

О НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ МИКРОПОЛЯРНЫХ ВЯЗКО-УПРУГИХ СРЕД

А. Т. Листров, Ю. А. Шуринов

(Воронеж)

Построены модели вязко-упругих микрополярных сред, обобщающие модели Пойнтинга — Томсона, Джеффриса — Лесерсича, Бюргерса — Миндлина [2, 3] на случай, когда среда обладает микроинерцией.

Обобщенные микрополярные модели Максвелла и Фойгта рассмотрены в работе [4].

Рассматриваемые модели могут быть использованы для описания механического поведения суспензий, коллоидных растворов, бетонов и т. д. Исследуется распространение малых сдвиговых возмущений в неограниченной среде.

Построены графики зависимости скорости распространения и коэффициента затухания периодических волн от частоты возмущений для каждой из рассматриваемых моделей. Вычисления выполнены на ЭВМ М-220.

Полученные результаты позволяют сделать ряд выводов о влиянии релаксации и упругого последствия сред на скорость распространения и затухание сдвиговых волн при наличии микроинерции и моментных напряжений.

1. Теория линейной микрополярной вязко-упругости основана на следующих уравнениях сохранения массы, изменения количества движения, момента количества движения и энергии для микрополярных сред[1]:

$$\begin{aligned} \rho' + (\rho v_k)_{,k} &= 0, & t_{kl,k} + \rho(f_l + v_i) &= 0 \\ m_{rk,r} + \varepsilon_{klr} t_{lr} + \rho(l_k - jv_k) &= 0 & (k, l, r = 1, 2, 3) \\ \rho e' &= t_{kl} d_{lk} + \varepsilon_{klr} t_{kl} (\omega_r - v_r) + m_{kl} v_{l,k} + q_{k,k} + \rho h \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь ρ — массовая плотность, v_k — вектор скорости точки континуума, ω_k — вектор, характеризующий среднюю угловую скорость вращения частиц, из которых состоит точка континуума, v_k — вектор скорости микровращения частицы, f_k — вектор массовой силы, l_k — вектор массового момента, q_k — вектор теплового потока, h — тепловой источник, e — внутренняя удельная энергия, j — среднее значение момента инерции, t_{kl} , m_{kl} — тензоры силового и моментного напряжения соответственно, ε_{klr} — единичный псевдотензор.

В линейной теории точка над индексом обозначает частную производную по времени. Векторы перемещений u_k и микровращения φ_k удовлетворяют следующим кинематическим соотношениям

$$v_k = u_{k,\dot{}} \quad v_k = \varphi_{k,\dot{}} \quad 2\omega_k = \varepsilon_{klr} v_{r,l}, \quad 2d_{kl} = (v_{k,l} + v_{l,k})$$

Определяющие реологические уравнения микрополярной вязко-упругости для девиаторных и шаровых частей тензоров в операторной форме [1] имеют вид

$$\begin{aligned} Pp &= Q\varepsilon, & R t_{kl}^\circ &= S \varepsilon_{kl}^\circ + T \varepsilon_{lk}^\circ, & t_{kl} &= -p \delta_{kl} + t_{kl}^\circ \\ P'm &= Q'\varphi, & R' m_{kl}^\circ &= S' \varphi_{k,l} + T' \varphi_{l,k}, & m_{kl} &= m \delta_{kl} + m_{kl}^\circ \\ \varepsilon_{kl} &= -\varepsilon \delta_{kl} + \varepsilon_{kl}^\circ, & 3p &= -t_{rr}, & 3m &= m_{rr} \\ \varphi_{k,l} &= \varphi \delta_{kl} + \varphi_{k,l}^\circ, & 3\varepsilon &= -\varepsilon_{rr}, & 3\varphi &= \varphi_{r,r}, & \varepsilon_{kl} &= u_{l,k} - \varepsilon_{klr} \varphi_r \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $P, P', Q, Q', R, R', S, S', T, T'$ — дифференциальные операторы вида

$$P \equiv \sum_{k=0}^n p_k \frac{\partial^k}{\partial t^k}, \quad P' \equiv \sum_{k=0}^n p'_k \frac{\partial^k}{\partial t^k}, \dots, \quad T' \equiv \sum_{k=0}^n t'_k \frac{\partial^k}{\partial t^k} \quad (1.3)$$

Из (1.2) следуют операторные уравнения для силовых и моментных напряжений;

$$\begin{aligned} R t_{kl} + 1/3 (P - R) t_{rr} \delta_{kl} &= 1/3 (Q - S - T) \varepsilon_{rr} \delta_{kl} + S \varepsilon_{kl} + T \varepsilon_{lk} \\ R' m_{kl} + 1/3 (P' - R') m_{rr} \delta_{kl} &= 1/3 (Q' - S' - T') \varphi_{r,r} \delta_{kl} + S' \varphi_{k,l} + T' \varphi_{l,k} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Введем для рассматриваемых реологических моделей [3] следующие обозначения; N — модель Ньютона, K — Кельвина — Фойгта, M — Максвелла, P — Пойнтинга — Томсона, J — Джеффриса — Лесерсича, B — Бюргерса — Миндлина.

Обобщенные модели, учитывающие микроинерцию, несимметричность тензора силовых напряжений и наличие моментных напряжений, будем обозначать теми же буквами со звездочкой, т. е. $N^*, \dots, B^*$.

Определяющие уравнения моделей $N, N^*, \dots, B, B^*$ получаются из общих операторных уравнений (1.4). Для этого достаточно в (1.3) ограничиться $n = 2$ и сделать соответствующие предположения о значениях коэффициентов $p_k, p'_k, \dots, t'_k$.

В (1.3) положим

$$\begin{aligned} n &= 2, \quad p_1 = p'_1 = r_0 = r'_0 = 1, \\ p_0 &= p'_0 = p_2 = p'_2 = q_0 = q'_0 = q_2 = q'_2 = 0 \end{aligned}$$

При этих предположениях уравнения (1.4) примут вид

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{3} \left[1 + (r_1 - 1) \frac{\partial}{\partial t} + r_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] t_{rr} \delta_{kl} + \left(1 + r_1 \frac{\partial}{\partial t} + r_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) t_{kl} = \\ & = - \frac{1}{3} (s_2 + t_2) \varepsilon_{rr} \delta_{kl} + s_2 \varepsilon_{kl} + t_2 \varepsilon_{lk} - \frac{1}{3} (s_1 - t_1 - q_1) \varepsilon_{rr} \delta_{kl} + \\ & + s_1 \varepsilon_{kl} + t_1 \varepsilon_{lk} - \frac{1}{3} (s_0 + t_0) \varepsilon_{rr} \delta_{kl} + s_0 \varepsilon_{kl} + t_0 \varepsilon_{lk} \\ & m_{kk} = q' \varphi_{k,k} \\ & - \frac{1}{3} \left[1 + (r'_1 - 1) \frac{\partial}{\partial t} + r'_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] m_{rr} \delta_{kl} + \left(1 + r'_1 \frac{\partial}{\partial t} + r'_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) m_{kl} = \\ & = - \frac{1}{3} (s'_2 + t'_2) \varphi_{r,r} \delta_{kl} + s'_2 \varphi_{k,l} + t'_2 \varphi_{l,k} - \frac{1}{3} (s'_1 - t'_1 - q'_1) \varphi_{r,r} \delta_{kl} + \\ & + s'_1 \varphi_{k,l} + t'_1 \varphi_{l,k} - \frac{1}{3} (s'_0 + t'_0) \varphi_{r,r} \delta_{kl} + s'_0 \varphi_{k,l} + t'_0 \varphi_{l,k}, \quad t_{kk} = q_1 \varepsilon_{kk}, \\ & m'_{kk} = q'_1 \varphi_{kk} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь $r_1, r'_1, \dots, t_2, t'_2$ — постоянные коэффициенты, характеризующие упругие и вязкие свойства сред.

Соотношения (1.5) содержат все определяющие уравнения рассматриваемых моделей.

Определяющие уравнения для любой из моделей $N, N^*, \dots, B, B^*$ формально можно получить из (1.5) при помощи следующей таблицы.

В строке этой таблицы полюсами указаны те коэффициенты, которые следует сохранить в уравнениях (1.5) для данной модели.

	r_1	r'_1	r_2	r'_2	s_0	t_0	s'_0	t'_0	s_1	t_1	s'_1	t'_1	s_2	t_2	s'_2	t'_2	q_1	q'_1
N^{*4}									+	+							+	+
N									+	+							+	+
K^{*5}					+	+	+	+	+	+	+	+					+	+
K					+	+			+	+							+	+
M^{*4}	+	+							+	+	+	+					+	+
M	+	+							+	+							+	+
P^{*4}	+	+			+	+	+	+	+	+	+	+					+	+
P	+	+			+	+			+	+							+	+
J^{*4}	+	+							+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
J	+	+							+	+			+	+			+	+
B^{*4}	+	+	+	+					+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
B	+	+	+	+					+	+			+	+			+	+

При этом для моделей N , K , M , P , J , B отличные от нуля, рядом стоящие в таблице, коэффициенты следует считать равными и, кроме того, в (1.2) положить $\varphi_r \equiv 0$.

2. Рассмотрим периодические сдвиговые волны в неограниченной среде

$$u = [u_1(x_2, t), 0, 0], \quad \varphi = [0, 0, \varphi_3(x_2, t)], \quad f_k = l_k = 0$$

$$u_1 = u_1^0 \exp[i(kx_2 + \omega t)], \quad k = \omega/c + i\xi$$

Здесь k — волновое число, c — скорость распространения волны ξ — коэффициент затухания, ω — угловая частота.

Дисперсионное уравнение для возмущений в микрополярных средах имеет вид

$$A_1 A_3 A_5 k^4 + (i\rho\omega^2 A_1^2 A_5 - iA_2 A_4 A_6 - iA_3 A_4 A_6 + \\ + i\rho j\omega^2 A_1 A_3 A_6) k^2 + 2\rho\omega^2 A_1 A_4 A_6 - \rho^2 j\omega^4 A_1^2 A_6 = 0, \\ A_6 = 1 - i\omega r_1' - \omega^2 r_2' \quad (2.1)$$

$$A_1 = 1 - i\omega r_1 - \omega^2 r_2, \quad A_2 = -\omega t_1 + i(\omega^2 t_2 - t_0),$$

$$A_3 = -\omega s_1 + i(\omega^2 s_2 - s_0)$$

$$A_4 = \omega^2(t_2 - s_2) - (t_0 - s_0) + i\omega(t_1 - s_1),$$

$$A_5 = -\omega t_1' + i(\omega^2 t_2' - t_0')$$

При численном решении уравнения (2.1) на ЭВМ М-220 были приняты в системе СИ следующие значения коэффициентов;

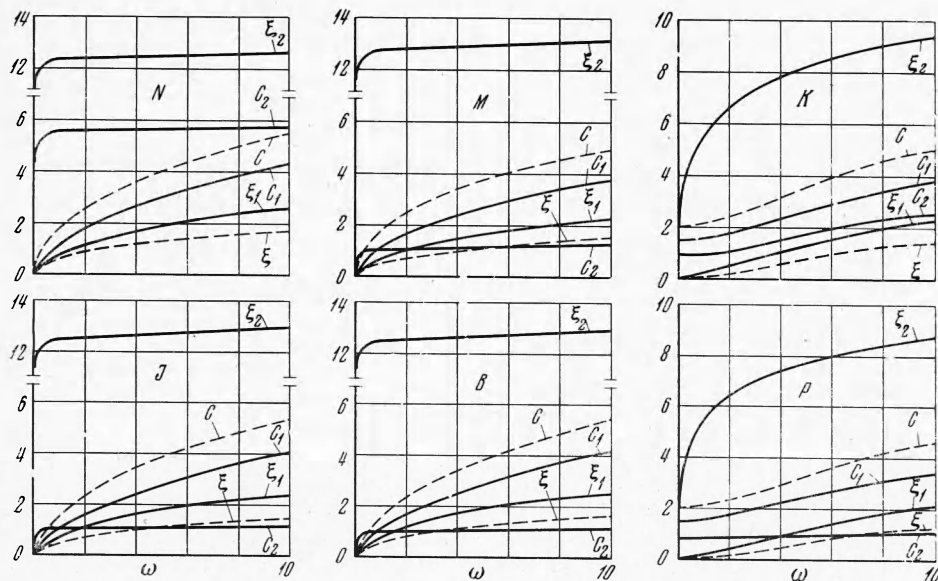
$$r_1 = 2 \cdot 10^{-2}, \quad r_2' = 10^{-4}, \quad s_0 = 4, \quad s_1 = 1.6, \quad t_2 = 10^{-3}, \quad \rho = 1 \\ r_2 = t_2' = 10^{-5}, \quad t_0 = t_1' = s_2 = 10^{-2}, \quad t_0' = t_1 = r_1' = 10^{-1}, \\ j = 5 \cdot 10^{-2}$$

Графики зависимостей $c(\omega)$ и $\xi(\omega)$ для моделей N , N^* , ..., B , B^* приведены на фигуре.

На оси абсцисс указаны значения ω , по оси ординат — значения коэффициентов затухания и скоростей распространения сдвиговых волн.

Скорость распространения и коэффициент затухания обычной волны сдвига у моделей N , K , M , P , J , B обозначены на графиках соответственно буквами c и ξ .

Отметим, что у микрополярных сред существуют две сдвиговые волны [4]: обычная сдвиговая волна, которая имеет скорость распространения



c_1 и коэффициент затухания ξ_1 , а также сдвиговая волна, обусловленная наличием моментных напряжений. Последняя имеет скорость распространения c_2 и коэффициент затухания ξ_2 .

На фигуре со знаком N показаны графики $c(\omega)$, $\xi(\omega)$ для модели N и графики $c_1(\omega)$, $\xi_1(\omega)$, $c_2(\omega)$, $\xi_2(\omega)$ для обобщенной модели N^* . Соответственно графики со знаками M , J , B , K , P относятся к обычным и обобщенным моделям Максвелла, Джеффриса — Лесерсича, Бюргерса — Миндлина, Кельвина — Фойгта и Пойнтинга — Томсона.

Из приведенной фигуры видно, что для всех рассмотренных микрополярных сред вторая сдвиговая волна имеет большой коэффициент затухания ξ_2 .

Из фигуры со знаком N следует, что в микрополярной жидкости N^* скорость распространения сдвиговой волны c_2 в рассматриваемом диапазоне частот больше скорости распространения c_1 обычной волны сдвига.

Из сравнения графиков видно, что наличие таких свойств, как релаксация напряжений и упругое последствие, у сред M^* , J^* , B^* , K^* связано с существенным уменьшением скорости распространения волны c_2 . При этом как упругое последствие, так и релаксация напряжений сред мало влияют на коэффициент затухания ξ_2 .

Отметим также, что для всех рассмотренных моделей учет микроинерции и моментных напряжений приводит к некоторому уменьшению скорости распространения обычной сдвиговой волны и увеличению ее коэффициента затухания.

Поступила 25 V 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Eringen A. C. Linear theory of micropolar viscoelasticity. Internat. J. Engng Sci, 1967, vol. 5, No 2, pp. 191—204.
2. Reiner M. Rheology. Berlin, Springer — Verlag., 1958, (Рус. перев.: Реология. М., «Наука», 1965).
3. Freudenthal A. M., Geiringer H. The mathematical theories of the inelastic continuum. Berlin, Springer — Verlag, 1958. (Рус. перев. Математические теории неупругой среды. М., Физматгиз, 1962).
4. Willson A. J. Basic flows of a micropolar liquid. Appl. Sci. Res., 1969, vol. 20, No. 5, pp. 338—355.