разрыхления при отколе и появление трещин, перпендикулярных поверхности откола, которые наблюдали многие авторы, исследовавшие это явление.

*Поступила 3 VIII 1978*

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Архипов В. И., Маслов П. А.** Экспериментальное исследование динамики роста хрупких трещин.— ПМТФ, 1977, № 3.
2. **Kobayashi A. S., Emery A. F., Mall S.** Dynamic-finite-element and dynamic-photoelastic analysis of two fracturing homalite-100 plates.— «Exp. Mech.», 1976, vol. 16, N 9.
3. **Тараторин Б. И., Сахаров В. Н., Кузьмин В. С.** Исследование задач механики разрушения поляризационно-оптическим методом.— В кн.: Поляризационно-оптический метод. М., «Наука», 1975.
4. **Большаков А. П., Новиков С. А., Пылева В. П., Синицын В. А., Филиппов К. И.** О получении диаграмм растяжения образцов при взрывном нагружении.— ПМТФ, 1975, № 1.
5. **Финкель В. М.** Физические основы торможения разрушения. М., «Металлургия», 1977.
6. **Benbow J. J., Roesler T. S.** Experiments on controlled fractures.— «Proc. Phys. Soc.», 1957, vol. 70, pt 2, N 446.

---

УДК 539.375; 622.011.4; 622.023

# О ХРУПКОМ РАЗРУШЕНИИ КЕРНА ПРИ БУРЕНИИ В СЖАТОЙ СРЕДЕ

*Э. А. Кошелев, П. А. Мартынюк, Э. Б. Поляк, Е. Н. Шер*

(*Новосибирск*)

При бурении с отбором керна в сжатой горным давлением среде обычно наблюдается разрушение керна на отдельные диски [1]. Замечено, что толщина образовавшихся дисков связана с величиной действующего горного давления и увеличение давления вызывает уменьшение толщины откалываемых дисков керна. На этой экспериментально установленной связи основана одна из методик ВНИМИ по определению удароопасных участков в шахтах [2].

В данной работе это явление исследуется теоретически в рамках модели идеально упругой среды, разрушающейся хрупким образом. Делаются следующие предположения:

а) толщина стенок бурового инструмента полагается равной нулю, как и расстояние между берегами цилиндрической полости выбуриваемой буром в породе:

б) воздействие бура на керн при бурении описывается распределенным касательным напряжением, закручивающим керн. Нормальные напряжения на берегах разреза предполагаются нулевыми;

в) на бесконечности действуют однородные сжимающие напряжения, перпендикулярные оси цилиндрической трещины.

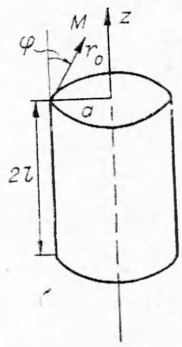
При этих предположениях вопрос о разрушении керна в принятой модели сводится к анализу напряженного состояния вблизи кромки возникающего цилиндрического выреза, а точнее, к определению коэффициентов интенсивности поля напряжений $K_{\rm I}$, $K_{\rm II}$ и $K_{\rm III}$ [3].

Рассматривается наиболее простая задача о равновесии в бесконечном изотропном упругом пространстве цилиндрического разреза радиуса $a$ и длиной $2l$, ось которого расположена вдоль оси $z$, как изображено на фиг. 1. Исследуется два случая нагружения — сжатие поперечно оси $z$ давлением, равным $p_0$ на бесконечности, и кручение вдоль оси $z$ напряжением, приложенным к поверхности керна.

**1. Осесимметрический случай.** Полагаем, что вектор перемещения $\mathbf{u}$ не зависит от угла $\varphi$ и имеет вид $\mathbf{u} = u\cdot\mathbf{r} + w\cdot\mathbf{z}$. Введем безразмерные величины формулами (штрихи в дальнейшем для простоты записи опускаются)

$$\langle u, w, z, r, a\rangle' = \frac{\langle u, w, z, r, a\rangle}{l},$$

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij}/\mu, \quad \langle p_0, \tau_0\rangle' = \langle p_0, \tau_0\rangle/\mu.$$




Фиг. 1

Тогда уравнения равновесия и компоненты тензора напряжения запишутся в виде

$$(1.1)\qquad 2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}\right] + (1-2\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial r} = 0,$$

$$(1-2\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right] + 2(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right] = 0,$$

$$\sigma_{rr} = (1-2\nu)^{-1}[(1-\nu)\partial u/\partial r + \nu(u/r + \partial w/\partial z)],$$

$$\sigma_{zz} = (1-2\nu)^{-1}[(1-\nu)\partial w/\partial z + \nu(u/r + \partial u/\partial r)],\quad \sigma_{rz} = 2^{-1}[\partial u/\partial z + \partial w/\partial r].$$

В рассматриваемом пространстве выделяем две области. Величины, относящиеся к области $r \leqslant a$, помечаем индексом 1, а к области $r \geqslant a$ — индексом 2. Полагая деформированное состояние тела симметричным относительно плоскости $z = 0$, запишем общее решение уравнений равновесия (1.1)

$$u_1(r, z) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \{srA(s)I_0(sr) + [sB(s) - 4(1-\nu)A(s)]I_1(sr)\}\cos(sz)\,ds,$$

$$w_1(r, z) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty s[B(s)I_0(sr) + rA(s)I_1(sr)]\sin(sz)\,ds,$$

$$u_2(r, z) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \{srC(s)K_0(sr) + [sD(s) + 4(1-\nu)C(s)]K_1(sr)\}\cos(sz)\,ds,$$

$$w_2(r, z) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty s[D(s)K_0(sr) + rC(s)K_1(sr)]\sin(sz)\,ds.$$

Четыре произвольные функции $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$, $D(s)$ определяются из граничных условий

$$(1.2)\qquad \sigma_{rr}^{(1)} = p_0 p(z),\quad \sigma_{rz}^{(1)} = 0 \ \text{при}\ r = a,\ |z| \leqslant 1$$

и дополнительных условий (непрерывность поля смещений и непрерывность компонент тензора напряжения на поверхности $r = a$)

$$u_1 = u_2, \quad w_1 = w_2 \quad \text{при } |z| \geqslant 1,$$
$$\sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(2)}, \quad \sigma_{rz}^{(1)} = \sigma_{rz}^{(2)} \quad \text{при } |z| < \infty. \tag{1.3}$$

Из второй пары условий (1.3) находим выражения для $A(s)$ и $C(s)$ через две неизвестные функции $B(s)$ и $D(s)$. После этого оставшиеся условия (1.3) и граничные условия (1.2) можно представить в виде

$$\frac{1}{2(1-\nu)}[u_1 - u_2] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty [B_1(s) f_9 + D_1(s) f_{10}] \cos(sz)\, ds = 0, \quad z \geqslant 1,$$

$$\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial z}[w_1 - w_2] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty s[B_1(s) f_{11} + D_1(s) f_{12}] \cos(sz)\, ds = 0,$$

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty [B_1(s) F_1 - D_1(s) F_2] \cos(sz)\, ds = p_0 p(z), \tag{1.4}$$

$$\sigma_{rz}^{(1)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty [B_1(s) F_3 + D_1(s) F_4]\, s \sin(sz)\, ds = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1,$$

где $B_1(s) = B(s) sF_0^{-1}$; $D_1(s) = D(s) sF_0^{-1}$;

$$F_0 = f_3 f_5 + f_7 f_1; \quad F_1 = s^{-1} f_3 [f_5 f_2 - f_6 f_1];$$

$$F_2 = s^{-1} f_1 [f_4 f_7 - f_3 f_8]; \quad F_3 = F_1 f_7 f_3^{-1}; \quad F_4 = F_2 f_5 f_1^{-1};$$

$$f_1 = -(3-2\nu) sI_0(sa) + \left[s^2 a + \frac{4(1-\nu)}{a}\right] I_1(sa);$$

$$f_2 = s^2 a I_0(sa) - \frac{s}{a} I_1(sa);$$

$$f_3 = (3-2\nu) sK_0(sa) + \left[s^2 a + \frac{4(1-\nu)}{a}\right] K_1(sa); \quad f_4 = s^2 a K_0(sa) + \frac{s}{a} K_1(sa);$$

$$f_5 = saI_0(sa) - 2(1-\nu) I_1(sa); \quad f_6 = sI_1(sa);$$

$$f_7 = saK_0(sa) + 2(1-\nu) K_1(sa); \quad f_8 = sK_1(sa);$$

$$f_9 = sI_0(sa) + \frac{2(1-\nu)}{a} I_1(sa); \quad f_{10} = sK_0(sa) - \frac{2(1-\nu)}{a} K_1(sa);$$

$$f_{11} = \frac{1-2\nu}{a} I_0(sa) + f_6; \quad f_{12} = \frac{1-2\nu}{a} K_0(sa) - f_8.$$

Полученную систему четырех интегральных уравнений для двух неизвестных функций $B_1(s)$ и $D_1(s)$ сведем к системе из двух интегральных уравнений Фредгольма второго рода для непрерывных на отрезке [0, 1] функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ способом, указанным в работе [4].

Функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ задаются равенствами

$$u_0(a, z) = \int_z^1 \frac{\tau\varphi(\tau)\, d\tau}{\sqrt{\tau^2 - z^2}}, \quad w_0(a, z) = \frac{\delta}{\sqrt{1 - z^2}} + \int_z^1 \frac{\psi(\tau)\, d\tau}{\sqrt{\tau^2 - z^2}},$$

здесь $u_0(a, z)$ и $w_0(a, z)$ с точностью до коэффициентов совпадают с $u_1(a, z) - u_2(a, z)$ и $\partial w_1/\partial z - \partial w_2/\partial z$ при $r = a$. Параметр $\delta$ определяется из условия, что перемещения $w_1(a, z)$ и $w_2(a, z)$ при $z \to 1$ должны совпадать, и дается выражением

$$\delta = -\int_0^1 \psi(t)\,dt.$$

Из двух первых уравнений системы (1.4) получаем формулы, определяющие $B_1(s)$ и $D_1(s)$ через вновь введенные функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$

$$B_1(s) = F^{-1}[-s^{-1}f_{10}\Psi_0 + f_{12}\Phi_0],\quad D_1(s) = F^{-1}[s^{-1}f_9\Psi_0 - f_{11}\Phi_0],$$

где

$$F = -s/a + \frac{2(1-\nu)(1-2\nu)}{sa^3};\quad \Phi_0 = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \tau\varphi(\tau)J_0(s\tau)\,d\tau;$$

$$\Psi_0 = \frac{\pi}{2}\left[\delta J_0(s) + \int_0^1 \psi(\tau)J_0(s\tau)\,d\tau\right].$$

Оставшиеся уравнения системы (1.4) так же, как это сделано в работе [4], приводятся к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода (для простоты принято $p(z) = 1 = \mathrm{const}$)

$$(1.5)\qquad \varphi_1(t) + 2\int_0^1 \varphi_1(\tau)K_1(\tau, t)\,d\tau - 2\int_0^1 \psi_1(\tau)K_2(\tau, t)\,d\tau = 2\sqrt{t},$$

$$\psi_1(t) + 2\int_0^1 \psi_1(\tau)K_3(\tau, t)\,d\tau + 2\int_0^1 \varphi_1(\tau)K_4(\tau, t)\,d\tau = 4\frac{\alpha}{a}\sqrt{t},$$

где

$$\varphi_1(t) = t^{1/2}\varphi(t)p_0^{-1};\ \psi_1(t) = t^{-1/2}\psi(t)p_0^{-1};\ \delta = -\int_0^1 \sqrt{t}\,\psi(t)\,dt;$$

$$K_1(\tau, t) = \sqrt{\tau t}\int_0^\infty sg_1(s)J_0(st)J_0(s\tau)\,ds;$$

$$K_2(\tau, t) = \sqrt{\tau t}\int_0^\infty sg_2(s)J_0(st)[J_0(s\tau) - J_0(s)]\,ds;$$

$$K_3(\tau, t) = \sqrt{\tau t}\int_0^\infty s\left[g_4(s) - \frac{2\alpha}{a}g_2(s)\right]J_0(st)[J_0(s\tau) - J_0(s)]\,ds;$$

$$K_4(\tau, t) = \sqrt{\tau t}\int_0^\infty s\left[g_3(s) - \frac{2\alpha}{a}g_1(s)\right]J_0(st)J_0(s\tau)\,ds;$$

$$g_1(s) = [z^2 + (3-2\nu)]\Phi_1 + \frac{2}{z}\Phi_2 - 1/2;\quad g_2(s) = -s^{-1}[z\Phi_1 + \Phi_2];$$

$$g_3(s) = s[z\Phi_1 + \Phi_2] + \frac{\alpha}{a};$$

$$g_4(s) = z^2\Phi_1 - 1/2;\ \Phi_1 = I_0(z)K_1(z) - I_1(z)K_0(z);\ \Phi_2 = z^2I_0(z)K_0(z) - [z^2 + 2(1-\nu)]I_1(z)K_1(z);\ z = sa;\ \alpha = 1/4 - \nu.$$

Найдя решение системы (1.5), можем посчитать поля напряжений и перемещений в любой точке нашей области.

**2. Кручение цилиндрической трещины.** В этом случае отлична от нуля единственная компонента вектора перемещения $u_\varphi = u(r, z)$, а уравнение равновесия и ненулевые компоненты тензора напряжения имеют вид (в безразмерной форме)

(2.1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,\qquad \sigma_{r\varphi}=\partial u/\partial r-u/r,\quad \sigma_{z\varphi}=\partial u/\partial z.$$

Предполагаем, что $u(r, z)$ является четной функцией по $z$. Как и раньше, индексом 1 будут обозначаться величины, относящиеся к внутреннему цилиндру, а индексом 2 — к внешнему $r \geqslant a$. Тогда решение уравнения равновесия (2.1) можно записать в виде

$$u^{(1)}(r, z)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty A(s)\,I_1(sr)\cos(sz)\,ds,\; u^{(2)}(r, z)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty B(s)\,K_1(sr)\cos(sz)\,ds.$$

Произвольные функции $A(s)$ и $B(s)$ определяются из граничных условий и условий непрерывности при $r = a$

(2.2) $$\sigma_{r\varphi}^{(1)}=\tau_0\tau_1(z),\quad \sigma_{r\varphi}^{(2)}=\tau_0\tau_2(z)\quad \text{при } |z|\leqslant 1,$$
$$\sigma_{r\varphi}^{(1)}=\sigma_{r\varphi}^{(2)},\quad u^{(1)}=u^{(2)}\quad \text{при } |z|\geqslant 1.$$

Первые три условия определяют выражение $\sigma_{r\varphi}^{(1)}(a, z)-\sigma_{r\varphi}^{(2)}(a, z)$ при $r = a$, $|z| < \infty$, откуда имеем

$$A(s)I_2(sa)+B(s)K_2(sa)=T_0(s),$$

где

$$T_0(s)=s^{-1}\tau_0\int_0^1[\tau_1(z)-\tau_2(z)]\cos(sz)\,dz.$$

Вводя в рассмотрение новую функцию $F(s)$ равенством

$$A(s)I_1(as)-B(s)K_1(as)=F(s),$$

первое и последнее условие из (2.2) запишем в виде

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty s^2 a I_2(sa)\,[K_2(sa)\,F(s)+T_0(s)\,K_1(sa)]\cos(sz)\,ds=\tau_0\;\tau_1(z),\quad 0\leqslant z\leqslant 1,$$

(2.3) $$w(a, z)=u^{(1)}(a, z)-u^{(2)}(a, z)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(s)\cos(sz)\,ds=0,\quad z\geqslant 1.$$

Из последнего уравнения получаем

(2.4) $$F(s)=\int_0^1 w(a, z)\cos(sz)\,dz.$$

Так как перемещения $u^{(i)}(a, z)$ $(i = 1, 2)$ при $z\to 1$, т. е. в носике трещины, ведут себя как $(1-z)^{1/2}$, то введем функцию $\varphi(t)$ равенством

$$w(a, z)=\int_z^1\frac{\tau\varphi(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\tau^2-z^2}}.$$

Подставляя в (2.4) выражение для $w(a, z)$, получим

$$F(s) = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \tau\varphi(\tau) J_0(s\tau)\, d\tau.$$

Второе уравнение системы (2.3) удовлетворяется тождественно при любой функции $\varphi(t)$. Подставляя так определенную функцию $F(s)$ в первое уравнение системы (2.3) и проводя необходимые преобразования, как это сделано в работе [4], получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\varphi_1(t) - \int_0^1 \varphi_1(\tau) K(\tau, t)\, d\tau = F(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{2.5}$$

где

$$\varphi_1(t) = \varphi(t)\sqrt{t}\,\tau_0^{-1};$$

$$K(\tau, t) = 2\sqrt{\tau t}\int_0^\infty s\,[1/2 - saI_2(sa)K_2(sa)]\, J_0(st) J_0(s\tau)\, ds;$$

$$F(t) = \frac{4}{\pi}\sqrt{t}\left\{\int_0^t \frac{\tau_1(z)\, dz}{\sqrt{t^2 - z^2}} - \int_0^\infty s^2 aI_2(sa) K_1(sa) T_0(s) J_0(st)\, ds\right\}.$$

**3. Выделение особенностей напряжений и обсуждение результатов.** Полученные решения обладают тем свойством, что напряжения имеют особенность в вершине трещины порядка $r_0^{-1/2}$, где $r_0 \ll 1$ — расстояние извне до вершины трещины (см. фиг. 1). Условия предельного равновесия трещины полностью определяются коэффициентами интенсивности напряжений $K_{\mathrm{I}}$, $K_{\mathrm{II}}$, $K_{\mathrm{III}}$ при этих особенностях. Найдем коэффициент интенсивности напряжений рассмотренных задач, считая, что решения уравнений Фредгольма (1.5), (2.5) известны. При кручении цилиндрической трещины напряжение $\sigma_{r\varphi}$ можно записать в виде

$$\sigma_{r\varphi}^{(1)}(r, z) \simeq \int_0^\infty s^2 aK_2(sa) I_2(sr)\cos(sz)\, ds \int_0^1 \tau\varphi(\tau) J_0(s\tau)\, d\tau + \ldots \tag{3.1}$$

Полагая, что $a - r = \varepsilon \ll 1$, при $s \gg 1$ имеем

$$s^2 aK_2(sa) I_2(sr) \simeq e^{-\varepsilon s}[(2as)^{-1} + O(s^{-2})]. \tag{3.2}$$

Во внутреннем интеграле также выделим главную часть

$$\int_0^1 \tau\varphi(\tau) J_0(s\tau)\, d\tau \simeq \frac{1}{s}\varphi(1) J_1(s). \tag{3.3}$$

Учитывая в (3.1) только главные члены из (3.2), (3.3) (можно показать, что остальные члены не участвуют в формировании особенности), получаем [5]

$$\sigma_{r\varphi}(r, z) \simeq \frac{\varphi(1)}{2}\int_0^\infty e^{-\varepsilon s} J_1(s)\cos(sz)\, ds = \frac{\varphi(1)}{2}\left[1 - (2r_0)^{-1/2}\cos\frac{\varphi}{2}\right]$$

или, возвращаясь к размерным величинам, имеем

$$\sigma_{r\varphi} \simeq \frac{\varphi_1(1)}{2}\tau_0\left[1 - \sqrt{\frac{l}{2}}\cos\frac{\varphi}{2}\, r_0^{-1/2}\right] = \tau_0\frac{\varphi_1(1)}{2} - \frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{r_0}}\cos\frac{\varphi}{2}. \tag{3.4}$$

Поступая аналогичным образом в осесимметрическом случае, опуская при этом громоздкие вычисления, получим асимптотические формулы для компонент тензора напряжения, справедливые в малой окрестности вершины трещины и совпадающие с формулами, приведенными в [6],

$$\sigma_{rr}(r, z) = \frac{p_0\sqrt{l}}{2\sqrt{2r_0}}\left\{\delta\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{3\varphi}{2} - \varphi_1(1)\cos\frac{\varphi}{2}\left[1 + \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}\right]\right\},$$

$$\sigma_{zz}(r, z) = \frac{p_0\sqrt{l}}{2\sqrt{2r_0}}\left\{-\delta\sin\frac{\varphi}{2}\left[2 + \cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{3\varphi}{2}\right] - \varphi_1(1)\cos\frac{\varphi}{2}\left[1 - \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}\right]\right\}$$

$$\sigma_{rz}(r, z) = \frac{p_0\sqrt{l}}{2\sqrt{2r_0}}\left\{\delta\cos\frac{\varphi}{2}\left[1 - \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}\right] - \varphi_1(1)\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{3\varphi}{2}\right\}.$$

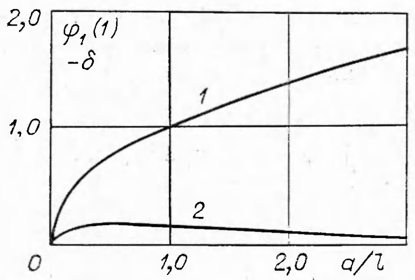
Отсюда

$$K_{\mathrm{I}} = -\frac{\varphi_1(1)\, p_0\sqrt{l}}{2\sqrt{2}}, \quad K_{\mathrm{II}} = \frac{p_0\sqrt{l}}{2\sqrt{2}}\delta, \tag{3.5}$$

где $\delta$ и $\varphi_1(1)$ определяются формулами (1.5).

В предельном случае при $a \to \infty$ и $\tau_1(z) = \tau_2(z) \equiv 1$ из уравнения (2.5) получаем $\varphi_1(1) = 2$ и из (3.4) находим $K_{\mathrm{III}} = \tau_0\sqrt{l}/\sqrt{2}$, что отвечает решению задачи о равновесии изолированной трещины длиной $2l$ в условиях антиплоской деформации.

В осесимметрическом случае из уравнений (1.5) при $a \to \infty$ получаем $\varphi_1(1) = 2$, $\psi_1(t) = 0$, а из (3.5) находим $K_{\mathrm{I}} = -p_0\sqrt{l/2}$; $K_{\mathrm{II}} = 0$, что отвечает решению об изолированной трещине в условиях плоской деформации.




Фиг. 2

Интегральные уравнения Фредгольма (1.5), (2.5) считались численно с помощью ЭВМ. В качестве примера результаты счета системы интегральных уравнений (1.5) при $\nu = 0{,}3$ изображены графически на фиг. 2. Здесь кривые *1* и *2* отвечают изменению $\varphi_1(1)$ и $(-\delta)$ в зависимости от величины отношения $a/l$. При малых значениях отношения $a/l$ величина $\varphi_1(1)$ считается устойчивой и ее значения хорошо аппроксимируются выражением

$$\varphi_1(1) = 1{,}095\sqrt{a/l}.$$

При $a/l \ll 1$ решение рассматриваемой задачи переходит в решение задачи о равновесии полубесконечной цилиндрической трещины, для которой, используя метод Райса [6], получаем зависимость

$$K_{\mathrm{I}}^2 + K_{\mathrm{II}}^2 = (2\pi)^{-1}\frac{p_0^2 a}{1 - \nu^2} \tag{3.6}$$

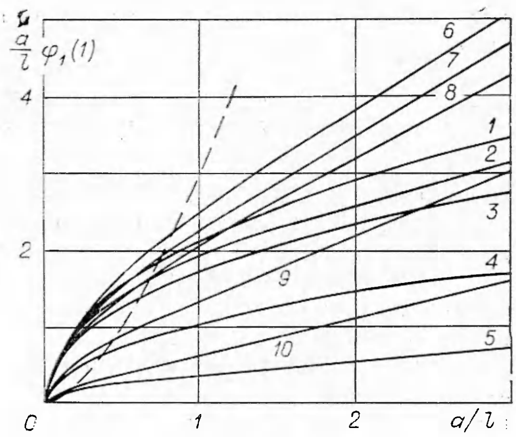
или

$$\varphi_1^2(1) + \delta^2 = \frac{4}{\pi(1 - \nu^2)}\frac{a}{l}.$$

Используя это соотношение, можно уточнить зависимость $-\delta$ (кривая *2*) при малых значениях отношения $a/l$, где численный счет на ЭВМ затруднен.

На фиг. 3 представлены результаты численного счета уравнения (2.5) в предположении, что

$$-\tau_2(z) = \tau_1(z) = \begin{cases} 1, & 1 - l_0' \leqslant z \leqslant 1, \\ 0, & 0 \leqslant z < 1 - l_0. \end{cases}$$




Фиг. 3

Линии *1* — *5* изображают изменение величины $a/l \cdot \varphi_1(1)$ в зависимости от отношения $a/l$ при $l_0/l = 1{,}0;\ 0{,}9;\ 0{,}8;\ 0{,}5;\ 0{,}2$ соответственно. Если $a/l \gg 1$, то величина $a/l \cdot \varphi_1(1) \sim \sqrt{a/l}$. В другом предельном случае для $a/l \ll 1$ по методу Райса [6] получаем

$$K_{\mathrm{III}} = \frac{2\tau_0 l_0}{\sqrt{2\pi}\, a^{1/2}} - \frac{M}{\pi \sqrt{2\pi}\, a^{5/2}}, \tag{3.7}$$

где $M = 2\pi a^2 \tau_0 l_0$ — момент, создаваемый напряжением $\tau_0$, действующим на участке длиной $l_0$. Кривые *1*—*5* с точностью от 1 до 5% (в зависимости от величины отношения $l_0/l$) при $a/l \leqslant 2$ аппроксимируются выражением, аналогичным полученному в работе [7]

$$\frac{a}{l}\varphi_1(1) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{a}{l}}\, \frac{l_0}{l}\left[1 - 0{,}047\frac{a}{l}\right]. \tag{3.8}$$

На фиг. 3 линиями *6*—*10* изображены результаты численного счета уравнения (2.5) в предположении, что $\tau_2(z) = 0$, а $\tau_1(z)$ такая же, как и выше при $l_0/l = 1{,}0;\ 0{,}9;\ 0{,}8;\ 0{,}5;\ 0{,}2$ соответственно. В этом случае при $a/l \gg 1$ величина $a/l \cdot \varphi_1(1)$ асимптотически стремится к значению $1 - 2/\pi \cdot \arcsin(1 - l_0)$, а при $a/l \leqslant 1$ с точностью до 2% аппроксимируется формулой

$$\frac{a}{l}\varphi_1(1) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{a}{l}}\left[\frac{l_0}{l} + 0{,}096\frac{a}{l}\right].$$

В задаче о кручении при $z = 0$ напряжение $\sigma_{z\varphi} = 0$, т. е. плоскость $z = 0$ является свободной. Задачу можно интерпретировать следующим образом: перпендикулярно свободной поверхности бурится цилиндрическая трещина (керн), а напряжение $\sigma_{r\varphi}$ характеризует трение между инструментом и породой. Беря в качестве критерия разрушения [3]

$$(1 - \nu)\left[K_{\mathrm{I}}^2 + K_{\mathrm{II}}^2\right] + K_{\mathrm{III}}^2 = 2\mu\frac{\gamma}{\pi}, \tag{3.9}$$

где $\gamma$ — поверхностная энергия, приходящаяся на единицу свободной поверхности тела, и считая величины $\gamma$, $\mu$, $\tau_0$, $a$ заданными, с помощью кривой *1* на фиг. 3 можем определить длину первого отломившегося куска. Рассматривая только кручение ($K_I = K_{II} = 0$), из (3.4), (3.9) получаем

$$\frac{a}{l}\varphi_1(1) = \frac{4}{\tau_0}\sqrt{\frac{\mu\gamma}{\pi a}}\left(\frac{a}{l}\right)^{3/2} = k_0\left(\frac{a}{l}\right)^{3/2}. \tag{3.10}$$

Эта зависимость изображена штриховой линией на фиг. 3 (при этом постоянная $k_0 = 3$). Точка пересечения этой линии с кривой *1* определяет длину первого куска $a/l_1 = 0{,}73$ или $l_1 = 1{,}37a$.

Рассмотрим следующую идеализацию процесса. Допустим, что инструмент углубился еще на расстояние $l_0$, тогда считаем, что касательные напряжения действуют только на этом участке $l_0$, а на длине отломившегося куска $l_1$ они равны нулю (он вращается вместе с режущим инструментом), и общая длина при этом будет $l = l_0 + l_1$. Чтобы найти размер второго куска, в данном случае достаточно приравнять (3.8) (где берем только главный член) и (3.10)

$$k_0(a/l)^{3/2} = (4/\sqrt{\pi})(a/l)^{1/2}\cdot l_0/l,$$

откуда $l_2 = l_0 = k_0\sqrt{\pi}/4\cdot a = 1{,}33a$. Очевидно, этот процесс можно продолжить дальше.

В общем случае, когда $K_I \neq 0$ и $K_{II} \neq 0$, т. е. имеется боковое сжатие, в предельном случае при $a/l \ll 1$ можно оценить влияние величины бокового давления $p_0$ на размер отламывающихся кусков. Для этого асимптотические выражения (3.6), (3.7) подставим в (3.9) и получим

$$\frac{l_0^2}{a^2} + \frac{1}{4(1+\nu)}\frac{p_0^2}{\tau_0^2} = \frac{\gamma\mu}{a\tau_0^2}.$$

Отсюда видно, что максимальный размер отламывающихся при бурении керна кусков получается при отсутствии бокового сжатия ($p_0 = 0$). С ростом $p_0$ размер кусков уменьшается и стремится к нулю при $p_0^2 = 4(1 + \nu)\gamma\mu a^{-1}$.

*Поступила 27 VI 1978*

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Leeman E. R.** The measurement of stress in rock.— «J. of the South Afric Inst. of Mining and Metallurgy», 1964, September.
2. **Временные** методические указания по прогнозированию и профилактике горных ударов на строительстве и эксплуатации шахт СУБРа. Свердловск, 1975.
3. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.
4. **Sih G. C., Embley G. T., Ravera R. S.** Impact response of a finite crack in plane extension.— «Int. J. Solids and Struct.», 1972, vol. 8, N 7.
5. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1963.
6. **Разрушение.** Математические основы теории разрушения. Т. 2. М., «Мир», 1975.
7. **Сирунян В. Х.** Цилиндрическая трещина в упругом пространстве.— «Изв. АН АрмССР», 1974, № 4.