

УДК 532.51

## О ВРАЩЕНИИ ЖИДКОГО СЛОЯ

Е. Н. Журавлева, В. В. Пухначев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия  
 Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,  
 630090 Новосибирск, Россия  
 E-mails: zhuravleva\_e@mail.ru, pukhnachev@gmail.com

Рассматривается задача о вращении слоя жидкости, ограниченного твердой плоскостью и параллельной ей свободной поверхностью. Жидкость может быть идеальной или вязкой. Формулируются условия существования решения соответствующих задач для уравнений Эйлера и Навье — Стокса на бесконечном интервале времени. Приводятся примеры численного решения задачи.

Ключевые слова: течение жидкости со свободной границей, точные решения.

DOI: 10.15372/PMTF20220611

**Введение.** Исследование течений со свободными границами вызывает интерес в течение многих лет. Модели, описывающие такие течения, достаточно сложны, поэтому одним из методов их исследования является рассмотрение инвариантных и частично инвариантных решений. В настоящей работе продолжается исследование частично инвариантного решения уравнений Навье — Стокса, которое можно интерпретировать как течение жидкости в слое, ограниченном твердой стенкой и параллельной ей свободной границей. В результате численного исследования в работе [1] получено решение, соответствующее бесконечному расширению слоя жидкости за конечное время. В работе [2] изучалось влияние вращения слоя на стабилизацию решения и предотвращение неограниченного расширения области течения. В настоящей работе проведено исследование влияния вязкости. Получено точное решение, описывающее движение идеальной не потенциальной жидкости с плоской свободной границей. Найдены условия разрушения этого решения за конечное время. Показано, что наличие вязкости и ненулевой окружной скорости способствует стабилизации рассматриваемого решения.

**1. Вращение слоя идеальной жидкости.** Исследуется вращательно-симметричное решение уравнений Эйлера несжимаемой жидкости

$$\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

в отсутствие внешних массовых сил. Введем следующие обозначения:  $r, z$  — цилиндрические координаты,  $u, v, w$  — радиальная, окружная и осевая компоненты вектора скорости  $\mathbf{v}$ ,  $p$  — давление. Плотность жидкости считается равной единице. Функции  $u, v, w, p$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} u_t + uu_r + wu_z - v^2/r &= -p_r, & v_t + uv_r + wv/r + wv_z &= 0, \\ w_t + ww_z &= -p_z, & u_r + u/r + w_z &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Система (2) имеет точное решение

$$u = rf(z, t), \quad v = rg(z, t), \quad w = h(z, t), \quad p = q(z, t). \quad (3)$$

Функции  $f, g, h, q$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} f_t + hf_z + f^2 - g^2 = 0, \quad g_t + hg_z + 2fg = 0, \\ 2f + h_z = 0, \quad h_t + hh_z = -q_z. \end{aligned} \quad (4)$$

Решение системы (3) анализируется в области  $L_T = \{z, t: 0 < z < s(t), 0 < t < T\}$ . Первые три уравнения (4) образуют замкнутую подсистему для определения функций  $f, g, h$ . Если ее решение известно, функция  $q$  восстанавливается квадратурой

$$-q(z, t) = \int_0^z h_t(x, t) dx + \frac{1}{2} [h^2(z, t) - h^2(0, t)] + C(t), \quad (5)$$

где  $C$  — произвольная функция  $t$ .

Покажем, что в классе решений (3) удовлетворяются условие непротекания на плоскости  $z = 0$  и условия на свободной границе  $z = s(t)$ . Первое условие выполнено, если положить

$$h(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (6)$$

Кинематическое условие на свободной границе имеет вид равенства

$$\frac{ds}{dt} = h[s(t), t], \quad 0 < t < T. \quad (7)$$

Динамическое условие на свободной границе эквивалентно равенству

$$q[s(t), t] = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (8)$$

Пусть функция  $h$ , удовлетворяющая условию (6), и функция  $s$  известны. Определим функцию  $C$  соотношением

$$C(t) = - \int_0^{s(t)} h_t(z, t) dz - \frac{1}{2} h^2[s(t), t]. \quad (9)$$

Тогда в силу (5), (6), (9) выполняется равенство (8). Сформулируем начально-краевую задачу для определения функций  $f, g, h, s$ : найти функцию  $s(t)$  и решение системы

$$f_t + hf_z + f^2 - g^2 = 0, \quad g_t + hg_z + 2fg = 0, \quad 2f + h_z = 0 \quad (10)$$

в области  $\Pi_T$ , удовлетворяющее начальным условиям

$$s(0) = a > 0, \quad f(z, 0) = f_0(z), \quad g(z, 0) = g_0(z), \quad 0 \leq z \leq a \quad (11)$$

и краевым условиям (6), (7).

Задача (6), (7), (10), (11) является задачей с неизвестной границей. Однако путем перехода от координаты  $z$  к лагранжевой координате  $\zeta$  эту задачу можно преобразовать в задачу в прямоугольнике  $\Pi_T = \{\zeta, t: 0 < \zeta < a, 0 < t < T\}$ . Связь между координатами  $z$  и  $\zeta$  устанавливается с помощью решения задачи Коши

$$\frac{dz}{dt} = h(z, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad z = \zeta, \quad t = 0. \quad (12)$$

Введем обозначения  $f[z(\zeta, t), t] = F(\zeta, t)$ ,  $g[z(\zeta, t), t] = G(\zeta, t)$ . В силу соотношений (9), (11) функции  $F$  и  $G$  образуют решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} F_t + F^2 - G^2 &= 0, & G_t + 2GF &= 0, & 0 \leq t \leq T, \\ F &= f_0(\zeta), & G &= g_0(\zeta), & 0 \leq \zeta \leq a, \quad t = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Эти функции удовлетворяют системе обыкновенных уравнений по эволюционной переменной  $t$  и параметрически зависят от пространственной переменной  $\zeta$ . Следует отметить, что решение задачи (13) выражается явными формулами. Введем комплекснозначную функцию  $A = F + iG$ . С учетом (13) имеем

$$A_t + A^2 = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad A = A_0 \equiv f_0(\zeta) + ig_0(\zeta), \quad 0 \leq \zeta \leq a, \quad t = 0, \quad (14)$$

откуда следует

$$A(\zeta, t) = \frac{A_0(\zeta)}{1 + tA_0(\zeta)}. \quad (15)$$

Разделяя в (15) вещественную и мнимую части, получаем выражения для  $F$  и  $G$ :

$$F = \frac{f_0(\zeta)[1 + tf_0(\zeta)] + tg_0^2(\zeta)}{[1 + tf_0(\zeta)]^2 + t^2g_0^2(\zeta)}, \quad G = \frac{g_0(\zeta)}{[1 + tf_0(\zeta)]^2 + t^2g_0^2(\zeta)}. \quad (16)$$

Найдем функции  $z(\zeta, t)$  и  $s(t)$ . Обозначим через  $\delta$  деформацию  $z_\zeta$ . Функция  $\delta$  в силу (12) удовлетворяет уравнению в вариациях  $\delta_t = h_z\delta$  и условию  $\delta = 1$  при  $t = 0$ . Согласно третьему уравнению (10) уравнение для  $\delta$  может быть записано в виде  $\delta_t = -2F\delta$ . Отсюда получаем

$$\delta \equiv z_t = \frac{1}{[1 + tf_0(\zeta)]^2 + t^2g_0^2(\zeta)}, \quad z = \int_0^\zeta \frac{d\eta}{[1 + tf_0(\eta)]^2 + t^2g_0^2(\eta)}. \quad (17)$$

Свободная граница  $z = s(t)$  является образом точки  $\zeta = a$ ,  $t = 0$  на плоскости  $(\zeta, t)$  при отображении  $\zeta \rightarrow z$ . Вследствие (17) имеем

$$s(t) = \int_0^a \frac{d\zeta}{[1 + tf_0(\zeta)]^2 + t^2g_0^2(\zeta)}. \quad (18)$$

С использованием формул (16)–(18) можно качественно описать решение задачи (6), (7), (10), (11). Рассмотрим случай, когда функция  $g_0$  не имеет нулей на отрезке  $[0, a]$ . Тогда решение существует при всех  $t > 0$  и имеют место оценки  $F = O(t^{-1})$ ,  $G = O(t^{-2})$ ,  $s = O(t^{-2})$ , если  $t \rightarrow \infty$ ,  $\zeta \in [0, a]$ . Необходимым условием разрушения решения за конечное время является наличие хотя бы одного нуля  $b \in [0, a]$  функции  $g_0$ . Если при этом выполнено неравенство  $f_0(b) = -m < 0$ , то такой пары условий достаточно для обращения ширины слоя в бесконечность за конечное время  $t_* \leq m^{-1}$ .

Полученное решение является примером точного решения уравнений (1), описывающего течение с плоской свободной границей. В работах [3, 4] построены подобные примеры для потенциального движения. Решение системы (2) при  $g \neq 0$  потенциальным не является.

**2. Вращение слоя вязкой жидкости.** Данный процесс описывается уравнениями Навье — Стокса

$$\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (19)$$

где  $\nu = \text{const} > 0$  — кинематическая вязкость. Система (19) также имеет решение вида (3), однако в этом случае функции  $f$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $q$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} f_t + hf_z + f^2 - g^2 &= \nu f_{zz}, & g_t + hg_z + 2fg &= \nu g_{zz}, \\ 2f + h_z &= 0, & h_t + hh_z &= -q_z + \nu h_{zz}. \end{aligned} \quad (20)$$

Решение (3) системы (19) является обобщением известного решения Кармана [5] на случай неустановившегося движения вязкой жидкости. Решение Кармана, подробно исследованное в работах [6, 7], описывает движение жидкости в полупространстве, индуцируемое вращением ограничивающей его твердой плоскости с постоянной угловой скоростью.

Ниже решение (3) используется для описания процесса растекания вязкого слоя на плоскости, вращающейся с заданной угловой скоростью  $\omega(t)$ . Это обусловлено тем, что если в момент  $t = 0$  свободная граница слоя была плоской, то она останется плоской и в последующие моменты времени. Данное свойство было использовано при разработке технологии нанесения покрытий на плоские экраны (см. работу [8] и библиографию к ней).

Сохраним прежние обозначения  $s(t)$  для толщины слоя,  $a$  для его начальной толщины,  $L_T = \{z, t: 0 < z < s(t), 0 < t < T\}$  для области определения решения системы (20). Исследуем следующую задачу: найти функцию  $s(t)$  и решение системы (20) в области  $L_T$ , удовлетворяющее краевым условиям

$$f = 0, \quad g = \omega(t), \quad h = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad t > 0; \quad (21)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial z} = 0, \quad q = 2\rho\nu \frac{\partial h}{\partial z}, \quad \frac{ds}{dt} = h \quad \text{при} \quad z = s(t), \quad t > 0 \quad (22)$$

и начальным условиям

$$f = g = 0, \quad h = 0, \quad s = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (23)$$

**Теорема [9].** *Предположим, что  $\omega \in C^{1+\alpha/2}[0, T]$ ,  $0 < \alpha < 1$  и выполнены условия согласования  $\omega(0) = 0$ ,  $\omega'(0) = 0$ . Тогда задача (20)–(23) имеет единственное решение при любом  $T > 0$ , такое что*

$$\left(f, g, \frac{\partial h}{\partial z}\right) \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{L}_T), \quad \frac{\partial q}{\partial z} \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{L}_T), \quad s \in C^{2+\alpha/2}[0, T].$$

Определение классов Гельдера, используемых при формулировке теоремы, приведено в [10].

В работе [11] представлены результаты численного решения задачи (20)–(23), в случае если функция  $\omega(t)$  имеет вид  $\omega = \Omega \sin(\pi\Lambda t)$  при  $0 \leq \Lambda t \leq 1/2$ ,  $\omega = \Omega$  при  $\Lambda t \geq 1/2$  ( $\Omega, \Lambda$  — положительные постоянные, имеющие размерность  $s^{-1}$ ), а также построена асимптотика ее решения при  $t \rightarrow \infty$ :

$$f = \frac{V^2}{2\nu} (2sz - z^2) + O(t^{-1}), \quad g = V + O(t^{-1}), \quad s = \frac{1}{2V} \sqrt{\frac{3\nu}{t}} + O(t^{-1}).$$

При  $\omega = \Omega(1 + \Omega t)^{-1}$  система (19) имеет автомодельное решение  $u = \Omega(1 + \Omega t)^{-1}U(\zeta)$ ,  $v = \Omega(1 + \Omega t)^{-1}V(\zeta)$ ,  $w = \nu\Omega^{-1}W(\zeta)$ ,  $p = \nu^2\Omega^{-2}P(\zeta)$ , где  $\zeta = \nu^{-1/2}\Omega^{1/2}z(1 + \Omega t)^{-1/2}$  [10]. Данное решение удовлетворяет условиям (22) на свободной границе  $s = \nu^{1/2}\Omega^{-1/2}(1 + \Omega t)^{1/2}$ . Следует отметить, что система (19) имеет стационарное решение, удовлетворяющее условиям прилипания на вращающейся плоскости (21) и условиям (22) при  $z = d$ , где постоянная толщина слоя  $d$  определяется из соотношения  $d^2\Omega/\nu = \text{Re}_* \approx 53,73$  [12]. Это позволяет считать плоскость  $z = d$  свободной поверхностью.

Далее рассматривается начально-краевая задача для системы (20) с прежними краевыми условиями (21), (22) и начальными условиями общего вида

$$f = f_0(z), \quad g = g_0(z), \quad h = h_0(z), \quad 0 \leq z \leq a, \quad s = a \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (24)$$

Здесь  $f_0(z)$ ,  $g_0(z)$ ,  $h_0(z)$  — заданные гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования  $f_0(0) = g_0(0) = 0$ ,  $h_0(0) = 0$ ,  $2f_0 + h_0' = 0$ . В работе [1] исследована задача (20)–(22), (24) и показано, что в случае притока жидкости ( $f_0(z) < 0$ ) в отсутствие вращения плоскости ( $\omega(t) \equiv 0$ ) возможны три режима движения свободной границы: 1) бесконечное увеличение толщины слоя за конечное время, приводящее к разрушению решения;

2) стабилизация толщины слоя и ее стремление к некоторому конечному значению; 3) автомодельное решение, при котором  $s(t) = \varkappa\sqrt{t+1}$ ,  $\varkappa = \text{const}$ . Также в [1] найдены условия разрушения решения и приведена оценка времени его существования. Проведенные расчеты [2] подтверждают, что вращение плоскости оказывает стабилизирующее влияние на свободную границу и позволяет предотвратить разрушение решения.

В настоящей работе исследовано влияние вязкости на стабилизацию решения. Для этого проведено численное исследование задачи (20)–(22), (24) в отсутствие вращения плоскости, т. е. при  $\omega(t) \equiv 0$ .

Вычисления проводились двумя способами: с использованием итерационного метода для решения конечно-разностных уравнений и с помощью метода Галеркина. Во втором случае приближенное решение искалось в виде

$$\begin{aligned} f_N &= \sum_{k=1}^N a_k(t) \sin\left(\frac{(2k-1)\pi z}{2} s(t)\right), \\ g_N &= \sum_{k=1}^N b_k(t) \sin\left(\frac{(2k-1)\pi z}{2} s(t)\right), \quad N = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь функции  $a_k(t)$ ,  $b_k(t)$ ,  $s(t)$  определяются в результате решения некоторой динамической системы.

При проведении вычислений с использованием конечно-разностных схем предварительно осуществлялся переход к лагранжевой координате. Эта процедура позволяет перейти от решения задачи с неизвестной свободной границей к решению системы дифференциальных уравнений в фиксированной области. Система (20) расщепляется на пару уравнений для определения функций  $f(z)$  и  $g(z)$ :

$$f_t - 2f_z \int_0^z f(y, t) dy + f^2 - g^2 = \nu f_{zz}, \quad g_t - 2g_z \int_0^z f(y, t) dy + 2fg = \nu g_{zz}.$$

При этом  $h(z) = -2 \int_0^z f(y, t) dy$ . Последнее уравнение системы (20) используется для определения давления  $q(z)$ . Введем новую переменную (лагранжеву координату), представляющую собой решение следующей задачи Коши:

$$\frac{dz}{dt} = -2 \int_0^z f(y, t) dy, \quad z|_{t=0} = \zeta.$$

Тогда для функций  $F(\zeta, t) = f(z(\zeta, t), t)$ ,  $G(\zeta, t) = g(z(\zeta, t), t)$  уравнения движения принимают вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} + F^2 - G^2 = \frac{\nu}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \zeta} \right), \quad \frac{\partial G}{\partial t} + 2FG = \frac{\nu}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \zeta} \right), \quad \frac{\partial \lambda}{\partial t} = -2F\lambda.$$

Здесь  $\lambda = \partial z / \partial \zeta$  — деформация при отображении  $\zeta \rightarrow z$ . Начальное условие для функции  $\lambda$  имеет вид  $\lambda(\zeta, 0) = 1$ . В результате решения начально-краевой задачи свободная граница определяется из равенства

$$s(t) = z(1, t) = \int_0^1 \lambda(\zeta, t) d\zeta.$$

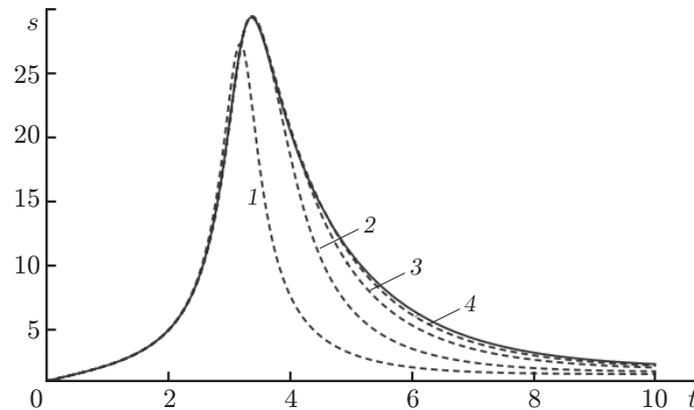


Рис. 1. Зависимость  $s(t)$ , полученная с использованием конечно-разностной схемы (сплошная линия) и метода Галеркина (штриховые линии):  
 1 —  $N = 1$ , 2 —  $N = 3$ , 3 —  $N = 5$ , 4 —  $N = 7$

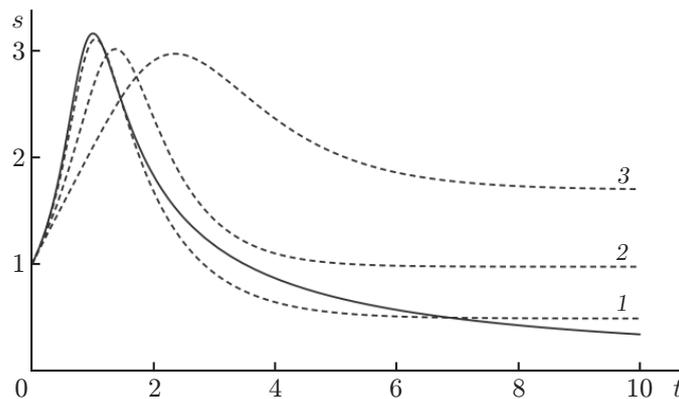


Рис. 2. Зависимость  $s(t)$  при различных значениях коэффициента кинематической вязкости  $\nu$ :  
 1 —  $\nu = 0,1$ , 2 —  $\nu = 0,5$ , 3 —  $\nu = 0,9$ ; сплошная линия — зависимость  $s(t)$  для идеальной жидкости

Результаты вычислений с использованием обоих методов хорошо согласуются. Метод Галеркина сходится достаточно быстро. На рис. 1 штриховыми линиями показана функция  $s(t)$ , полученная с использованием одного, трех, пяти и семи слагаемых в (25). Видно, что в области возрастания функции  $s$  все приближения, кроме  $N = 1$ , хорошо согласуются. В области убывания различие этих приближений с ростом  $N$  быстро уменьшается. Сплошной линией показана зависимость  $s(t)$ , полученная с использованием конечно-разностного метода и практически совпадающая с зависимостью  $s(t)$ , полученной с помощью метода Галеркина при  $N = 7$ , что подтверждает правильность проведенных вычислений.

В первой серии расчетов проведено исследование влияния вязкости на поведение свободной границы. На рис. 2 показана зависимость  $s(t)$  для вязкой жидкости при различных значениях коэффициента вязкости  $\nu$ , а также точное решение (18), описывающее эволюцию свободной границы для идеальной жидкости при одних и тех же начальных данных:

$$f_0(z) = -0,9 \sin(\pi z/2), \quad g_0(z) = 0,5 \sin(\pi z/2), \quad z \in (0, 1).$$

Видно, что характер движения свободной границы для идеальной и вязкой жидкостей один и тот же: увеличение толщины слоя за счет притока жидкости с бесконечности и последующее его уменьшение за счет наличия окружной скорости. Однако с ростом коэффициента

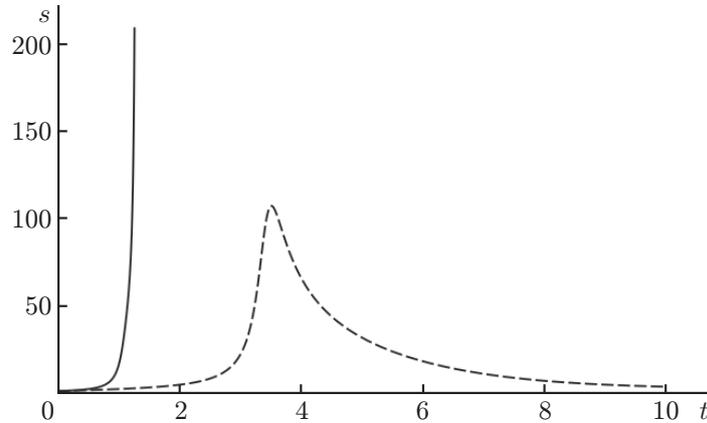


Рис. 3. Зависимость толщины слоя идеальной (сплошная линия) и вязкой (штриховая линия) жидкостей от времени

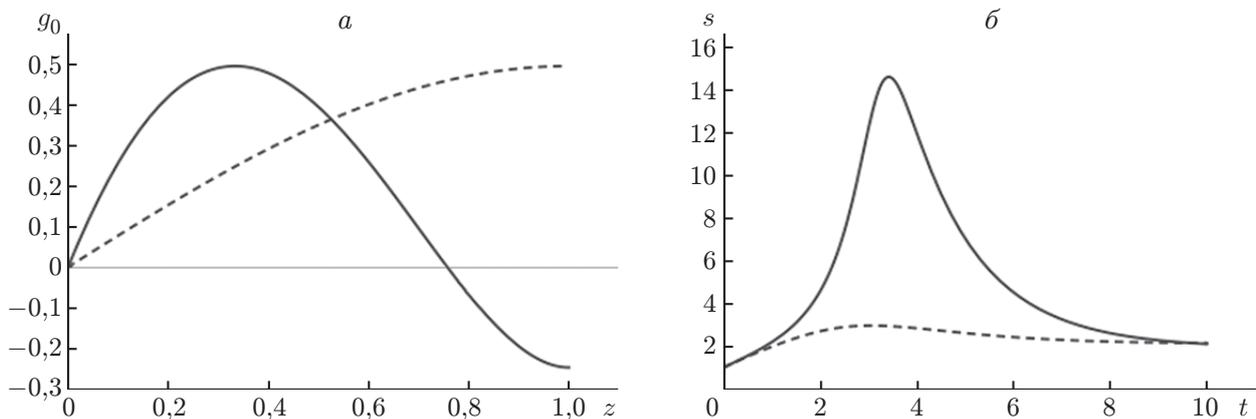


Рис. 4. Профили начальной окружной скорости  $g_0(z)$  (а) и соответствующие зависимости толщины слоя жидкости от времени  $s(t)$  (б): сплошные линии —  $g_0(z) = 9z^4/4 - 15z^3/16 - 37z^2/8 + 49z/16$ , штриховые —  $g_0(z) = 0,5 \sin(\pi z/2)$

вязкости увеличивается время, в течение которого функция возрастает, и существенно увеличивается толщина слоя при стабилизации решения с течением времени.

Дальнейшие вычисления выполнены при  $\nu = 1$ . Во второй серии расчетов начальные данные удовлетворяли условию разрушения решения в идеальной жидкости: функция  $g_0$  обращается в нуль при  $z = 2/3$ , функция  $f_0(2/3) < 0$ , т. е.

$$f_0(z) = -0,9 \sin(\pi z/2), \quad g_0(z) = \sin(3\pi z/2), \quad z \in (0, 1).$$

На рис. 3 приведены зависимости  $s(t)$ , полученные при указанных начальных данных. Для идеальной жидкости решение получено по формуле (18). Исследование зависимости  $s(t)$  для вязкой жидкости проводилось с использованием конечно-разностного метода. На рис. 3 видно, что сначала за счет притока жидкости с бесконечности толщина слоя увеличивается. Однако при наличии в начальный момент ненулевой окружной скорости даже в отсутствие вращения плоскости толщина слоя постепенно стабилизируется.

Третья серия расчетов показала, что начальная окружная скорость оказывает существенное стабилизирующее влияние на толщину слоя в случае течения вязкой жидкости в отсутствие вращения. Результаты получены для различных функций  $g_0(z)$  при одной

и той же радиальной начальной скорости  $f_0 = -0,9 \sin(\pi z/2)$ . На рис. 4 приведены зависимости начальной окружной скорости от координаты  $z$  и соответствующие им зависимости толщины слоя жидкости от времени.

Заметим, что в работе [2] получено решение, разрушающееся за конечное время за счет бесконечного увеличения толщины слоя при  $f_0 = -0,9 \sin(\pi z/2)$  и нулевой начальной окружной скорости. Полученные результаты показывают, что при наличии окружной скорости решение стабилизируется в обоих случаях, показанных на рис. 4, причем при знакопостоянной функции  $g_0(z)$  это происходит значительно быстрее.

**Заключение.** Полученные в работе условия возникновения коллапса в случае идеальной жидкости являются достаточно жесткими, но вполне достижимыми. Проведенные расчеты показывают, что вязкость и ненулевая окружная скорость оказывают стабилизирующее влияние на толщину слоя жидкости. Однако остается открытым вопрос о существовании нижней границы значений коэффициента кинематической вязкости и начальной окружной скорости, при которых возможно продолжение решения на бесконечный промежуток времени.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Журавлева Е. Н., Пухначев В. В. Задача о деформации вязкого слоя // Докл. РАН. Физика, техн. науки. 2020. Т. 190, № 1. С. 66–69.
2. Pukhnachev V. V., Zhuravleva E. N. Viscous flows with flat free boundaries // Europ. Phys. J. Plus. 2020. V. 554. P. 135–146.
3. Овсянников Л. В. Общие уравнения и примеры // Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967. С. 5–75.
4. Longuet-Higgins M. S. A class of exact, time-dependent, free-surface flows // J. Fluid Mech. 1972. V. 55. P. 529–543.
5. Karman T. Über laminare und turbulente Reibung // Z. angew. Math. Mech. 1921. N 4. S. 233–252.
6. Ландау Л. Д. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1988.
7. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
8. Matsumoto S., Saito K., Takashima Y. The thickness of a viscous liquid film on a rotating disk // J. Chem. Engng Japan. 1974. V. 6, N 6. P. 503–507.
9. Andreev V. K. Application group-theoretical methods in hydrodynamics / V. K. Andreev, O. V. Kaprtsov, V. V. Pukhnachev, A. A. Rodionov. Dordrecht; Boston; L.: Kluwer Acad. Publ., 1988.
10. Ладыженская О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева. М.: Наука, 1967.
11. Лаврентьева О. М., Волкова Г. Б. Предельные режимы растекания слоя на вращающейся плоскости // Динамика сплошной среды / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1996. Вып. 111. С. 68–77.
12. Лаврентьева О. М. Течение вязкой жидкости в слое на вращающейся плоскости // ПМТФ. 1989. № 5. С. 41–48.

*Поступила в редакцию 21/IV 2022 г.,  
после доработки — 21/IV 2022 г.  
Принята к публикации 25/IV 2022 г.*