ЛИТЕРАТУРА

1. **Нетушил А. В.** Модели электрических полей в гетерогенных средах нерегулярных структур.— «Электричество», 1975, № 10.
2. **Шкловский Б. И., Эфрос А. Л.** Теория протекания и проводимость сильно неоднородных сред.— УФН, 1975, т. 117, вып. 3.
3. **Дыхне А. М.** Проводимость двумерной двухфазной системы.— ЖЭТФ, 1970, т. 59, вып. 1(7).
4. **Herring C. J.** Effect of random inhomogeneities on electrical and galvanomagnetic measurements.— «J. Appl. Phys.», 1960, vol. 31, N 11.
5. **Дыхне А. М.** Аномальное сопротивление плазмы в сильном магнитном поле.— ЖЭТФ, 1970, т. 59, вып. 2.
6. **Martinez-Sanchez M., De Saro R., Louis J. F.** Effective Ohm's law for a class of inhomogeneous plasmas and its effect on the performance of combustion — driven MHD generators.— In: VI Intern. Conf. on MHD Power Generation. Vol. 4. Washington, 1975.
7. **Hower N. R., Mitchner M.** Nonlinear calculations of the effective conductivity of inhomogeneous MHD generator plasmas.— In: VI Intern. Conf. on MHD Power Generation. Vol. 4. Washington, 1975.
8. **Емец Ю. П.** О проводимости среды с неоднородными включениями в магнитном поле.— ЖТФ, 1974, т. 44, № 5.
9. **Емец Ю. П., Резцов В. Ф.** О тензоре эффективной проводимости проводящей среды в магнитном поле с включениями эллиптической формы.— «Письма в ЖТФ», 1975, вып. 1.
10. **Shama S. E., Martinez-Sanchez M., Louis J. F.** Ohm's law for plasmas with non—isotropic inhomogeneous and its effect on the performance of MHD generations.— In: 16 th Symp. Engineering Aspects of MHD. Pittsburg, 1977.
11. **Joshikawa S., Rose D. J.** Anomalous diffusion of a plasma across a magnetic field.— «Phys. Fluids», 1961, vol. 5, N 3.
12. **Louis J. F.** Effective Ohm's lawin a partially ionized plasma with electron density fluctuations.— «Phys. Fluids», 1967, vol. 10, N 9.
13. **Ганефельд Р. В.** Эффективные параметры турбулентной низкотемпературной плазмы.— Киев, ИЭД АН УССР, Препринт 134, 1977.
14. **Бэтчелор Дж. К.** Теория однородной турбулентности.— М., ИЛ, 1955.

УДК 538.4 : 532.51

ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СЛАБОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ, РАСПОЛОЖЕННОЙ МЕЖДУ СФЕРИЧЕСКИМИ ЭЛЕКТРОДАМИ ПРИ НАЛИЧИИ СЛАБОЙ ИНЖЕКЦИИ

А. И. Жакин

(*Харьков*)

Высоковольтная проводимость жидких диэлектриков может вызываться инжекцией зарядов с электродов [1—6]. При этом заряды, стекающие с электрода, имеют тот же знак, что и полярность последнего. Приэлектродная область заряжается, что приводит к появлению кулоновских сил, направленных в сторону от электрода. Так возникает неустойчивое состояние равновесия, и при достаточно больших напряженностях электрического поля жидкость приходит в движение [3—6].

В данной работе получены критерии устойчивости равновесия слабопроводящей жидкости, расположенной между двумя сферическими концентрическими электродами для случаев униполярной инжекции с внутреннего и внешнего электродов.

1. Постановка задачи. Пусть радиусы электродов равны R_1, R_2 $(R_1 < R_2)$ и между ними имеется разность потенциалов $U = \text{const}$. Объемный заряд $q = n_2 - n_1$ в жидкости образуется за счет инжекции зарядов с электродов, так что проводимость выражается в виде $\sigma = u_1 n_1 + u_2 n_2$, где n_1, n_2 — величины объемных плотностей зарядов, инжектируемых соответственно с внутреннего и внешнего электродов; u_1, u_2 — их подвижности. Таким образом, считаем, что ток инжекции значительно больше тока, обусловленного примесями и диссоциацией [1—3].

Движение слабопроводящей поляризующейся несжимаемой жидкости описывается уравнениями электрогидродинамики [6, 7]

$$(1.1)\qquad \rho(\partial \mathbf{v}/\partial \tau + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}) = -\nabla p + \eta\Delta\mathbf{v} + q\mathbf{E},\ \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0,$$
$$\mathrm{div}\,\varepsilon\mathbf{E} = 4\pi q,\ \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0,\ \partial n_i/\partial\tau + \mathrm{div}\,\mathbf{j}_i = 0,$$
$$\mathbf{j}_i = (-1)^i n_i u_i \mathbf{E} + n_i\mathbf{v}\ (i = 1, 2),$$

где $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{j}_2$ — соответственно плотности токов инжектируемых зарядов; η — динамическая вязкость; p — полное давление [7].

Граничные условия для системы уравнений (1.1) имеют вид

$$(1.2)\qquad \mathbf{v}|_{r=R_1,R_2} = 0,\ \varphi = 0,\ |\mathbf{j}_1| = j_1 \text{ при } r=R_1;\ \varphi=U,\ |\mathbf{j}_2| = j_2 \text{ при } r=R_2.$$

Равенство нулю скорости есть следствие условий прилипания; остальные условия определяются заданием потенциалов и плотностей инжектируемых токов на электродах.

2. Равновесное состояние. Краевая задача, описывающая равновесное состояние, состоит из системы (1.1) при $\mathbf{v} = 0$, $\partial/\partial\tau = 0$ и граничных условий (1.2). Введем сферическую систему координат (r, θ, φ_1), поместив начало в центр симметрии. Решение, описывающее равновесное состояние, будем искать в виде

$$(2.1)\qquad \mathbf{E}_0 = (E_0(r), 0, 0),\ n_{i0} = n_{i0}(r).$$

Здесь и в дальнейшем считаем, что индекс i пробегает значения 1, 2.

Подставляя (2.1) в уравнения равновесия и используя (1.2), получим решение в виде

$$(2.2)\qquad E_0 = -\frac{aR_1^2}{r^2}\sqrt{1+\frac{8\pi D r^3}{3\varepsilon a^2 R_1^4}},\quad E_0 = -\frac{d\varphi_0}{dr},$$
$$n_{i0} = -\frac{j_i R_i^2}{u_i r^2 E_0},\quad D \equiv \frac{j_1 R_1^2 u_2 - j_2 R_2^2 u_1}{u_1 u_2},$$

где постоянная a определяется из граничных условий (1.2) для потенциала φ_0. Заметим, что константа a имеет размерность напряженности электрического поля и в отсутствие инжекции ($j_i = 0$) равна $a \equiv E_1 = UR_2/[R_1(R_2 - R_1)]$. Поэтому если предположить, что инжекция слабая

$$(2.3)\qquad \mu_i \equiv \frac{4\pi D_i}{3\varepsilon E_1^2 R_1} \ll 1,\quad D_i \equiv \frac{j_i R_i^2}{u_i},$$

то соотношения (2.2) можно упростить, разложив выражения в правых частях в ряд по малому параметру $\mu = \mu_1 - \mu_2$ и сохранив при этом линейные по μ члены

$$(2.4)\qquad E_0 = -\frac{E_1 R_1^2}{r^2}\left(1 + \mu\frac{r^3}{R_1^3}\right),\quad n_{i0} = \frac{D_i}{|E_1| R_i^2}\left(1 - \mu\frac{r^3}{R_1^3}\right).$$

3. Исследование устойчивости. Устойчивость равновесного состояния, описываемого соотношениями (2.4), будем проводить по отношению к бесконечно малым возмущениям [8]. Представляя возмущенное состояние скоростью $e^{\lambda\tau}\mathbf{v}(\mathbf{r})$, давлением $p_0 + e^{\lambda\tau}p(\mathbf{r})$, напряженностью электрического поля $\mathbf{E}_0 + e^{\lambda\tau}\mathbf{e}(\mathbf{r})$, объемными зарядами $n_{i0} + e^{\lambda\tau}q_i(\mathbf{r})$, с учетом (2.3) для возмущений, получим следующие линеаризованные уравнения:

$$\lambda\rho\mathbf{v} = -\nabla p + \eta\Delta\mathbf{v} - (q_2 - q_1)E_1R_1^2/r^2\mathbf{e}_r^0,\ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{3.1}$$

$$\lambda q_i - (-1)^i u_iE_1R_1^2/r^2\cdot dq_i/dr + dn_{i0}/dr\cdot v_r = 0.$$

Используя предположение (2.3), можно показать [4], что граничные условия для системы уравнений (3.1) имеют вид

$$\mathbf{v}|_{r=R_i} = 0,\ q_i|_{r=R_i} = 0. \tag{3.2}$$

Будем исследовать устойчивость по отношению к возмущениям монотонного типа (λ вещественное). Тогда на границе устойчивости ($\lambda = 0$) система уравнений (3.1) и граничные условия (3.2) определяют краевую задачу на собственные значения относительно E_1. Если искать собственные функции в виде

$$v_r = v_l(r)\,T_{0n}^l(\pi/2 - \varphi_1, \theta, 0),$$

$$v\pm = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(v_{\varphi_1} \pm iv_\theta) = v^\pm(r)\,T_{\pm 1,n}^l(\pi/2 - \varphi_1, \theta, 0),$$

$$p = p_l(r)\,T_{0n}^l(\pi/2 - \varphi_1, \theta, 0),\ q_i = q_{il}(r)\,T_{0n}^l(\pi/2 - \varphi_1, \theta, 0),$$

где $T_{nm}^l(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ $(-l \leqslant n,\ m \leqslant l;\ \ l = 1, 2, 3, \ldots)$ — обобщенные сферические функции, то можно по аналогии с [9] показать, что критическая напряженность E_{1*}, при которой жидкость теряет устойчивость, определяется из следующей задачи на собственные значения относительно E_1:

$$\eta D_l^2 v_1 = -l(l+1)E_1R_1^2/r^3\cdot(q_{2l} - q_{1l}), \tag{3.3}$$

$$dq_{il}/dr = (-1)^i r/(E_1R_1^2u_i)\cdot dn_{i0}/dr\cdot v_1;$$

$$v_1 = dv_1/dr = 0,\ q_{il} = 0\ \text{при}\ r = R_i, \tag{3.4}$$

где

$$v_1 = rv_l;\ D_l \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}.$$

Перейдем к безразмерным переменным $t = r/R_1$, $v = v_1\rho/\eta$, $\gamma_2^0 = q_{2l}\dfrac{\rho R_1^3u_2^2E_1^2}{3\mu\eta j_2R_2^2}$, $\gamma_1^0 = q_{1l}\dfrac{\rho R_1u_1^2E_1^2}{3\mu\eta j_1}$ и произведем замену переменных $t = 1/s$, $w(s) \equiv v(1/s)$, $\gamma_i(s) = \gamma_i^0(1/s)$. Тогда задача (3.3), (3.4) будет эквивалентна следующей краевой задаче на собственные значения относительно K_1, если задается значение параметра K_2, и относительно K_2, если задается значение K_1:

$$sL_ls^4L_lw = 4\pi l(l+1)(K_1\gamma_1 - K_2\gamma_2),\ d\gamma_i/ds = (-1)^i w/s^5; \tag{3.5}$$

$$w = dw/ds = 0,\ \gamma_i = 0\ \text{при}\ s = h_i, \tag{3.6}$$

Таблица 1

l \ h	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
2	$478\cdot10^{-7}$	$150\cdot10^{-5}$	$582\cdot10^{-4}$	0,639		
3	$501\cdot10^{-7}$	$148\cdot10^{-5}$	$505\cdot10^{-4}$	0,470	2,990	
4	$571\cdot10^{-7}$	$163\cdot10^{-5}$	$534\cdot10^{-4}$	0,445	2,465	12,76
5		$185\cdot10^{-5}$	$600\cdot10^{-4}$	0,475	2,363	10,81
6					2,471	10,14
7					2,703	10,18

где $L_l \equiv \frac{d^2}{ds^2} - \frac{l(l+1)}{s^2}$; $h_1 \equiv h = \frac{R_1}{R_2}$; $h_2 = 1$; $K_1 = \frac{j_1 R_1 (j_1 R_1^2 u_2 - j_2 R_2^2 u_1)}{\varepsilon |E_1|^3 u_1^3 u_2 \eta}$;

$K_2 = \frac{j_2 R_2^2 (j_1 R_1^2 u_2 - j_2 R_2^2 u_1)}{\varepsilon |E_1|^3 R_1 u_1 u_2^3 \eta}$. Рассмотрим два случая униполярной инжекции: с внутреннего электрода ($j_2 = 0$); с внешнего электрода ($j_1 = 0$). В этих случаях (3.5), (3.6) можно свести к задаче об отыскании характеристических чисел λ_i интегральных уравнений с положительными ядрами:

$$w(s) = \lambda_i \int_h^1 G_i(s, t) \frac{w(t)}{t^5} dt, \tag{3.7}$$

где $\lambda_i = 4\pi l(l+1) B_i$; $B_1 = \frac{j_1^2 R_1^3}{\varepsilon |E_1|^3 u_1^3 \eta}$; $B_2 = \frac{j_2^2 R_2^4}{\varepsilon |E_1|^3 u_2^3 \eta}$;

$$G_1(s, t) = \int_h^t G(s, \xi) d\xi; \quad G_2(s, t) = \int_t^1 G(s, \xi) d\xi;$$

$G(s, \zeta)$ — функция Грина оператора, определяемого дифференциальным выражением $sL_l s^4 L_l$ и граничными условиями $w = dw/ds = 0$ при $s = h_i$.

Вычисление наименьших характеристических чисел λ_{i1} производилось методом итераций [9] с относительной погрешностью, меньшей 0,1%. В табл. 1, 2 представлены результаты вычислений зависимостей соответственно $B_1 = B_1(h, l)$, $B_2 = B_2(h, l)$ для различных значений h, l. Критические значения B_{i*} определяются из условия $B_{i*} = \min_{l \geq 1} B_i(h, l)$. При $B_i < B_{i*}$ жидкость находится в равновесии, при $B_i > B_{i*}$ — приходит в движение. Вычисления также показали, что в обоих случаях при

Таблица 2

l \ h	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
2	$144\cdot10^{-7}$	$415\cdot10^{-6}$	$194\cdot10^{-4}$	0,264		
3	$200\cdot10^{-7}$	$505\cdot10^{-6}$	$181\cdot10^{-4}$	0,198	1,497	
4	$281\cdot10^{-7}$	$663\cdot10^{-6}$	$210\cdot10^{-4}$	0,195	1,250	
5	$382\cdot10^{-7}$	$867\cdot10^{-6}$	$261\cdot10^{-4}$	0,218	1,220	6,37
6					1,305	6,03
7					1,468	6,12

$h < 0$, 1 критическим движениям отвечает $l = 2$. С ростом h соответствующие значения l последовательно увеличиваются на единицу.

Приведем некоторые оценки. В полярных жидкостях при наличии полупроницаемых мембран инжекция может быть даже низковольтной [3—5]. Плотности инжектируемых токов при этом достигают значительных величин (до 100 мк А/см^2 в нитробензоле [3]). Оценим порядок критической плотности инжектируемого тока с внутреннего электрода, считая, что напряженность электрического поля E_1 изменяется в пределах $E_1 = 50—100$ кВ/см, подвижность ионов имеет порядок 10^{-4} см^2/В·с [2, 3], вязкость $\eta = 0{,}2$ П, $\varepsilon = 2$ для $h = 0{,}1$, $R_2 = 1$ см. На границе устойчивости $K_1 = K_{1*} = 0{,}0015$, откуда после подстановки в выражение для K_1 указанных значений получаем $j = 6{,}45—8{,}16$ нА/см, при этом $\mu_1 = 0{,}1—0{,}05$. Для определения точного значения величины критической напряженности электрического поля вблизи внутреннего электрода (а вместе с тем и плотности инжектируемого тока на электроде) необходимо знать зависимость $j = j(E)$ [1—3]. Например, для стальных электродов и хорошо очищенного н-гексана зависимость плотности тока холодной эмиссии электронов от напряженности поля на катоде имеет вид [1]

$$j = aE^2 \exp(-b/E),$$

где $a = 5{,}1 \cdot 10^{-21}$ А/В^2, $b = 2{,}66 \cdot 10^5$ В/см. Если считать, что [2, 10] $u_1 = 10^{-4}$ см^2/В·с, $\eta = 0{,}0029$ П, $\varepsilon = 2$, $h = 0{,}1$, $R_2 = 1$ см, то $E_{1*} = 38$ МВ/см, при этом $\mu_1 = 0{,}0036$.

Автор выражает благодарность И. Е. Тарапову за внимание к работе и ценные замечания.

Поступила 26 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сканави Г. И.** Физика диэлектриков (область сильных полей). М., Физматгиз, 1958.
2. **Адамчевский И.** Электрическая проводимость жидких диэлектриков. Л., «Энергия», 1972.
3. **Felici N. J.** D. C. conduction in liquid dielectrics.— «Direct Current», 1971, vol. 2, N 3, pt 1.
4. **Atten P., Moreau R.** Stabilité hydrodynamique des fluides incompressibles isolants soumis à une injection unipolaire.— «C. r. Acad. Sci.», Ser. A, 1969, t. 269, p. 433.
5. **Hewish T. R., Bringnell J. E.** Experimental consequences of the end stability criterion for dielectric liquids.— «J. Phys. D: Appl. Phys.», 1972, vol. 5, N 4.
6. **Мелчер Дж.** Электрогидродинамика.— «Магнитн. гидродинамика», 1974, № 2.
7. **Таранов И. Е.** Основные задачи гидродинамики намагничивающихся и поляризующихся сред. Дис. на соиск. учен. степени д-ра физ.-мат. наук. Харьков, 1973.
8. **Монин А. С., Яглом А. М.** Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М., «Наука», 1967.
9. **Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Собожанин Л. А., Тюпцов А. Д.** Гидромеханика невесомости. М., «Наука», 1976.
10. **Льюис Т.** Электрическая прочность и проводимость жидких диэлектриков в сильных полях.— В кн.: Прогресс в области диэлектриков. М.—Л., Госэнергоиздат, 1962.