

ПРОЧНОСТЬ СОЕДИНЕНИЯ ПРИ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЯ

УДК 539.3

М. А. Задоян

Институт механики НАН Армении, 375019 Ереван

Исследование задачи малонапряженности на крае контактной поверхности составного тела при проектировании конструкции позволяет надлежащим выбором физических и геометрических параметров обеспечить надежную прочность данного соединения [1, 2]. Однако при фиксированных значениях указанных параметров может и не удовлетворяться условие малонапряженности, и на этом крае возникает концентрационное напряженное состояние. Таким образом, появляется необходимость сформулировать условия прочности при наличии концентрации напряжений.

В данной работе с использованием известного в строительной механике метода сечений исследуется прочность соединения составных тел со степенным упрочнением материалов при наличии концентрации напряжений. Применение метода сечения в линейной механике трещин отражено в монографии [3].

Принимаем, что составное тело изготовлено из двух разнородных материалов. Между интенсивностями напряжений и деформаций принимается степенная зависимость $\sigma_0 = k\varepsilon_0^m$, причем для обоих материалов значения параметра m считаются одинаковыми, а k — различными.

Полагаем, что на крае контактной поверхности составного тела имеется входящая угловая «выточка» с концентрациями напряжений на вершине. Принимаем, что известно решение соответствующей задачи без учета концентрации напряжений, вызванной «выточкой». Такое напряженное состояние назовем номинальным. Далее, используя это решение для окрестности угловой точки, следует найти условие прочности края соединения с концентрационным напряженным состоянием.

1. Кручение. Рассмотрим составной стержень с постоянным поперечным сечением из упрочняющихся по степенному закону материалов, имеющий на крае контактной поверхности входящий угол и скручивающийся моментами M , приложенными на торцевых сечениях.

Исходные соотношения. Полагаем, что номинальное решение, т. е. без углового выреза, задано в полярной системе координат $\rho\varphi$ (рис. 1). Обозначим напряжения через $T_{\rho i}(\rho, \varphi)$, $T_{\varphi i}(\rho, \varphi)$, перемещения — $W_i(\rho, \varphi)$. Здесь и в дальнейшем индекс $i = 1, 2$ отмечает величины составляющих материалов.

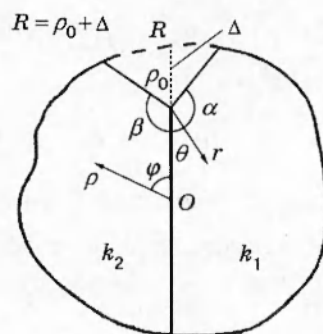


Рис. 1

В окрестности угловой точки $r = 0$ реализуются деформации продольного сдвига. Согласно [2], это решение можно представить в виде

$$\tau_{\theta i} = k_i r^{(\lambda-1)m} f_i' \chi_i, \quad \tau_{ri} = \lambda k_i r^{(\lambda-1)m} f_i \chi_i, \quad w_i = r^\lambda f_i, \quad \chi_i = \left(\sqrt{f_i'^2 + \lambda^2 f_i^2} \right)^{m-1}, \quad (1.1)$$

где

$$f_1 = A \exp \left(- \int_0^\alpha \psi_1 d\theta \right); \quad f_2 = A \exp \left(- \int_0^\alpha \psi_1 d\theta - \int_\theta^0 \psi_2 d\theta \right);$$

$A = f_1(\alpha)$ — произвольная постоянная; $\psi_1(\theta, \lambda)$ находится из следующих зависимостей:

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} \frac{\psi_1}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\psi_1}{\omega} &= \alpha - \theta \quad \text{при} \quad 0 \leq \theta \leq \alpha, \\ \operatorname{arctg} \frac{\psi_2}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\psi_2}{\omega} &= \pi \left(1 + \frac{1-\lambda}{\omega} \right) - \beta - \theta \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1-\lambda}{\omega} \right) - \beta \leq \theta \leq 0, \end{aligned}$$

причем $\omega = \sqrt{\lambda(\lambda + n - 1)}$, $n = 1/m$.

Параметр λ определяется из системы трех уравнений относительно $\mu_i = \psi_i(0, \lambda)$ и λ :

$$\begin{aligned} \mu_1 \left(\sqrt{\mu_1^2 + \lambda^2} \right)^{m-1} - \gamma \mu_2 \left(\sqrt{\mu_2^2 + \lambda^2} \right)^{m-1} &= 0, \quad \operatorname{arctg} \frac{\mu_1}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\mu_1}{\omega} = \alpha, \\ \operatorname{arctg} \frac{\mu_2}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\mu_2}{\omega} &= \pi \left(1 + \frac{1-\lambda}{\omega} \right) - \beta \quad (\gamma = k_2/k_1). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Если ввести обозначения $s_1 = 2\alpha/\pi - 1$, $s_2 = 2\beta/\pi - 1$, то решение системы уравнений (1.2) примет вид $\lambda = \lambda(s_1, s_2, \gamma, m)$. В случае симметричного относительно контактной поверхности угла, т. е. при $\alpha = \beta$, или же для однородного материала λ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2 + s \left[(n-1)s - \sqrt{4n + (n-1)^2 s^2} \right]}{2(1-s^2)} \quad \text{при} \quad s \neq 1, \\ \lambda &= 1/(n+1) \quad \text{при} \quad s = 1. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $s = 2\alpha/\pi - 1$.

Второе значение λ в (1.3) вытекает также из первой формулы при предельном переходе $s \rightarrow 1$.

Принимаем, что на рассматриваемом крае контактной поверхности соблюдаются условия $\lambda < 1$ и $\pi < \alpha + \beta \leq 2\pi$ или же $0 < s_1 + s_2 \leq 2$. В случае симметричного угла имеем $\pi/2 < \alpha \leq \pi$ или же $0 < s \leq 1$.

Поверхность разрушения. Вводя обозначения

$$N = k_i f_i'(0) \chi_i(0), \quad F_i(\theta) = f_i'(\theta) \chi_i(\theta) / (f_i'(0) \chi_i(0)),$$

компоненты напряжения (1.1) представим в форме

$$\tau_{\theta i} = N r^{(\lambda-1)m} F_i(\theta), \quad \tau_{ri} = \lambda f_i \tau_{\theta i} / f_i'. \quad (1.4)$$

Постоянная $N = \lim_{r \rightarrow 0} \tau_{\theta i}(r, 0) r^{(1-\lambda)m}$, имеющая размерность $\text{кг} \cdot \text{см}^{(1-\lambda)m-2}$ и подлежащая определению, аналогична в некотором смысле коэффициенту интенсивности напряжения в вершине трещин. Коэффициент N можно определить приближенно, используя вышеупомянутый метод сечений.

Проведем мысленно сечение по плоскости $\varphi = 0$ и, отбрасывая одну из частей стержня, рассмотрим равновесие оставшейся части под действием продольных касательных сил, действующих в осевом сечении для стержня без входящего угла и для стержня с входящим углом. Считаем, что вследствие углового выреза продольная сила уменьшается настолько, насколько внесут вклад концентрационные силы.

Проектируя касательные силы по продольному направлению и приравнявая сумму номинальных сил, действующих в интервале $\rho_0 \leq \rho \leq R$ в стержне без углового выреза, к сумме концентрационных сил, действующих в интервале $0 \leq r \leq r_0$ в стержне с угловым вырезом, находим

$$\int_0^{r_0} \tau_{\theta i}(r, 0) dr = \int_{\rho_0}^R T_{\varphi i}(\rho, 0) d\rho. \quad (1.5)$$

Здесь r_0 — неизвестное расстояние от угловой точки, где концентрационное напряжение приравнивается к номинальному:

$$\tau_{\theta i}(r_0, 0) = T_{\varphi i}(\rho_0, 0). \quad (1.6)$$

В уравнениях (1.5), (1.6), согласно [3], номинальное напряжение берется в угловой точке и не учитываются номинальные силы в интервале концентрационных напряжений. Этими допущениями некоторым образом компенсируется уменьшенное значение асимптотики местного напряжения по сравнению с точным его значением.

Подставляя выражение $\tau_{\theta i}(r, 0)$ из (1.4) в (1.5) и (1.6), имеем

$$N = \tau r_0^{(1-\lambda)m}, \quad r_0 = [1 + (\lambda - 1)m] \int_{\rho_0}^R \frac{T_{\varphi i}(\rho, 0)}{T_{\varphi i}(\rho_0, 0)} d\rho, \quad (1.7)$$

где $\tau = T_{\varphi i}(\rho_0, 0)$ — номинальное напряжение в рассматриваемой угловой точке. Вводя обозначения $\rho = \xi R$, $R - \rho_0 = \Delta = \delta R$, из (1.7) получим

$$N = \tau \{ \Delta [1 + (\lambda - 1)m] \Phi(\delta, \gamma, m) \}^{(1-\lambda)m}. \quad (1.8)$$

Здесь

$$\Phi = \frac{1}{\delta} \int_{1-\delta}^1 H(\xi; \delta, \gamma, m) d\xi. \quad (1.9)$$

Функция $H = H_i$ не зависит от внешнего момента M и определяется подынтегральным выражением (1.7) при вышеуказанных заменах безразмерных переменной и параметров.

Критическое значение τ , при котором происходит разрушение соединения в рассматриваемой угловой точке, обозначим через τ_* , а соответствующее значение M — через M_* . Параметр τ_* , зависящий от составляющих материалов, реализации соединения, вяжущего материала, изготовления поверхностей для контакта и т. д., определяется из экспериментов. Для однородного материала τ_* определяется разрушающим крутящим моментом M_* .

Критическое значение N , согласно (1.8), запишем в виде

$$N_* = \tau_* \{ \Delta [1 + (\lambda - 1)m] \Phi \}^{(1-\lambda)m}. \quad (1.10)$$

В пространстве наших параметров полученное уравнение (1.10), т. е. $N_* = N_*(s_1, s_2, \Delta, \delta, m)$, можно интерпретировать как гиперповерхность разрушения. При фиксированных значениях параметров $\Delta, \delta, \gamma, m$ уравнение $N_* = N_*(s_1, s_2)$ в трехмерном пространстве $s_1 s_2 N_1$ определяет предельную поверхность разрушения. Она отделяет область

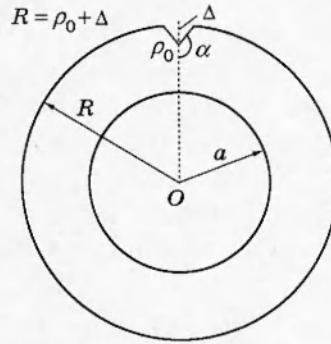


Рис. 2

прочности (ниже поверхности) от области разрушения (выше поверхности). В случае симметричного угла в координатной плоскости sN_* будем иметь предельную кривую разрушения $N_* = N_*(s)$, отделяющую области прочности и разрушения.

Критическое значение контактного напряжения при помощи (1.4) и (1.10) можно представить в форме

$$\tau_{\theta i}^*(r, 0) = \tau_* \left(\frac{\Delta}{r} \right)^{(1-\lambda)m} \{ [1 + (\lambda - 1)m] \Phi \}^{(1-\lambda)m}. \quad (1.11)$$

Кручение цилиндрической трубы. Рассмотрим кручение длинной толстостенной цилиндрической трубы из однородного материала со степенным упрочнением, имеющим со стороны внешней поверхности угловой вырез (рис. 2).

Номинальное напряжение известно [4]:

$$T_\varphi(\rho) = \frac{(m+3)Mh}{2\pi R^{m+3}} \rho^m, \quad h = \left[1 - \left(\frac{a}{R} \right)^{m+3} \right]^{-1}$$

(R и a — радиусы внешней и внутренней поверхности трубы). Имеем также

$$\tau = T_\varphi(\rho_0) = \frac{(m+3)Mh}{2\pi R^{m+3}} \rho_0^m, \quad H = \rho''' / \rho_0^m.$$

Интегрированием из (1.9) получим

$$\Phi = \frac{1 - (1 - \delta)^{m+1}}{(m+1)\delta(1 - \delta)^m}. \quad (1.12)$$

Легко заметить, что $\Phi \rightarrow 1$ при $\delta \rightarrow 0$.

Критическое значение N из (1.10) запишем в виде

$$N_* = \tau_* \left\{ \frac{\Delta [1 + (\lambda - 1)m] [1 - (1 - \delta)^{m+1}]}{(m+1)\delta(1 - \delta)^m} \right\}^{(1-\lambda)m}. \quad (1.13)$$

Здесь

$$\tau_* = \frac{(m+3)M_*h}{2\pi R^3} (1 - \delta)^m, \quad (1.14)$$

а λ определяется согласно (1.3).

При фиксированных значениях Δ , δ , m уравнение (1.13) определяет предельную кривую разрушения $N_* = N_*(s)$, отделяющую области прочности и разрушения.

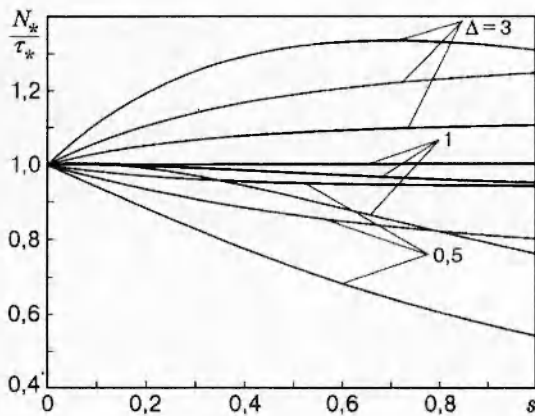


Рис. 3

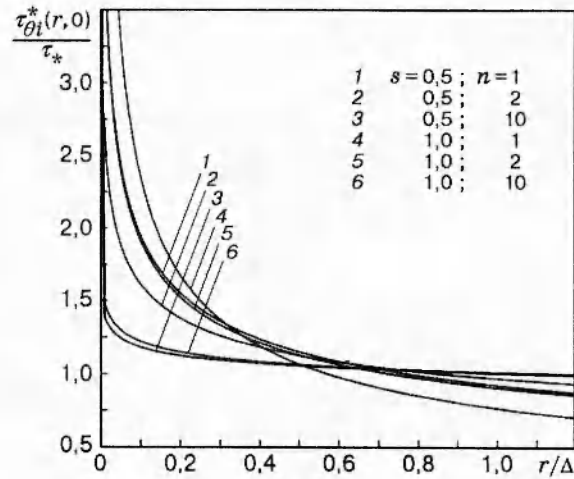


Рис. 4

В случае щели (трещины), т. е. при $s = 1$, принимая в (1.13) $\lambda = m/(m + 1)$, находим

$$N_* = \tau_* \left\{ \frac{\Delta [1 - (1 - \delta)^{m+1}]}{(m + 1)^2 \delta (1 - \delta)^m} \right\}^{m/(m+1)}. \quad (1.15)$$

При малых по сравнению с единицей значениях δ из (1.13), (1.14) следует

$$N_* = \frac{(m + 3) M_* h}{2\pi R^3} \{ \Delta [1 + (\lambda - 1)m] \}^{(1-\lambda)m}.$$

Отсюда для случая щели получим

$$N_* = \frac{(m + 3) M_* h}{2\pi R^3} \left(\frac{\Delta}{m + 1} \right)^{m/(m+1)}. \quad (1.16)$$

Когда материал линейно-упругий, принимая в (1.13) $m = 1$ и $\lambda = 1/(s + 1)$, имеем

$$N_* = \frac{2(1 - \delta) M_*}{\pi R^3 [1 - (a/R)^4]} \left[\frac{\Delta (1 - \delta/2)}{(1 - \delta)(s + 1)} \right]^{s/(s+1)}. \quad (1.17)$$

В случае щели, принимая $s = 1$, из (1.17) находим

$$N_* = \frac{\sqrt{2} M_*}{\pi R^{5/2}} \frac{\sqrt{\delta} \sqrt{(1 - \delta)(1 - \delta/2)}}{1 - (a/R)^4}. \quad (1.18)$$

Отсюда при малых δ или же из (1.16) при $m = 1$ получим

$$N_* = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{M_* R^{-5/2} \sqrt{\delta}}{1 - (a/R)^4}. \quad (1.19)$$

Принимая $a/R = 0,5$ и вычисляя M_* при $\delta = 0,05$ по формуле (1.19), а при $\delta = 0,2$ по (1.18), находим $N_* = 0,1 M_* R^{-5/2}$ и $\tilde{N}_* = 0,18 M_* R^{-5/2}$ соответственно. Сравнивая эти формулы (предварительно умножая на $\sqrt{2\pi}$) с точными решениями, приведенными в [5, с. 723] в виде графиков, заключаем, что полученные здесь результаты занижены примерно на 10 %.

На рис. 3 представлены предельные кривые, построенные по формуле (1.13) при $\delta = 0,2$ и при фиксированных значениях параметров Δ и m .

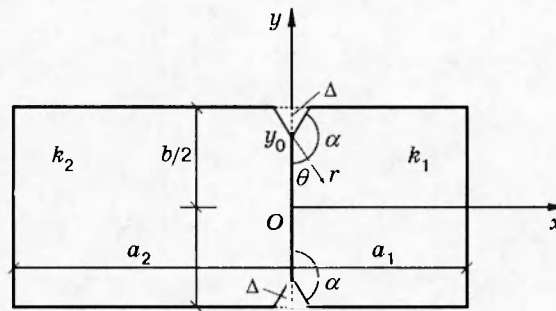


Рис. 5

Критические контактные напряжения, согласно (1.11), (1.12) при $\delta = 0,2$, приведены на рис. 4.

Составной линейно-упругий стержень. Пусть скручиваемый брус состоит из двух линейно-упругих прямоугольных брусков, соединенных по боковым поверхностям полным прилипанием, на концах контактной поверхности имеются два симметричных относительно этой поверхности одинаковых входящих угла (рис. 5).

Такая задача в целом без угловых вырезов решена в [6]. Согласно [6], номинальное контактное напряжение представим в виде

$$T_{xi}(0, y) = \frac{M}{Db^3} \left[4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Omega_n(\gamma)}{p_n^2} \sin p_n \frac{y}{b} - \frac{y}{b} \right],$$

где $\Omega_n = (1/\omega_n) \{ [\gamma + (1-\gamma) \operatorname{ch} p_n c_2] \operatorname{sh} p_n c_1 + \gamma \operatorname{sh} p_n c_2 \}$; $\omega_n = \operatorname{ch} p_n c_2 \operatorname{sh} p_n c_1 + \gamma \operatorname{ch} p_n c_1 \operatorname{sh} p_n c_2$; $p_n = (2n+1)\pi/2$; $\gamma = k_2/k_1$; $c_i = a_i/b$; k_i — модули сдвигов материалов; $D = (8/3)(c_1 + \gamma c_2) + 32 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n - \gamma R_n}{p_n^5 \omega_n}$; $Q_n = \operatorname{ch} p_n c_2 + \gamma^2 \operatorname{ch} p_n c_1 - (1 + \gamma^2) \operatorname{ch} p_n c_1 \operatorname{ch} p_n c_2$; $R_n = \operatorname{ch} p_n c_1 + \operatorname{ch} p_n c_2 - \operatorname{ch} p_n(c_1 + c_2) - 1$. Номинальное напряжение в угловой точке $\tau = T_i(0, y_0) = MS(\gamma, \delta)/(Db^3)$. Здесь

$$S = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Omega_n(\gamma)}{p_n^2} \sin p_n(1 - \delta) + \delta - 1; \quad b - y_0 = \Delta = \delta b.$$

Критическое значение τ определяется через разрушающий момент формулой $\tau_* = M_* S / Db^3$.

Далее, вычисляя интеграл (1.9), вводя переменную $\xi = y/b$ и принимая $\lambda = 1/(s+1)$, из (1.8) получим

$$N_* = \tau_* \left[\frac{\Delta}{s+1} \Phi(\gamma, \delta) \right]^{s/(s+1)}, \quad (1.20)$$

где

$$\Phi = \frac{1}{S} \left[\frac{8}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Omega_n(\gamma)}{p_n^3} \sin \frac{p_n}{2} (2 - \delta) \sin \frac{p_n}{2} \delta + \frac{1}{2} \delta - 1 \right].$$

Отметим также, что $\Phi \rightarrow 1$ при $\delta \rightarrow 0$. При $s = 1$, т. е. для щели, из (1.20) следует $N_* = \tau_* \sqrt{\Delta/2} \sqrt{\Phi(\gamma, \delta)}$. При фиксированных значениях параметров Δ , δ , γ уравнение (1.20) определяет предельную кривую разрушения, отделяющую области прочности и разрушения.

2. Плоская деформация. Пусть составное тело со степенным упрочнением материалов находится в состоянии плоской деформации. Полагаем, что на крае контактной поверхности имеются входящий угол, свободный от внешних сил, и концентрации напряжений. В случае плоской деформации также будем использовать рис. 1.

Исходные соотношения и уравнения. Принимаем, что известно решение соответствующей задачи в целом, т. е. без входящего угла. Компоненты напряжения $T_{\rho i}$, $T_{\varphi i}$, $T_{\rho\varphi i}$ и перемещения u_i , v_i , по-прежнему называемые номинальными, считаем заданными в полярной системе координат $\rho\varphi$. С другой стороны, будем исходить из местного решения в рассматриваемой угловой точке в полярной системе координат $r\theta$, приведенной в [2]. Заменяем в этом решении функции $f_i(\theta, \lambda)$ на $Af_i(\theta, \lambda)$, где A — произвольная постоянная, а $f_i(\theta, \lambda)$ — решение системы дифференциальных уравнений

$$[(f_i'' + \mu f_i)\chi_i]'' + \nu(f_i'' + \mu f_i)\chi_i + 4\eta(f_i'\chi_i)' = 0. \quad (2.1)$$

Здесь $\chi_i = \left(\sqrt{(f_i'' + \mu f_i)^2 + 4\lambda^2 f_i'^2}\right)^{(m-1)}$; λ — искомый параметр; $\eta = \lambda[1 + (\lambda - 1)m]$; $\mu = 1 - \lambda^2$; $\nu = 1 - \eta^2/\lambda^2$. Если ввести обозначения $\sigma_i(\theta) = (1/(\lambda - 1)m) \{[(f_i'' + \mu f_i)\chi_i]' + 4\eta f_i'\chi_i\}$, $\tau_i(\theta) = (f_i'' + \mu f_i)\chi_i$, то для свободных от внешних сил краев гранично-контактные условия имеют следующий вид:

для внешних краев

$$\sigma_i = \tau_i = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \alpha; -\beta; \quad (2.2)$$

на контактной поверхности

$$\sigma_1 = \gamma\sigma_2, \quad \tau_1 = \gamma\tau_2, \quad f_1' = f_2', \quad f_1 = f_2 = 1 \quad \text{при} \quad \theta = 0, \quad (2.3)$$

причем здесь принято без ограничения общности условие нормировки. По-прежнему $\gamma = k_2/k_1$ (k_i — модули деформации материалов). Полагаем, что задача о нахождении функции $f_i(\theta, \lambda)$ и параметра λ из (2.1)–(2.3) решена. Используя прежние обозначения, полагаем, что величина $\lambda = \lambda(s_1, s_2, \gamma, m)$ определена численным или другим способом. В случае щели и однородного материала [7, 8] имеем $\lambda = m/(m + 1)$. В общем случае считаем, что угол входящий и $\lambda < 1$, т. е. имеем концентрации напряжений.

Поверхность разрушений. Вводя обозначения $A|A|^{m-1}k_i\Omega_i = N$, $\Omega_i = \sqrt{\sigma_i^2(0) + \tau_i^2(0)}$, контактные напряжения [2] в окрестности угловой точки представим в виде

$$\sigma_{\theta i}(r, 0) = Nr^{(\lambda-1)m}\sigma_i(0)/\Omega_i, \quad \tau_{r\theta i}(r, 0) = Nr^{(\lambda-1)m}\tau_i(0)/\Omega_i. \quad (2.4)$$

Постоянная

$$N = \frac{\Omega_i}{\sigma_i(0)} \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{\theta i}(r, 0) r^{(1-\lambda)m} = \frac{\Omega_i}{\tau_i(0)} \lim_{r \rightarrow 0} \tau_{r\theta i}(r, 0) r^{(1-\lambda)m},$$

имеющая размерность кг · см^{(1-λ)m-2} и подлежащая определению, аналогична коэффициенту интенсивности напряжения в выражениях напряжений в вершинах трещин.

Далее введем на контактной поверхности интенсивность номинальных напряжений $T(\rho) = \sqrt{T_{\varphi i}^2(\rho, 0) + T_{\rho\varphi i}^2(\rho, 0)}$ и аналогично интенсивность концентрационных напряжений $p(r) = \sqrt{\sigma_{\theta i}^2(r, 0) + \tau_{r\theta i}^2(r, 0)} = Nr^{(\lambda-1)m}$.

На неизвестном расстоянии r_0 от угловой точки на контактной поверхности интенсивность концентрационных напряжений приравниваем к интенсивности номинальных напряжений $p(r_0) = T(\rho_0)$, откуда следует уравнение

$$Nr_0^{(\lambda-1)m} = T(\rho_0), \quad (2.5)$$

содержащее неизвестные постоянные N и r_0 .

Для составления второго уравнения, согласно методу сечения, проведем мысленно сечение по плоскости $\varphi = 0$ и, отбрасывая одну из частей тела, рассмотрим равновесие оставшейся части. Полагаем, что вследствие углового выреза, не передающего напряжения на промежутке $\rho_0 \leq \rho \leq R$, усилие передается напряжениями с особенностью в угловой точке. Для целого тела без угла нормальные и касательные номинальные напряжения, действующие в указанном интервале, должны уравниваться концентрационными нормальными и касательными напряжениями, действующими на контактную поверхность в интервале $0 \leq r \leq r_0$ окрестности угловой точки.

В частном случае, когда на контактной поверхности отсутствует один из двух компонентов напряжений, будем иметь одно уравнение равновесия, которое достаточно с (2.5) для определения N и r_0 .

В общем же случае для нахождения второго уравнения рассмотрим функцию

$$U = P^2 + Q^2, \quad (2.6)$$

причем

$$P = \int_{\rho_0}^R T_{\varphi i}(\rho, 0) d\rho - \int_0^{r_0} \sigma_{\theta i}(r, 0) dr, \quad Q = \int_{\rho_0}^R T_{\rho \varphi i}(\rho, 0) d\rho - \int_0^{r_0} \tau_{r \theta i}(r, 0) dr. \quad (2.7)$$

Здесь P — разность нормальных, а Q — разность касательных номинальных и концентрационных сил, действующих в вышеуказанных интервалах контактной поверхности.

Подставляя выражения $\sigma_{\theta i}(r, 0)$ и $\tau_{r \theta i}(r, 0)$ из (2.4) в (2.7), производя интегрирование, а затем исключая r_0 , согласно (2.5), находим

$$P = \int_{\rho_0}^R T_{\varphi i}(\rho, 0) d\rho - N_0 B \frac{\sigma_i(0)}{\Omega_i}, \quad Q = \int_{\rho_0}^R T_{\rho \varphi i}(\rho, 0) d\rho - N_0 B \frac{\tau_i(0)}{\Omega_i}, \quad (2.8)$$

где

$$N_0 = N^{1/(1-\lambda)m}, \quad B = \left(1/[1 + (\lambda - 1)m]\right) [T(\rho_0)]^{1+1/(1-\lambda)m}.$$

Подставляя (2.8) в (2.6), определяя первую производную U по N_0 как

$$\frac{\partial U}{\partial N_0} = -2B \left[P \frac{\sigma_i(0)}{\Omega_i} + Q \frac{\tau_i(0)}{\Omega_i} \right] \quad (2.9)$$

и приравняв к нулю, находим N_0 , а затем N в виде

$$N = T(\rho_0) \left\{ [1 + (\lambda - 1)m] \int_{\rho_0}^R \frac{\sigma_i(0) \bar{T}_{\varphi i}(\rho, 0) + \tau_i(0) \bar{T}_{\rho \varphi i}(\rho, 0)}{\Omega_i T(\rho_0)} d\rho \right\}^{(1-\lambda)m} \quad (2.10)$$

Легко заметить, что $\partial^2 U / \partial N_0^2 = 2B^2 > 0$. Это значит, что найденное по (2.10) N сообщает функции U минимальное значение.

Критическое значение N запишем в форме

$$N_* = T_* \{ \Delta [1 + (\lambda - 1)m] \Phi(\delta, \gamma, m) \}^{(1-\lambda)m}, \quad (2.11)$$

где

$$\Phi = \frac{1}{\delta} \int_{1-\delta}^1 H(\xi; \delta, \gamma, m) d\xi. \quad (2.12)$$

Здесь функция H определяется подынтегральным выражением (2.10) с переходом к безразмерным переменным и параметрам, а T_* означает параметр $T(\rho_0)$, при котором в угловой точке возникает разрушение соединения. Параметр T_* определяется экспериментально в результате измерения разрушающих внешних сил при испытании клеевых или других соединений. Для однородных тел измеряются внешние силы, при которых в угловой точке возникает разрушение материала.

Критические значения напряжения на контактной поверхности с учетом (2.11) можно представить в виде

$$\frac{\sigma_{\theta i}^*(r, 0)}{\sigma_i(0)} = \frac{\tau_{r\theta i}^*(r, 0)}{\tau_i(0)} = \frac{T_*}{\Omega_i} \left(\frac{\Delta}{r}\right)^{(1-\lambda)m} \{[1 + (\lambda - 1)m]\Phi(\delta, \gamma, m)\}^{(1-\lambda)m}.$$

Цилиндрическая труба под внутренним давлением. Пусть длинная толстостенная однородная труба со степенным упрочнением материала, имеющего радиальный симметричный угловой вырез со стороны наружной поверхности, находится под равномерным внутренним давлением p (на рис. 2 добавляется $\sigma_r = -p$).

Номинальное напряжение, согласно [9], запишем как

$$T_\varphi(\rho) = \frac{pl}{1-l} \left[1 + (2m-1) \left(\frac{R}{\rho}\right)^{-2m} \right], \quad l = \left(\frac{a}{R}\right)^{2m}.$$

Здесь a и R — радиусы внутренней и внешней поверхности трубы; $R - \rho_0 = \Delta = \delta R$. Номинальное напряжение в угловой точке $T_\varphi(\rho_0) = [pl/(1-l)][1 + (2m-1)(1-\delta)^{-2m}]$.

Вычисляя интеграл из (2.10), (2.12) с учетом $\tau_i(0) = 0$, находим

$$\Phi = \frac{(1-\delta)[1 - (1-\delta)^{2m}]}{\delta[2m-1 + (1-\delta)^{2m}]} \quad (2.13)$$

Отсюда следует $\Phi \rightarrow 1$ при $\delta \rightarrow 0$. Из (2.11) имеем

$$N_* = T_* \{ \Delta [1 + (\lambda - 1)m] \Phi(\delta, m) \}^{(1-\lambda)m}, \quad (2.14)$$

где $\lambda = \lambda(s, m)$; $T_* = [p_* l / (1-l)][1 + (2m-1)(1-\delta)^{-2m}]$. Здесь p_* — критическое давление, при котором происходит разрушение в рассматриваемой угловой точке; T_* находится экспериментально (в результате измерения p_*).

Уравнение (2.14), т. е. $N_* = N_*(s, \delta, m)$, при фиксированных параметрах δ и m определяет предельную кривую разрушения, отделяющую области прочности и разрушения. Для случая щели, полагая $\lambda = m/(m+1)$ [7, 8], получим

$$N_* = T_* \left[\frac{\Delta}{m+1} \Phi(\delta, m) \right]^{m/(m+1)}. \quad (2.15)$$

Учитывая значение функции Φ (2.13) при малых значениях δ , из (2.15) имеем

$$N_* = q_* \left(\frac{\Delta}{m+1} \right)^{m/(m+1)}, \quad q_* = \frac{2mp_*(a/R)^{2m}}{1 - (a/R)^{2m}}. \quad (2.16)$$

На рис. 6 приведены графики N_*/q_* в зависимости от m при трех значениях параметра Δ . В случае трещины в линейно-упругом материале из (2.13), (2.14) находим

$$N_* = \frac{\sqrt{2}p_*(a/R)^2\sqrt{\Delta}}{1 - (a/R)^2} \frac{\sqrt{(1-\delta/2)(1-\delta+\delta^2/2)}}{(1-\delta)^{3/2}}.$$

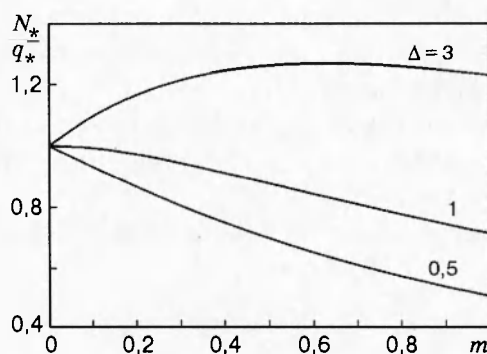


Рис. 6

Отсюда при малых значениях δ или же из (2.16) при $m = 1$ запишем

$$N_* = \frac{\sqrt{2}p_*(a/R)^2\sqrt{\Delta}}{1 - (a/R)^2}.$$

Сравнивая полученную формулу для малых значений δ (после умножения на $\sqrt{2\pi}$) с соответствующим точным значением [10, с. 320] (для кругового кольца), замечаем занижение примерно на 10 %. При увеличении δ это расхождение увеличивается.

Указанные отклонения значений N от точных имеют односторонний характер — в сторону занижения (см. также [3]). Поэтому полученные здесь приближенные значения N можно рассматривать как некоторые оценки снизу.

Автор благодарит профессора М. Е. Морозова за обсуждение результатов и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чобанян К. С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987.
2. Задоян М. А. Пространственные задачи теории пластичности. М.: Наука, 1992.
3. Партон В. З., Морозов В. М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985.
4. Качанов Л. М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960.
5. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. Т. 2 / Под ред. Ю. Мураками. М.: Мир, 1990.
6. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1954.
7. Райс Дж. Математические методы в механике разрушения. Т. 2: Разрушение. М.: Мир, 1975.
8. Черепанов Г. И. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
9. Надаи А. Пластичность. М.: ОНТИ, 1936.
10. Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие в 4 т. Т. 2. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Киев: Наук. думка, 1988.

Поступила в редакцию 9/IV 1996 г.