s/(\gamma\mathrm{M}^2) & 0\\ 0 & 2\gamma(\gamma-1)\mathrm{M}^2U_s'/\mathrm{Re} & -\alpha(\gamma-1) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -iU_s & -i\rho_s & -\rho_s' & 0 & 0 \\ -i\alpha T_s/(\gamma \mathrm{M}^2) & -\alpha a_1 & -\alpha\rho_s U_s' & -i\alpha\rho_s/(\gamma\mathrm{M}^2) & 0 \\ -T_s'/(\gamma\mathrm{M}^2) & 0 & -\alpha^2 a_2 & -\rho_s'/(\gamma\mathrm{M}^2) & 0 \\ 0 & -i\alpha(\gamma-1) & \alpha a_5 & -a_3 & \gamma_v\rho_s/\tau \\ 0 & 0 & \alpha\gamma_v\rho_s T_s' & \gamma_v\rho_s/\tau & -\gamma_v a_4 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\rho_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\alpha^2\rho_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\alpha\rho_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\alpha\gamma_v\rho_s \end{pmatrix},$$

$$a_1 = \frac{\alpha}{\mathrm{Re}}\Big(\alpha_1 + \frac{4}{3}\Big) + i\rho_s U_s, \quad a_2 = \frac{\alpha}{\mathrm{Re}} + i\rho_s U_s, \quad a_3 = \frac{\gamma\alpha^2}{\mathrm{RePr}} + \frac{\gamma_v\rho_s}{\tau} + i\alpha\rho_s U_s,$$

$$a_4 = \frac{20\gamma\alpha^2}{33\mathrm{RePr}} + \frac{\rho_s}{\tau} + i\alpha\rho_s U_s, \quad a_5 = \frac{2i\alpha\gamma(\gamma-1)\mathrm{M}^2 U_s'}{\mathrm{Re}} - \rho_s T_s'.$$

В качестве узлов коллокации выбирались точки Гаусса — Лобатто

$$y_n = \frac{1}{2}\Big[1 + \cos\Big(\frac{\pi n}{N}\Big)\Big], \qquad n = 0, 1, \ldots, N,$$

в которых полином Чебышева N-й степени $T_N(y)$ имеет экстремумы на отрезке $y \in [0, 1]$. Дифференциальные операторы первого порядка, входящие в спектральную задачу, аппроксимируются на данной сетке матрицей коллокационных производных D_N^1 [6, 7] размером $(N+1) \times (N+1)$.

Построенная таким образом дискретная аппроксимация позволяет свести задачу (5) к обобщенной задаче на собственные значения (линейному спектральному матричному пучку) относительно спектрального параметра c:

$$\sum_{j=0}^{5N+4} (G_{ij} - cF_{ij}) z_j = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, 5N+4. \tag{6}$$

Здесь вектор неизвестных $\boldsymbol{z}$ размером $5(N+1)$ состоит из значений собственных функций в узлах коллокации:

$$\boldsymbol{z} = (\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_N,\, u_0, u_1, \ldots, u_N,\, v_0, v_1, \ldots, v_N,\, \theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_N,\, \theta_{v,0}, \theta_{v,1}, \ldots, \theta_{v,N}),$$

матрицы G, F размером $5(N+1) \times 5(N+1)$ вычисляются с использованием специальной процедуры Matlab по формулам

$$G = A_1 \otimes D_N^2 + A_2 \otimes D_N^1 + A_3 \otimes I_N, \qquad F = A_4 \otimes I_N,$$

знак “$\otimes$” обозначает прямое (тензорное) произведение матриц [12]; I_N — единичная матрица размером $(N+1) \times (N+1)$.

Однородные граничные условия для уравнения (6) учитываются неявно через оператор D_N^1 и на дискретном уровне реализуются заменой матрицы D_N^1 на окаймленную матрицу размером $(N-1) \times (N-1)$. Последняя получается при выполнении условий

$$D_{0,j}^1 = D_{N,j}^1 = 0, \quad D_{i,0}^1 = D_{i,N}^1 = 0, \qquad i = 0, \ldots, N, \quad j = 0, \ldots, N.$$

Для нахождения всех собственных значений и соответствующих собственных функций обобщенной спектральной задачи (6) использовалась процедура Matlab, реализующая QZ-алгоритм [13], который позволяет одновременным ортогональным преобразованием привести пару матриц G, F к обобщенной верхней треугольной форме. В результате применения данной процедуры для фиксированных значений чисел Рейнольдса Re и Маха M, степени неравновесности колебательной энергии γ_v, времени колебательной релаксации τ и волнового числа α получался набор $N+1$ собственных значений $c = c_r + ic_i$.

Для проверки точности используемого метода проведены расчеты собственных значений c с помощью метода стрельбы. Для этого уравнения (4) заменялись нормальной системой уравнений первого порядка с однородными граничными условиями для вещественных и мнимых частей функций ρ, u, v, θ, θ_v. Полученная таким образом система при фиксированных наборах параметров M, Re, Pr, α, α_1, γ_v, τ интегрировалась численно с помощью процедуры Рунге — Кутты четвертого порядка на интервалах $y \in [0; 0{,}5]$ и $y \in [0{,}5; 1{,}0]$ с шагом $\Delta y = 10^{-3}$. Точкой "прицеливания" служила середина канала ($y = 0{,}5$). Значения c_r и c_i подбирались таким образом, чтобы вычисленные "слева" и "справа" в точке $y = 0{,}5$ значения функций ρ_r, u_r, v_r, θ_r и $\theta_{v,r}$, ρ_i, u_i, v_i, θ_i, $\theta_{v,i}$ совпадали с точностью до 10^{-8}. Соответствующее такому совпадению значение c принималось в качестве собственного значения при заданном наборе параметров M, Re, Pr, α, α_1, γ_v, τ. Сравнение результатов, полученных с помощью методов коллокаций и стрельбы, показало, что различия значений $c = c_r + ic_i$ наблюдаются лишь в шестом-седьмом десятичных знаках после запятой. Таким образом была обеспечена необходимая точность вычисления инкрементов (декрементов) возмущений.

Расчет нейтральных кривых $c_i(\alpha, \mathrm{Re}) = 0$ для n-й вязкой моды возмущений проводился следующим образом. При фиксированных значениях параметров α_1, γ_v, τ и числа Маха M вычислялись двумерные массивы инкрементов (декрементов) n-й вязкой моды

$$\omega_{jk}^n = \omega^n(\alpha_j, \mathrm{Re}_k) = \alpha_j c_i^n(\alpha_j, \mathrm{Re}_k), \qquad (7)$$

где одномерные массивы α_j, Re_k рассчитывались по формулам

$$\alpha_j = \alpha_0 + j\,\Delta\alpha, \quad j = 0, 1, \ldots, J, \qquad \mathrm{Re}_k = \mathrm{Re}_0 + k\,\Delta\mathrm{Re}, \quad k = 0, 1, \ldots, K,$$

$\Delta\alpha$, $\Delta\mathrm{Re}$ — приращения волнового числа и числа Рейнольдса соответственно.

Массив (7) определяет поверхность $\omega(\alpha, \mathrm{Re})$ для n-й вязкой моды возмущений. Координаты в множестве, определяющем геометрическое место точек данной линии уровня $\omega(\alpha, \mathrm{Re}) = C$ на плоскости (α, Re), находились в соответствии с неравенством

$$|\omega^n(\alpha_j, \mathrm{Re}_k) - C| \leqslant 10^{-8},$$

где C — некоторое заданное число. При $C = 0$ получается нейтральная кривая $\omega(\alpha, \mathrm{Re}) = 0$ для n-й вязкой моды в терминах инкремента возмущений.

Расчеты проводились при следующих значениях параметров: $\gamma_v = 0 \div 0{,}667$; $\tau = 10^{-2} \div 10$; $\alpha_1 = 0 \div 2$; $\alpha = 0 \div 10$; $\mathrm{Re} = 10^4 \div 10^8$; $\Delta\mathrm{Re} = 50$; $\Delta\alpha = 10^{-3}$; $\mathrm{M} = 0{,}5 \div 25{,}0$; $\mathrm{Pr} = 3/4$; $\gamma = 7/5$. Число узлов коллокации в интервале $y \in [0, 1]$ варьировалось в диапазоне от $N+1 = 100$ до $N+1 = 500$ и в большинстве расчетов принималось равным $N+1 = 300$. Такой выбор определялся отмеченной в работах [3, 4] чувствительностью собственных значений вязкой задачи к погрешностям вычислений.

3. Результаты расчетов. Параметрические расчеты спектральной задачи (6) показали, что изменение значений времени колебательной релаксации в диапазоне $10^{-2} \leqslant \tau \leqslant 10$ слабо влияет на характер спектров вязких возмущений. Поэтому ниже расчетные данные приведены для одного значения времени релаксации $\tau = 1$.

Для течения Куэтта совершенного газа в расчетах [2, 3] показано, что в спектре фазовых скоростей вязких возмущений выделяются два характерных множества S_a и S_v, которые являются обобщением разбиения, полученного в [14] для несжимаемых течений. Каждое собственное значение, входящее в S_a, при $\mathrm{Re} \to \infty$ сходится к некоторому собственному значению для одной из невязких мод. Собственные значения из множества S_v не

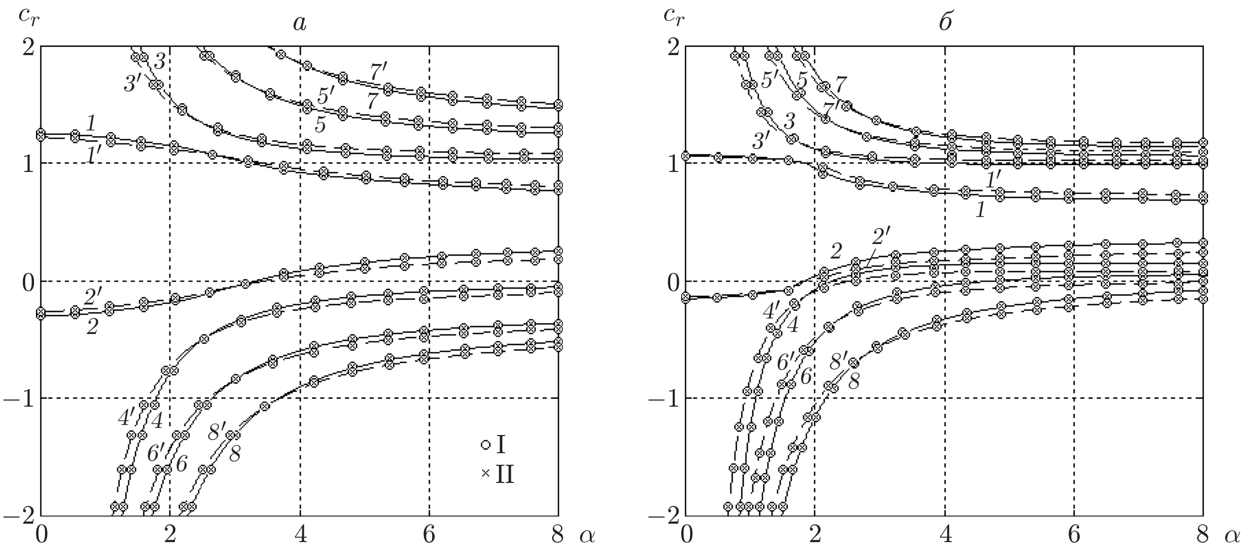

Рис. 1. Зависимости $c_r(\alpha)$ для чисел Маха M = 2 (*а*) и M = 5 (*б*) при $\alpha_1 = 0$: *1*, *1'* — мода I, *2*, *2'* — мода II, *3*, *3'* — мода III, *4*, *4'* — мода IV, *5*, *5'* — мода V, *6*, *6'* — мода VI, *7*, *7'* — мода VII, *8*, *8'* — мода VIII; I — $\mathrm{Re} = 10^5$, II — $\mathrm{Re} = 10^6$; сплошные линии — невязкие моды при $\gamma_v = 0$, штриховые — невязкие моды при $\gamma_v = 0{,}667$

имеют асимптотической связи с невязкой задачей и характеризуются большими декрементами затухания. Расчеты вязких возмущений показали, что такая структура спектра имеет место и в случае колебательно-возбужденного газа. Так, разбиение множества мод S_a на четные и нечетные, классифицированное в [1–3] для невязких возмущений в равновесном и колебательно-возбужденном газах, сохраняется и для вязких возмущений. В частности, сохраняется поведение выделенных мод I и II, имеющих конечные пределы $c_r(\alpha)$ при $\alpha \to 0$. Поскольку возможна неоднозначная трактовка физического смысла этих и других мод множества S_a, необходимо сделать следующее замечание. В отличие от известных мод возмущений в сжимаемом пограничном слое, где первая мода является обобщением волны Толлмина — Шлихтинга на случай сжимаемого течения, а вторая — акустической модой, оба семейства мод представляют собой акустические моды [15].

Графики зависимостей волновой скорости от волнового числа $c_r(\alpha)$ для семейств четных и нечетных мод возмущений из множества S_a приведены на рис. 1. Сплошными и штриховыми линиями показаны зависимости $c_r(\alpha)$ для четных и нечетных мод невязких возмущений для невозбужденного ($\gamma_v = 0$) и колебательно-возбужденного ($\gamma_v = 0{,}667$) газов соответственно [1]. Из рис. 1 следует, что диссипативные эффекты, обусловленные наличием вязкости (значением числа Рейнольдса) и возбуждением внутренних степеней свободы молекул, практически не влияют на характер кривых $c_r(\alpha)$, рассчитанных в невязком приближении при $\mathrm{Re} \to \infty$ [3]. На рис. 1 видно, что моды I и II быстрее попадают в интервал $c_r = [0, 1]$, в котором возможно развитие невязкой неустойчивости [1, 2], и поэтому являются наиболее неустойчивыми. При M = 2 кривые мод I и II практически зеркально-симметричны относительно линии $c_r = 0{,}5$, соответствующей положению критического слоя на оси канала. Следует отметить, что с увеличением числа Маха точки перехода мод I и II в интервал $c_r = [0, 1]$ сдвигаются в область меньших волновых чисел α, а симметрия относительно линии $c_r = 0{,}5$ нарушается. Это обусловлено существенным отклонением профиля температуры T_s (1) от симметричного при возрастании числа Маха.

Общая структура спектра вязких возмущений в зависимости от параметров течения представлена на рис. 2, 3. Большинство точек спектра на комплексной плоскости (c_r, c_i)

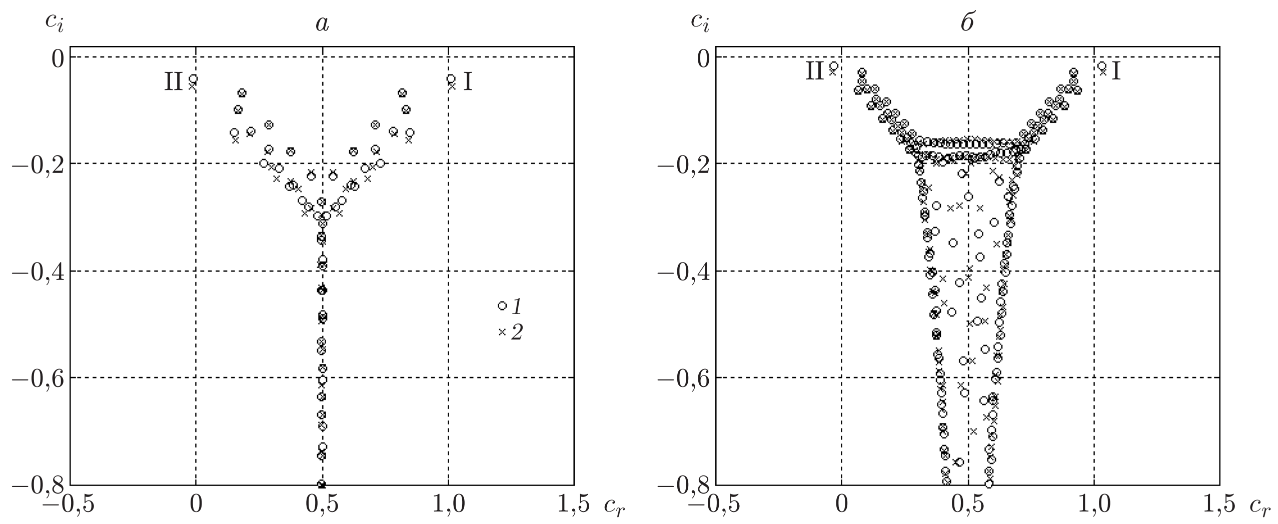

Рис. 2. Спектры собственных значений $c = c_r + ic_i$ при М $= 3$, $\alpha = 0{,}1$, $\gamma_v = 0$: *а* — Re $= 10^5$, *б* — Re $= 10^6$; *1* — $\alpha_1 = 0$, *2* — $\alpha_1 = 2$; I — мода I, II — мода II

принадлежит множеству S_v сильнозатухающих чисто вязких возмущений. Все они находятся в нижней полуплоскости в пределах полосы $0 \leqslant c_r \leqslant 1$. Это означает, что развитие таких возмущений обусловлено существованием в области течения критических слоев, в которых фазовая скорость возмущения совпадает со скоростью потока [14]. Вследствие сильного затухания этих возмущений их свойства в данной работе детально не рассматриваются. Следует отметить только, что в рассматриваемом случае учет объемной вязкости (см. рис. 2) и даже максимального возбуждения внутренних степеней свободы (см. рис. 3) практически не приводит к изменению границ множества S_v по сравнению со случаем совершенного газа [2, 3]. Для возбужденного газа имеет место некоторый сдвиг собственных значений в сторону больших декрементов затухания, пренебрежимо малый по сравнению со значениями $c_i \in [0{,}1; 1{,}0]$. Из рис. 2, 3 следует, что сохраняются также все особенности динамики спектра возмущений в зависимости от параметров режима и волнового числа α. В частности, с увеличением чисел Рейнольдса Re, Маха М и волнового числа α Y-образная структура множества S_v преобразуется в Н-образную. При небольших волновых числах α сохраняется отмеченное в [2] тройное расщепление V-образной головной части Y-структуры. Следует отметить, что в [2] это расщепление объясняется наличием в аналогичной (4) системе уравнений для совершенного газа трех диссипативных слагаемых с разными коэффициентами. Согласно [2] в рассматриваемом случае при расщеплении можно было бы ожидать появления четвертой ветви, обусловленного наличием диссипативного слагаемого в уравнении для возмущений колебательной температуры. Однако в проведенных расчетах такой ветви не наблюдается (см., например, рис. 3,*а*).

При небольших сверхзвуковых числах Маха на рис. 2 множество S_a представлено двумя собственными значениями, соответствующими модам I и II, которые с увеличением числа Рейнольдса становятся близкими к нейтральным модам с $c_i \sim 10^{-5}$ (ср. [1]). На рис. 3 видно, что с увеличением числа Маха и волнового числа α появляются все более высокие моды III, V, VII, … и IV, VI, VIII, …, которые локализуются вблизи оси $c_i = 0$. В соответствии с рис. 1 указанные моды приближаются к полосе $0 \leqslant c_r \leqslant 1$, а моды I, II, IV входят в эту полосу, где в силу первой теоремы Рэлея [1] для их невязких пределов выполняется необходимое условие развития неустойчивости. Видно, что возбуждение внутренних степеней свободы молекул приводит к существенному изменению инкрементов четных и нечетных мод из множества S_a в направлении возрастания их устойчивости.

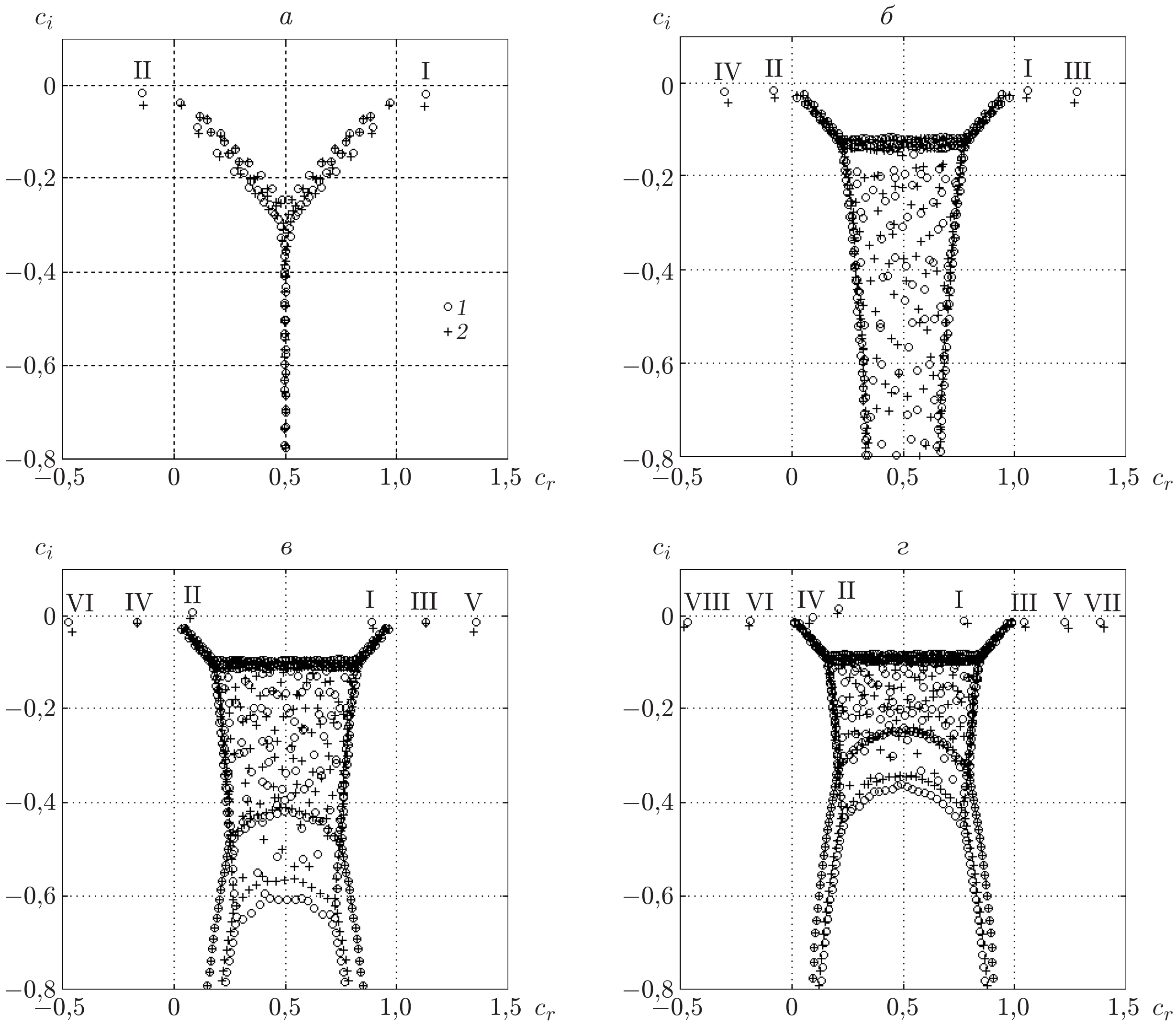

Рис. 3. Спектры собственных значений $c = c_r + ic_i$ при $\mathrm{Re} = 2{,}5 \cdot 10^5$, $\mathrm{M} = 5$: *а* — $\alpha = 0{,}1$, *б* — $\alpha = 1$, *в* — $\alpha = 2$, *г* — $\alpha = 3$; *1* — $\alpha_1 = \gamma_v = 0$, *2* — $\alpha_1 = 2$, $\gamma_v = 0{,}667$; I–VIII — моды I–VIII

Поведение мнимой составляющей частот $\omega_i(\alpha) = \alpha c_i$ мод I и II показано на рис. 4. Видно, что в достаточно узком диапазоне значений волнового числа α при $\mathrm{M} = 3$ обе моды становятся неустойчивыми. Следует отметить, что в случае невязкого течения мода I остается устойчивой при всех числах Маха и α, в то время как мода II, наоборот, является неустойчивой при $0 < c_r$, а возбуждение колебательных мод стабилизирует невязкий поток [1]. Максимальный инкремент нарастания на рис. 4,*б* более чем в 1,5 раза превышает максимальное значение для моды II при $\mathrm{M} = 3$ в случае невязкого течения (см. таблицу в [1]). Таким образом, возникновение пиков обусловлено дестабилизирующим влиянем вязкости в узком диапазоне волновых чисел α. При дальнейшем возрастании числа Маха мода I становится устойчивой (см. рис. 4,*в*), причем при наличии вязкости декременты затухания больше, чем в случае невязкого течения (штрихпунктирная кривая). В то же время для моды II с увеличением числа Маха максимум инкремента возрастания смещается в область меньших волновых чисел, где при невязком течении, как это следует из рис. 1,*б*, 4,*г*, мода II устойчива. При больших волновых числах имеется определенный

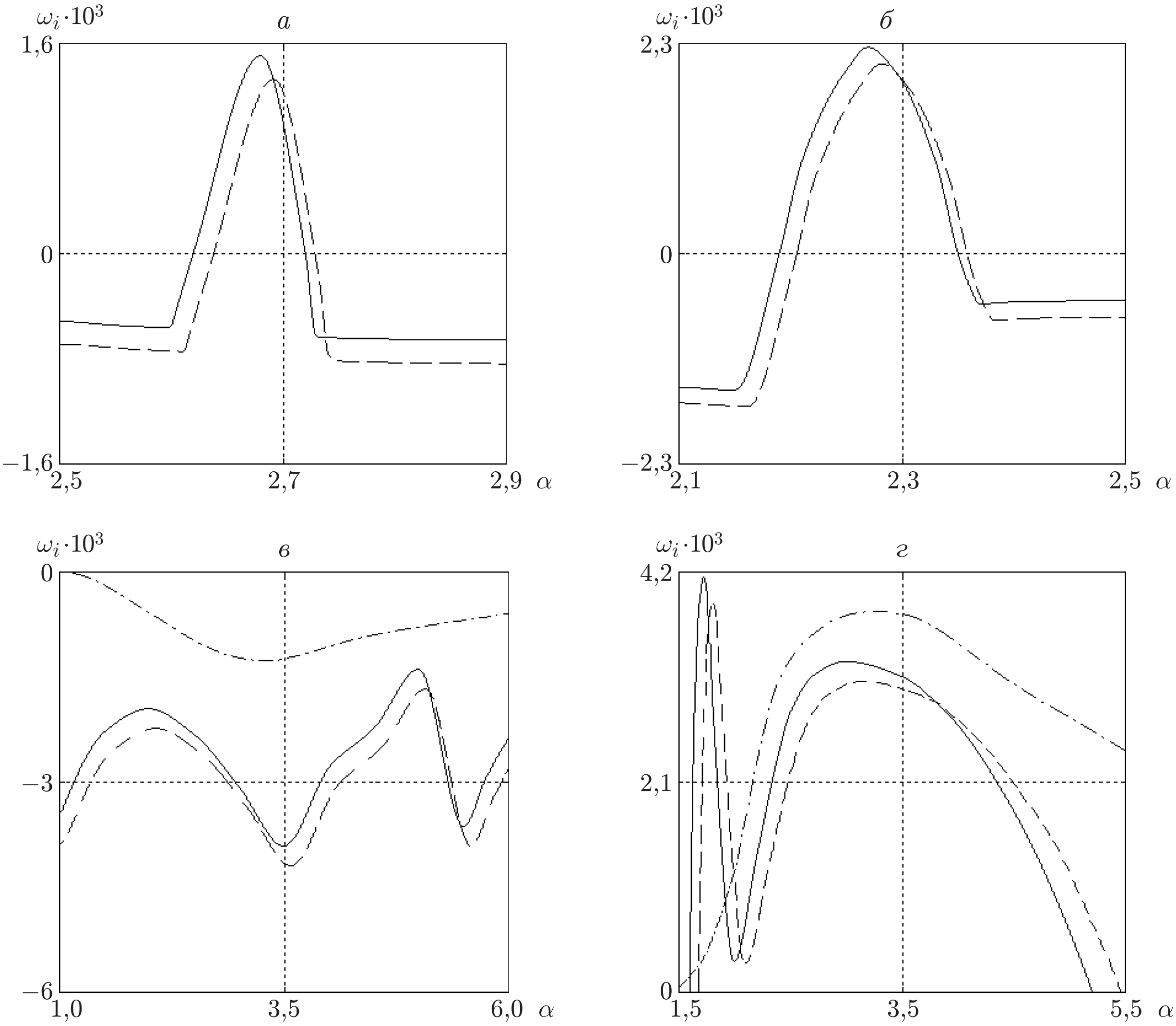

Рис. 4. Зависимости $\omega_i(\alpha)$ при $\mathrm{Re} = 5 \cdot 10^5$ и $\mathrm{M} = 3$ (*а*, *б*), $\mathrm{M} = 5$ (*в*, *г*):
а, *в* — мода I; *б*, *г* — мода II; сплошные линии — совершенный газ, штриховые — колебательно-возбужденный газ ($\alpha_1 = 2$, $\gamma_v = 0{,}667$), штрихпунктирные — идеальный газ ($\gamma_v = 0$)

интервал, в котором наличие вязкости приводит к уменьшению инкрементов нарастания моды II по сравнению с невязким течением, при этом мода II остается неустойчивой во всем исследованном диапазоне $\mathrm{M} \in [3, 15]$. Вместе с тем расчеты показывают, что для обеих мод в большей части области изменения Re, M и α вязкость является стабилизирующим фактором. При этом во всем диапазоне параметров термическое возбуждение молекул газа оказывает преимущественно стабилизирующее воздействие.

На рис. 5 представлены кривые нейтральных возмущений для мод I и II. На рис. 5,*а* видно, что при $\mathrm{M} = 3$ во всем диапазоне параметров мода II менее устойчива по сравнению с модой I. При возбуждении молекул газа размер области неустойчивости, расположенной между ветвями нейтральной кривой, практически не меняется. Вместе с тем при возбуждении кривые смещаются в сторону больших значений Re и α, что приводит к увеличению критических значений числа Рейнольдса Re_{cr} (ср. абсциссы критических точек K_1, K_1', K_2, K_2'), ниже которых все возмущения затухают. Результаты сравнения рис. 5,*а*,*б* и рис. 4,*в*,*г*

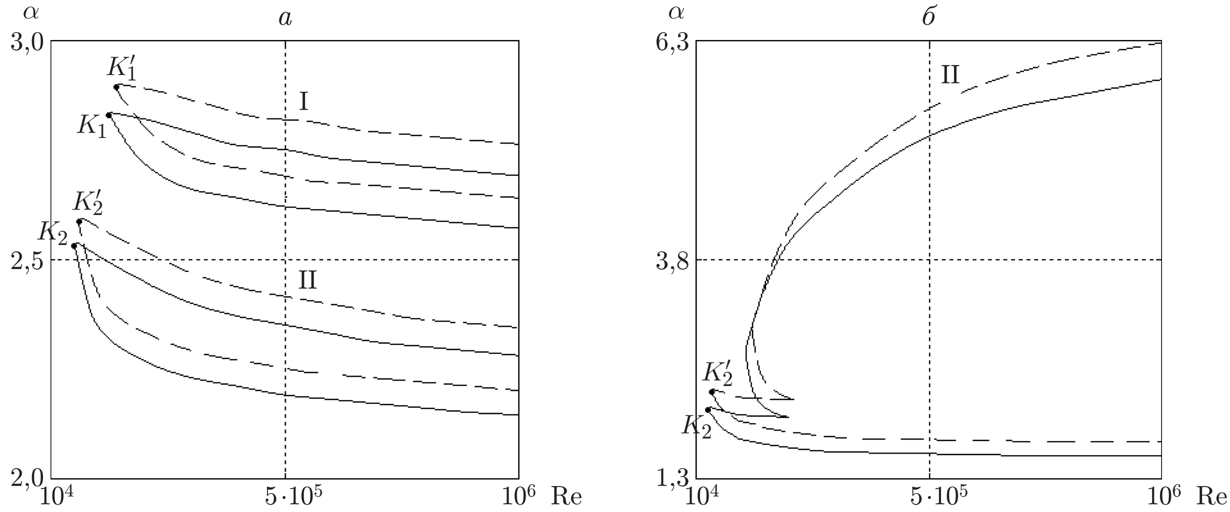

Рис. 5. Кривые нейтральной устойчивости $\omega_i(\mathrm{Re}, \alpha) = 0$:
а — M = 3, *б* — M = 5; сплошные линии — совершенный газ, штриховые — колебательно-возбужденный газ ($\alpha_1 = 2$, $\gamma_v = 0{,}667$); I — мода I, II — мода II; K_1, K_1' — критические точки моды I, K_2, K_2' — критические точки моды II

Критические значения числа Рейнольдса Re_{cr}
и соответствующие им значения волновых чисел α_{cr} для моды II

M	$\alpha_1 = 0$, $\gamma_v = 0$		$\alpha_1 = 2$, $\gamma_v = 0{,}667$	
	$\mathrm{Re}_{cr}\cdot10^{-4}$	α_{cr}	$\mathrm{Re}_{cr}\cdot10^{-4}$	α_{cr}
3	5,0060	2,5460	5,6061	2,6039
5	2,3830	2,1310	2,6927	2,3377
7	2,1640	1,9301	2,4235	2,1801
9	3,5083	1,8706	3,9626	2,1226
11	5,5753	1,8794	6,2722	2,1144
13	7,5244	1,8839	8,4943	2,1119
15	8,5150	1,8110	9,6151	2,0660

показывают, что с ростом числа Маха область неустойчивости моды II существенно увеличивается, в то время как мода I становится устойчивой.

В таблице приведены значения Re_{cr} и α_{cr} для моды II в зависимости от числа Маха M и параметров возбуждения α_1, γ_v. Из данных таблицы следует, что критические значения числа Рейнольдса Re_{cr} при всех числах Маха M увеличиваются приблизительно на 12 % при возрастании параметров α_1 и γ_v до максимальных значений, принятых в расчетах.

На рис. 6 представлены зависимости $\mathrm{Re}_{cr}(\mathrm{M})$ и $\alpha_{cr}(\mathrm{M})$ для совершенного и термически возбужденного газов, характеризующие влияние сжимаемости на критические параметры устойчивости сверхзвукового течения Куэтта, определяемые модой II. В обоих случаях зависимости имеют немонотонный характер, причем в области умеренных сверхзвуковых чисел Маха при увеличении M устойчивость течения уменьшается до некоторого минимального значения Re_{cr}, дальнейшее увеличение M стабилизирует течение. Неоднозначное влияние числа Маха на устойчивость в данном случае не является исключительным и наблюдается, например, в сверхзвуковом пограничном слое [16]. Вместе с тем во всем диапазоне чисел Маха, в котором мода II неустойчива, термическое возбуждение оказывает стабилизирующее воздействие на течение.

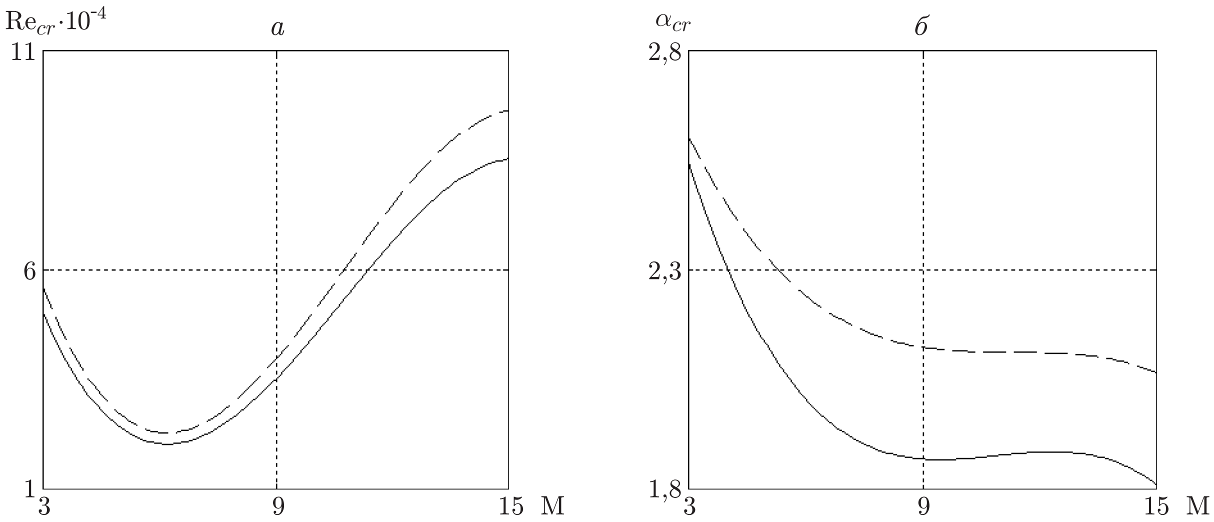

Рис. 6. Зависимости $\mathrm{Re}_{cr}(\mathrm{M})$ (*а*) и $\alpha_{cr}(\mathrm{M})$ (*б*) для моды II:
сплошные линии — совершенный газ, штриховые — колебательно-возбужденный газ ($\alpha_1 = 2$, $\gamma_v = 0{,}667$)

4. Выводы. Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы.

Множество собственных значений линейной задачи устойчивости сверхзвукового вязкого течения Куэтта термически возбужденного молекулярного газа, как и в случае совершенного газа, делится на два непересекающихся множества S_a и S_v. Собственные значения из множества S_a при $\mathrm{Re} \to \infty$ сходятся к собственным значениям для невязких акустических мод I, II, III, $\ldots$. Собственные значения из множества S_v не имеют асимптотической связи с невязкой задачей и характеризуются большими декрементами затухания.

Наиболее неустойчивыми являются вязкие моды I и II множества S_a. Влияние вязкости на их поведение имеет неоднозначный характер. Мода I, невязкий предел которой является устойчивым во всем диапазоне чисел Маха и волновых чисел, при конечных числах Рейнольдса $\mathrm{Re} > 3 \cdot 10^4$ становится неустойчивой в узкой области $2{,}50 < \alpha < 2{,}75$ и $\mathrm{M} \approx 3$. При других значениях этих параметров наличие вязкости приводит к увеличению устойчивости моды I по сравнению с невязким течением. Вязкая мода II, неустойчивая в невязком течении при всех значениях M и α, для которых $0 < c_r < 1$, становится устойчивой при $\mathrm{M} < 3$ и конечных числах Рейнольдса. При $\mathrm{M} \geqslant 3$ в некотором малом диапазоне волновых чисел инкремент нарастания имеет максимум, существенно превышающий соответствующее максимальное значение для невязкого течения. Вне этого диапазона значений α при $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{cr}$ и наличии вязкости мода II полностью стабилизируется. Тем не менее на плоскости параметров (Re, α) при $\mathrm{M} \geqslant 3$ имеется область неустойчивости моды II.

Параметрические расчеты кривых нейтральной устойчивости моды II в диапазоне $\mathrm{M} \in [3, 15]$ показывают, что зависимость $\mathrm{Re}_{cr}(\mathrm{M})$ имеет немонотонный характер, так же как в случае сверхзвукового пограничного слоя. При этом во всем диапазоне термическая релаксация оказывает стабилизирующее воздействие на течение. В зависимости от степени термической неравновесности критическое значение числа Рейнольдса может на 12 % превышать соответствующее значение для совершенного газа.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Григорьев Ю. Н., Ершов И. В.** Линейная устойчивость течения Куэтта колебательно-возбужденного газа. 1. Невязкая задача // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 2. С. 80–93.

2. **Duck P. W., Erlebacher G., Hussaini M. Y.** On the linear stability of compressible plane Couette flow // J. Fluid Mech. 1994. V. 258. P. 131–165.
3. **Hu S., Zhong X.** Linear stability of viscous supersonic plane Couette flow // Phys. Fluids. 1998. V. 10, N 3. P. 709–729.
4. **Malik M., Dey J., Alam M.** Linear stability, transient energy growth, and the role of viscosity stratification in compressible plane Couette flow // Phys. Rev. E. 2008. V. 77, iss. 3. 036322.
5. **Линь Цзя-цзяо.** Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
6. **Canuto C.** Spectral methods in fluid dynamics / C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. A. Zang. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
7. **Trefethen L. N.** Spectral methods in Matlab. Philadelphia: Soc. Industr. Appl. Math., 2000.
8. **Григорьев Ю. Н., Ершов И. В.** Линейная устойчивость невязкого сдвигового течения колебательно-возбужденного двухатомного газа // Прикл. математика и механика. 2011. Т. 75, вып. 4. С. 581–593.
9. **Григорьев Ю. Н., Ершов И. В.** Критические числа Рейнольдса в течении Куэтта колебательно-возбужденного двухатомного газа. Энергетический подход // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 4. С. 57–73.
10. **Нагнибеда Е. А.** Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов / Е. А. Нагнибеда, Е. В. Кустова. СПб.: Изд-во С.-Петерб. гос. ун-та, 2003.
11. **Григорьев Ю. Н.** Устойчивость течений релаксирующих молекулярных газов / Ю. Н. Григорьев, И. В. Ершов. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2012.
12. **Корн Г.** Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1973.
13. **Moler C. B., Stewart G. W.** An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems // SIAM J. Numer. Anal. 1973. V. 10, N 2. P. 241–256.
14. **Morawetz C. S.** The eigenvalues of some stability problems involving viscosity // J. Rat. Mech. Anal. 1952. V. 1. P. 579–603.
15. **Mack L. M.** On the inviscid acoustic-mode instability of supersonic shear flows. 1. Two-dimensional waves // Theor. Comput. Fluid Dynamics. 1990. V. 2. P. 97–123.
16. **Гапонов С. А.** Развитие возмущений в сжимаемых потоках / С. А. Гапонов, А. А. Маслов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980.

Поступила в редакцию 17/XI 2014 г.