

УДК 550.834

Разностная схема для одномерных уравнений Максвелла

А.Ф. Мاستрюков

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук,
просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

E-mail: maf@omzg.ssc.ru

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 1, Vol. 13, 2020.

Мастрюков А.Ф. Разностная схема для одномерных уравнений Максвелла // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2020. — Т. 23, № 1. — С. 69–82.

В работе рассматривается разностная схема 2-го порядка аппроксимации для одномерных уравнений Максвелла с использованием преобразования Лагерра. В эту разностную схему вводятся дополнительные параметры. Эти параметры получаются минимизацией погрешности разностной аппроксимации уравнения Гельмгольца. Значения этих оптимальных параметров не зависят от шага и числа узлов разностной схемы.

Показано, что применение разложения Лагерра позволяет получить более высокую точность аппроксимации уравнений в сравнении с подобными же разностными схемами при использовании разложения Фурье.

Разностная схема 2-го порядка с параметрами сравнивалась с разностной схемой 4-го порядка в двух случаях. При решении задачи распространения электромагнитного импульса в неоднородной среде использование оптимальной разностной схемы дает точность решения, сравнимую с точностью решения разностной схемой 4-го порядка. При решении обратной задачи разностная схема 2-го порядка позволяет получить более высокую точность решения, чем разностная схема 4-го порядка. В рассмотренных задачах применение разностной схема 2-го порядка с дополнительными параметрами сокращало время счета задачи на 20–25 % в сравнении разностной схемой 4-го порядка.

DOI: 10.15372/SJNM20200105

Ключевые слова: конечно-разностный, оптимальный, точность, метод Лагерра, электромагнитные, система линейных уравнений, итерации.

Mastryukov A.F. The finite-difference scheme for one-dimensional maxwell’s equations // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2020. — Vol. 23, № 1. — P. 69–82.

This paper deals with a difference scheme of second order of approximation for one-dimensional Maxwell’s equations using the Laquerre transform. Supplementary parameters are introduced into this difference scheme. These parameters are obtained by minimizing the difference approximation error of the Helmholtz equation. The values of these optimal parameters are independent of the step size and the number of nodes in the difference scheme.

It is shown that application of the Laguerre decomposition allows obtaining a higher accuracy of approximation of the equations in comparison with similar difference schemes when using the Fourier decomposition.

The finite difference scheme of second order with parameters was compared to the difference scheme of fourth order in two cases.

The use of an optimal difference scheme when solving the problem of electromagnetic impulse propagation in an inhomogeneous medium yields the accuracy of the solution compatible with that of the difference scheme of fourth order.

When solving the inverse problem, the second order difference scheme makes possible to attain a higher accuracy of the solution as compared to the difference scheme of fourth order. In the considered problems, the application of the difference scheme of second order with supplementary parameters has decreased the calculation time of a problem by 20–25 per cent as compared to the fourth order difference scheme.

Keywords: *finite difference, optimal, accuracy, Laguerre method, electromagnetic, linear equations system, iterations.*

Введение

При численном решении дифференциальных уравнений используются как конечно-разностные методы, так и спектральные методы. Каждый из них имеет свои преимущества. Конечно-разностный метод прост в программной реализации и экономичен [1, 2]. Спектральный метод позволяет более эффективно решать задачи со сложной зависимостью параметров уравнений от времени, например в случае, когда электромагнитные параметры среды выражены в интегральной форме [3, 4]. Кроме этого, есть задачи, где необходимо рассмотрение электромагнитных или упругих волн на одной частоте, такие как частотное зондирование в геофизике [5].

Точности разностных схем 2-го порядка по шагу сетки недостаточно при численном решении некоторых задач, например, когда необходимо определить динамику волны на расстояния в несколько десятков или сотен длин волн. Тогда надо использовать разностные схемы более высокого порядка, чем второй. Есть и другие задачи, требующие высокой точности решения.

Разностные схемы 4-го порядка могут подойти для таких задач. Но матрица системы линейных алгебраических уравнений, к которой сводятся разностные уравнения, имеет большую плотность заполнения и лента этой матрицы оказывается широкой, что ведет к плохой обусловленности [6] этой матрицы и, соответственно, потери численной эффективности всего алгоритма и к большому времени счета. Необходимы разностные схемы, имеющие высокую точность, малую плотность заполнения матрицы и более компактные, т. е. имеющие узкие ленты матриц или хотя бы одно, или два из этих трех свойств. Кроме этого, для разностных схем 4-го порядка существенно сложнее, чем для разностных схем 2-го порядка, удовлетворять условиям на границе области решения. Поэтому были разработаны разностные схемы 2-го порядка аппроксимации, имеющие повышенную точность. Это достигалось введением дополнительных параметров в разностную схему. В работе [7] была предложена оптимальная разностная схема для решения волнового уравнения в спектральной области. В разностное уравнение 2-го порядка аппроксимации для заданной гармонике Фурье вводятся три дополнительных параметра. Значения этих параметров определяются минимизацией погрешности аппроксимации уравнения на точном аналитическом решении. Алгоритм рассматривается при равных пространственных шагах разностной сетки. Обобщение для неравных шагов разностной сетки было предложено в работе [8] введением средних значений в пространственные производные. В этом случае минимизация проводилась по 4-м параметрам.

Разностные схемы, содержащие дополнительные параметры, определяемые минимизацией погрешности аппроксимации уравнений, называются оптимальными. Такая терминология используется в целом ряде подобных работ [7–9].

В работах [10, 11] была предложена оптимальная разностная схема для решения двумерного волнового уравнения и двумерных уравнений Максвелла с использованием разложения Лагерра по временной переменной. В этом случае минимизация проводилась по трем дополнительным параметрам. Для аппроксимации уравнений использовались 9 точек разностной сетки.

Система уравнений для гармоник Лагерра содержит только действительные переменные. В ряде задач [12] метод Лагерра по эффективности в несколько раз превосходит метод Фурье.

В настоящей работе рассматривается численное решение одномерных уравнений Максвелла с использованием разностной схемы 2-го порядка в спектральной области с применением разложения Лагерра. Эта разностная схема содержит только один дополнительный параметр, значения которого определяются минимизацией погрешности аппроксимации уравнений. Разностная схема остается трехточечной, как и обычная разностная схема 2-го порядка.

Получены значения дополнительного параметра, которые являются универсальными и не зависят от шага разностной схемы.

Показано, что использование разложения Лагерра позволяет достичь более глубокой минимизации и, соответственно, более высокой точности аппроксимации уравнений в сравнении с подобными же разностными схемами, использующими разложение Фурье.

Показано, что разностная схема 2-го порядка аппроксимации с дополнительными параметрами дает точность решения уравнений, близкую к точности решения разностной схемой 4-го порядка аппроксимации.

Разностная схема с оптимальными параметрами использовалась также при численном решении обратной задачи определения электромагнитных параметров оптимизационным методом [13–15].

В этом случае оптимальные разностные схемы 2-го порядка не только эффективнее разностных схем 4-го порядка, но и позволяют достичь более высокой точности решения обратной задачи. Достичь более высокой точности удастся при учете спектра решения уравнений.

Этот метод построения разностных схем для одномерных уравнений легко распространяется на двумерные и трехмерные уравнения. Рассмотрение одномерных уравнений, как и многомерных, важно для решения различных практических задач геофизики, например задач электроразведки.

1. Постановка задачи

Уравнения Максвелла для электромагнитного поля [5, 16] имеют вид

$$\vec{\nabla} H = \frac{\partial D}{\partial t} + \sigma E + J_s, \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad (2)$$

где H — напряженность магнитного поля, $D = \varepsilon E$ — электрическая индукция, $J_s = (J_x, J_y, J_z)$ — ток внешнего источника, $E = (E_x, E_y, E_z)$ — напряженность электрического поля, $B = \mu H$ — магнитная индукция. Здесь ε — статическое значение диэлектрической проницаемости, σ — статическое значение проводимости, μ — статическое значение магнитной проницаемости. Будем полагать, что μ не зависит от пространственных координат.

В одномерном случае уравнения Максвелла (ТЕ-мода) принимают вид

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y + J_y, \quad (3)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_x}{\partial t}. \quad (4)$$

Полученную систему уравнений будем решать в области $[-L, L]$ по z при нулевых начальных и граничных условиях:

$$\begin{aligned} E_y(z, t = 0) = 0, & \quad H_x(z, t = 0) = 0, \\ E_y(z = -L, t) = 0, & \quad H_x(z = L, t) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Будем использовать преобразование Лагерра в виде

$$\phi_{n-} = \int_0^\infty \phi(t)(ht)^{-\alpha/2} l_n^\alpha(ht) d(ht), \quad (6)$$

$$\phi(t)_- = (ht)^{\alpha/2} \sum_{n=0}^\infty \frac{n!}{(n+\alpha)!} \phi_n l_n^\alpha(ht), \quad (7)$$

где $l_n^\alpha(ht)$ — ортогональная функция Лагерра [17], α — целая константа, h — параметр преобразования Лагерра.

В приведенных ниже расчетах преобразование Лагерра использовалось при $\alpha = 1$ и $h = 100$. Функция $l_n^\alpha(x)$ определена на промежутке $[0, \infty]$. Она является конечной величиной только на промежутке от 0 до $2(2n + \alpha + 1)$. Вне этой области ортогональные функции Лагерра экспоненциально малы:

$$l_n^\alpha(x) = a_n^\alpha x^{1/2} \exp\left(-\frac{x}{2}\right), \quad a_n^\alpha = \text{const.}$$

Применим к системе уравнений (3), (4) преобразование Лагерра. В результате получим следующую систему уравнений для n -й гармоники электромагнитного поля:

$$\frac{\partial H_{nx}}{\partial z} = \varepsilon \left(\frac{h}{2} E_{ny} + h \sum_{k=0}^{n-1} E_{ky} \right) + \sigma E_{ny} + J_{ny}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial E_{ny}}{\partial z} = \mu \left(\frac{h}{2} H_{nx} + h \sum_{k=0}^{n-1} H_{kx} \right). \quad (9)$$

Эту систему можно свести к уравнению Гельмгольца для электрического поля E_y . В однородной среде магнитное поле также будет удовлетворять уравнению Гельмгольца. В правую часть этого уравнения входят суммы младших гармоник.

Рассмотрим разностную аппроксимацию системы уравнений.

2. Аппроксимация уравнений

Определим магнитное поле H_{nx} в целых i узлах разностной сетки. Электрическое поле E_{ny} определим в промежуточных точках разностной сетки $i + 1/2$. Это сетка типа “staggered”.

Запишем уравнения (8), (9) в разностном виде, используя средние значения электрического поля \tilde{E}_n :

$$\frac{H_{ni+1} - H_{ni}}{\Delta z} = \left(\varepsilon \left(\frac{h}{2} \tilde{E}_n + h \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{E}_k \right) + \sigma \tilde{E}_n + J_{ny} \right)_{i+1/2}, \quad (10)$$

$$\frac{E_{ni+1/2} - E_{ni-1/2}}{\Delta z} = \mu \left(\frac{h}{2} H_{ni} + h \sum_{k=0}^{n-1} H_{ki} \right). \quad (11)$$

Здесь у гармоники магнитного поля H_{ni} опущен нижний индекс x , у гармоники электрического поля E_{ni} опущен нижний индекс y , а гармоники электрического поля в правой части первого уравнения системы заменены средним по трем точкам [7]:

$$\tilde{E}_{i+1/2} = cE_{i+1/2} + d(E_{i+3/2} + E_{i-1/2}), \quad (12)$$

где c, d — весовые множители, удовлетворяющие соотношению

$$c + 2d = 1 \quad \text{или} \quad d = (1 - c)/2.$$

Это разностная схема второго порядка точности по шагу сетки. Подберем введенные параметры c, d таким образом, чтобы такая аппроксимация была максимально точной для этих уравнений.

3. Выбор оптимальных параметров

Для однородной среды уравнения (8), (9) можно представить в виде уравнения Гельмгольца. Для нулевой гармоники магнитного поля $H = H_{0y}$, без учета источников, уравнение принимает простой вид

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = k_0^2 H, \quad k_0^2 = \mu \frac{h}{2} \left(\varepsilon \frac{h}{2} + \sigma \right). \quad (13)$$

Это уравнение на разностной сетке можно записать, применяя средние значения магнитного поля, аналогично тому, как это было сделано для среднего значения электрического поля (12) в предыдущем пункте:

$$\frac{H_{i+1} - 2H_i + H_{i-1}}{\Delta z^2} = k_0^2 (cH_i + d(H_{i+1} + H_{i-1})). \quad (14)$$

Уравнение (13) имеет точное решение

$$H = H_0 ch(k_0 z).$$

Подставим это решение в разностное уравнение (14). После простых преобразований получим соотношение вида $V^2(k) = 1$, где

$$V^2(k) = \frac{ch(k) - 1}{k^2 \left(\frac{c}{2} + d(ch(k)) \right)}, \quad k = k_0 \Delta z. \quad (15)$$

Будем искать параметры c и $d = (1 - c)/2$, требуя максимально точного выполнения соотношения $V^2(k) = 1$ в пределах допустимых значений k . Для этого будем минимизировать по параметру c величину

$$I(c) = \int_0^K (1 - V(k))^2 dk. \quad (16)$$

Пределы интегрирования — от $k = 0$ до $k = K$. Величина $k = k_0 \Delta z$ определяет отношение шага разностной сетки Δz к характерному размеру $1/k_0$ изменения решения. Поэтому брать значения K значительно больше единицы не имеет смысла по причине очевидной потери точности.

В таблице 1 приведены искомые значения параметров c и d для разных значений величины K . В третьей колонке указаны значения интеграла $I(c)$ при этих значениях параметров. Для заданного значения верхнего предела интегрирования K в выражении (16) значения этих параметров не зависят от шага разностной схемы и числа узлов

разностной схемы (14). Эти значения получены минимизацией величины $I(c)$ по параметру c методом Ньютона. В качестве начального приближения для параметра c взято значение, равное 1 ($d = 0$), что соответствует обычной схеме 2-го порядка аппроксимации. В табл. 1 приведены значения $I(c)$, нормированные на величину $I(1)$. При других начальных значениях приведенное значение c меняется только в 5-ом знаке. Это, как показали конкретные расчеты, несущественно. Достаточно учитывать четыре знака после запятой.

Таблица 1.

c	d	I	K
0.8335	0.0832	$1.805E-7$	0.2
0.8338	0.0830	$9.086E-7$	0.3
0.8342	0.0828	$2.847E-6$	0.4
0.8348	0.0825	$6.879E-6$	0.5
0.8391	0.0804	$1.007E-4$	1.0
0.8458	0.0770	$4.417E-4$	1.5
0.8544	0.0727	$1.147E-3$	2.0
0.8641	0.0679	$2.197E-3$	2.5

Таблица 2.

c	d	I	P	K
0.8330	0.0834	$1.822E-7$	32.25	0.2
0.8318	0.0840	$7.300E-6$	12.65	0.5
0.8271	0.0864	$1.278E-4$	6.28	1.0
0.8189	0.0905	$7.541E-4$	4.20	1.5
0.8064	0.0967	$2.969E-3$	3.14	2.0
0.7884	0.1057	$9.689E-3$	2.51	2.5

Минимальное значение величины $I(c)$ характеризует точность аппроксимации уравнения Гельмгольца. Чем меньше $I(c)$, тем выше точность аппроксимации оптимальной разностной схемой в сравнении с неоптимальной разностной схемой. Как видно из табл. 1, с ростом K минимально достижимое значение $I(c)$ растет, но оно всегда существенно меньше единицы.

Величина K определяет отношение шага разностной схемы к минимальному характерному размеру изменения решения. С ростом величины шага разностной схемы растет K и падает точность аппроксимации уравнений. Поэтому с ростом K следует ожидать падение точности решения уравнений.

Можно выполнить подобные расчеты таких параметров при использовании разложения Фурье. В формуле (16) $V(k)$ является функцией комплексного волнового вектора. Необходимо найти значения параметров при всех допустимых значениях как мнимой, так и действительной части волнового вектора, т. е. в интеграле (16) для метода Фурье необходимо вычислять двойной интеграл по действительной и мнимой части волнового вектора. Значения параметра c здесь удастся найти только для очень малых величин мнимой части волнового вектора и только в простом случае заданного поглощения, т. е. при $\sigma = \text{const}$.

В табл. 2 приведены значения c , d , $I(c)$ в случае отсутствия поглощения, т. е. при $\sigma = 0$. Здесь надо отметить быстрое падение точности аппроксимации (рост $I(c)$) с ростом верхнего предела интегрирования K в формуле (16). В четвертом столбце табл. 2 приведено значение числа точек сетки на длину волны $P = \lambda/\Delta z$, $k = k_0\Delta z$, $k_0 = 2\pi/\lambda$, где λ — длина волны. Из сравнения таблиц 1 и 2 видно, что минимальные значения $I(c)$ для разложения Фурье превышают аналогичные значения для разложения Лагерра. При $K = 1.5$ разница составляет 1.5–2 раза, а при $K = 2.5$ разница достигает 4–5 раз.

Отсюда следует, что оптимальные разностные схемы, использующие разложение Лагерра, должны давать более высокую точность, чем подобные разностные схемы, использующие разложение Фурье, в сравнении с их неоптимальными аналогами. Как уже

отмечалось, при вычислении параметров в методе Лагерра, в отличие от метода Фурье, нет ограничений на величину поглощения, в данном случае на величину проводимости среды.

Отметим, что при стремлении K к нулю, значения параметров в обеих таблицах стремятся к одним и тем же значениям $d = 1/12 \simeq 0.08333$, $c = 1 - 2d$. Эти значения соответствуют известной компактной трехточечной схеме, имеющей четвертый порядок аппроксимации. Но малые значения K соответствуют слабо меняющимся решениям. В пределе, $K = 0$, решением является просто константа. Естественно, наибольший интерес представляют решения во всем диапазоне значений K .

Разностная схема с дополнительными параметром (10) сравнивалась с пятиточечной разностной схемой 4-го порядка. Оценивалась точность решений уравнений, полученных при использовании этих двух схем, и их эффективность.

На рисунке 1 показано прохождение электромагнитной волны (H_x) через слой, находящийся в однородном пространстве. Штриховая линия показывает решение, полученное обычной ($c = 1$, $d = 0$) разностной схемой 2-го порядка, сплошная линия показывает решение, полученное разностной схемой 4-го порядка. Точками схематически показано расположение слоя. Шаг разностной сетки $\Delta z = 0.04$, границы индексов разностной сетки изменяются от $i = 0$ до $i = 900$.

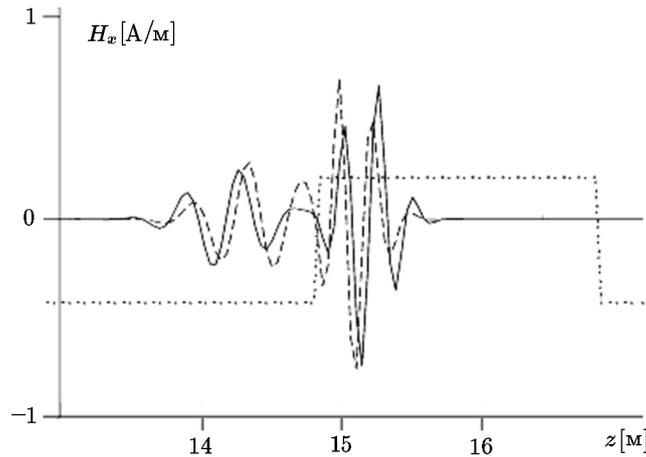


Рис. 1.

На этом же рисунке приведено решение оптимальной разностной схемой. Оно совпадает с решением 4-го порядка с точностью до 3-го знака, поэтому на рисунке они неразличимы. Видно, что разностная схема 2-го порядка с параметрами дает точность, близкую к точности решения разностной схемой 4-го порядка аппроксимации.

Источник тока здесь брался в виде

$$J_y = f(t)\delta(z - z_s), \quad (17)$$

$$f(t) = J_0 \exp\left(-\frac{(2\pi f_0(t - t_0))^2}{\gamma^2}\right) \sin(2\pi f_0(t - t_0)), \quad (18)$$

где f_0 — несущая частота источника, t_0 — момент центра импульса источника, z_s — точка расположения источника.

Точность решения оценивалось по величине относительной погрешности решения D , которая определялась выражением вида

$$D(t) = \frac{\int_0^\infty |H_x(z, t) - H_{0x}(z, t)| dz}{\int_0^\infty |H_{0x}(z, t)| dz}, \quad (19)$$

здесь H_x — решение, полученное с использованием оптимальных параметров, H_{0x} — решение уравнений (3), (4) с использованием разностной схемы 4-го порядка точности.

Для проверки точности применялся как спектральный метод Лагерра, так и конечно-разностный метод по времени и пространству 4-го порядка аппроксимации.

В этом случае система уравнений (3), (4) заменой переменных сводилась к системе уравнений волнового типа. В них пространственные производные находятся в правых частях. Эти уравнения записываются в виде обыкновенных дифференциальных уравнений. Запись уравнений в таком виде [18] позволяет строить разностные схемы высокого порядка точности по времени, как обычно это делается для обыкновенных дифференциальных уравнений. Такие конечно-разностные методы относятся к числу наиболее точных и наиболее эффективных.

Разностная схема (10), (11) содержит один независимый параметр s . Можно записать эту схему в виде системы алгебраических уравнений. Матрица этой системы будет иметь ленточный вид. Ширина ленты этой матрицы будет уже ширины ленты матрицы для разностной схемы 4-го порядка, не содержащей дополнительного параметра. При прямом методе решения системы линейных алгебраических уравнений, как правило, сокращение ширины ленты сокращает число вычислительных операций. В данном случае разностная схема (10), (11) на 20–25 % эффективнее разностной схемы 4-го порядка при сравнимой точности решения.

Отметим, что подобная методика построения разностных схем легко распространяется на двумерные и трехмерные задачи. Это протестировано для двумерных уравнений Максвелла. Здесь в разностную схему вводятся три дополнительных параметра, что ведет к увеличению ширины ленты матрицы в сравнении с обычной разностной схемой 2-го порядка.

Использование эффективных и точных методов решения прямых задач важно при численном решении обратных задач оптимизационным методом. В этом случае необходимо многократное решение прямой задачи. Зачастую эффективность численного решения прямой задачи на 90 % определяет эффективность решения обратной задачи. Это может происходить при использовании градиентных методов оптимизации, где требуется как многократное решение прямой задачи, так и его высокая точность. Поэтому разностная схема (10), (11) применялась для определения электромагнитных параметров слоистой среды. Результаты сравнивались с решением, полученным разностной схемой 4-го порядка.

4. Определение электромагнитных параметров

Будем рассматривать задачу определения проводимости и диэлектрической проницаемости слоистой среды при параметрах, характерных для задач геофизики.

Пусть в пространстве область $z < 0$ — однородное полупространство, а область $0 \leq z \leq L$ — слоистая среда, состоящая из P_0 горизонтально-однородных слоев. Ниже P_0 -го слоя полупространство однородно. В точке $z = z_s$ расположен точечный источник тока J_s . Магнитная проницаемость среды μ известна во всем пространстве.

Пусть на поверхности $z = 0$ известно N гармоник электромагнитного поля $E_{pn} = E_{ny}(z = 0)$ и $H_{pn} = H_{nx}(z = 0)$, соответствующие проводимости $\sigma_p(z)$ и диэлектрической проницаемости $\varepsilon_p(z)$. По этим значениям поля необходимо определить параметры $\sigma_p(z)$, $\varepsilon_p(z)$ на промежутке от $z = 0$ до $z = L$. Толщина слоев полагается неизвестной.

Определим величину

$$F = \sum_{n=1}^N |E_n - E_{pn}|^2 + |H_n - H_{pn}|^2, \quad (20)$$

где $E_n = E_{ny}(z = 0)$, $H_n = H_{nx}(z = 0)$ — решение уравнений (8), (9) для некоторых распределений параметров $\sigma(z)$, $\varepsilon(z)$.

Пусть функционал $F = F(m)$ является функцией P переменных $m = (m_1, m_2, \dots, m_p)$. В нашем случае этой переменной будет проводимость или диэлектрическая проницаемость слоистой среды. Будем искать значения параметра $m = (m_1, m_2, \dots, m_p)$, минимизируя функционал F по P компонентам этого параметра. Для минимизации функционала будем использовать метод Ньютона.

Разложение функционала F в точке m в ряд Тейлора по приращению Δm запишется в виде

$$F(m + \Delta m) = F(m) + \nabla F(m)\Delta m, \quad \Delta m = (\Delta m_1, \Delta m_2, \dots, \Delta m_p).$$

Метод Ньютона в этих обозначениях имеет следующий вид [14, 15]:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^l &= \mathbf{m}^l + \alpha^l \Delta \mathbf{m}^l, \\ \Delta \mathbf{m}^l &= H^{-1} \nabla F(\mathbf{m}^l), \\ \alpha^l &= \operatorname{argmin}(F(\mathbf{m}^l + \alpha \Delta \mathbf{m}^l)), \\ F^l &= F(\mathbf{m}^l). \end{aligned} \quad (21)$$

Представим систему уравнений (8), (9) в виде

$$\frac{du}{dz} = f(u, m). \quad (22)$$

Тогда первую производную функционала можно вычислить по формуле

$$\delta F = \int_0^L (f_m^* \phi, \delta m) dz, \quad (23)$$

где ϕ есть решение сопряженного уравнения

$$\frac{d\phi}{dz} - f_u^* \phi = \delta(z). \quad (24)$$

Вторую производную функционала и, соответственно, матрицу вторых производных H будем вычислять, используя (22)–(24) по методу, изложенному в [14].

Сократить число численных операций можно, используя многоуровневый метод решения задачи. Идея многоуровневого алгоритма состоит в использовании разного числа компонент P параметра m на различных этапах решения задачи. Подобный алгоритм известен в численных методах решения дифференциальных уравнений как метод решения на последовательности сеток или многосеточный метод [19]. В приложении к обратным задачам он подробно изложен в работах [12, 20].

Для оценки точности решения использовалась относительная невязка решения:

$$Q = \frac{\int_0^L |\sigma(z) - \sigma_p(z)| dz}{\int_0^L \sigma_p dz}, \quad R = \frac{\int_0^L |\varepsilon(z) - \varepsilon_p(z)| dz}{\int_0^L \varepsilon_p dz}. \quad (25)$$

Все приводимые ниже результаты получены при значительно большем числе шагов итераций относительно величины P . Для численного решения уравнений системы (3), (4) использовалась разностная схема (10), (11).

На рис. 2 показаны результаты определения проводимости слоистой среды по данным электромагнитного поля на поверхности с разбиением алгоритма решения на четыре уровня. На рисунке приведены распределения $\sigma(z)$ на двух последних уровнях (на рис. 2а число определяемых переменных $P = 27$, на рис. 2б $P = 55$).

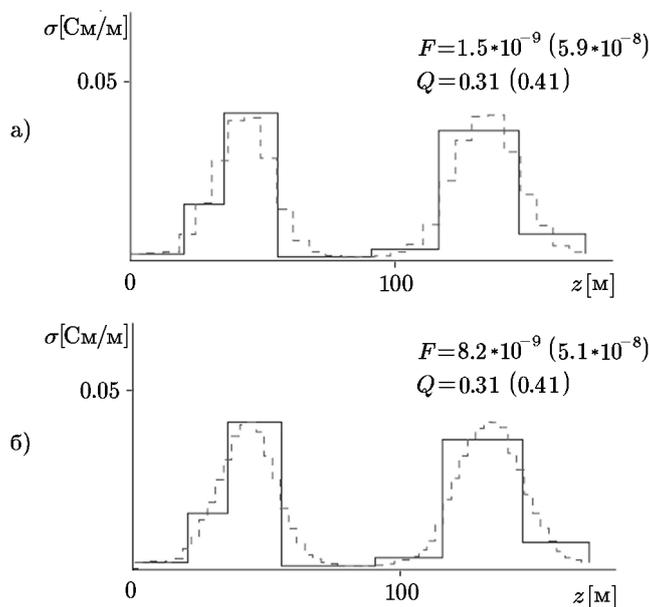


Рис. 2.

Сплошная линия соответствует истинным значениям проводимости, штрихованная линия — значениям проводимости, полученным численно с использованием оптимальной схемы, после 300 шагов итераций методом Ньютона. На рисунках указаны величина функционала и погрешность Q . В скобках указаны эти параметры в случае использования разностной схемы 4-го порядка. Хотя величины функционалов для двух разностных схем различаются менее чем на порядок, погрешности различаются на 20 %.

Эти результаты получены для низкой частоты источника электромагнитных волн, когда можно пренебречь в уравнения Максвелла током смещения [5, 16]. Распространение волн при этом носит диффузионный характер.

На рис. 3 показаны результаты определения диэлектрической проницаемости слоистой среды по данным электромагнитного поля на поверхности с разбиением алгоритма решения на три уровня. На рисунке приведены распределения относительной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(z)/\varepsilon_0$ на двух последних уровнях, где ε_0 — абсолютная диэлектрическая проницаемость среды [5, 16]. На рис. 3а число определяемых переменных $P = 15$, на рис. 3б $P = 31$. Эти результаты получены для высокой частоты источника

электромагнитных волн, когда можно пренебречь в уравнения Максвелла током проводимости [5, 16].

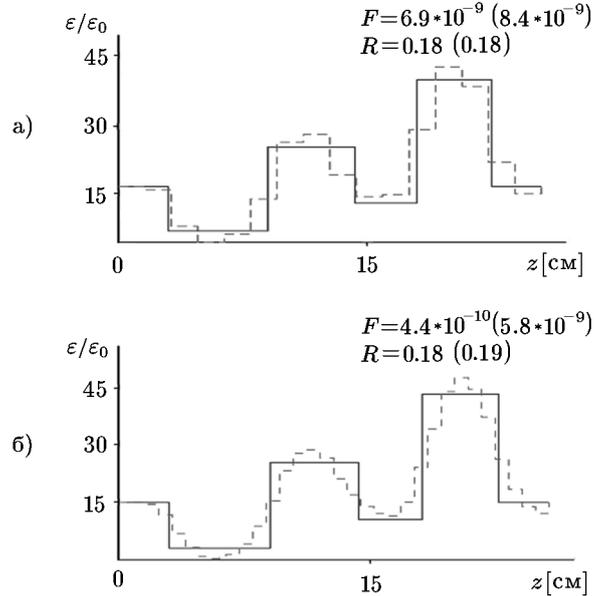


Рис. 3.

Как и на предыдущем рисунке сплошная линия соответствует истинным значениям диэлектрической проницаемости, штрихованная линия соответствует значениям, полученным численно с использованием оптимальной схемы, после 400 шагов итераций методом Ньютона. На рисунках указаны величина функционала F и погрешность R . В скобках указаны эти параметры в случае использования разностной схемы 4-го порядка.

При значении параметра $c = 0.8641$, полученного при максимальной величине верхнего предела $K = 2.5$ в формуле (16), точность восстановления электромагнитных параметров для этих двух разностных схем отличается менее чем на 5–10%. Значения функционала F по порядку величины совпадают.

Но среди возможных значений c всегда находится такое, при котором точность решения обратной задачи оптимальной разностной схемой выше чем точность решения разностной схемой 4-го порядка. Разница в значениях функционала F может достигать в 10–15 раз. Такой случай приведен на рис. 3б. Здесь параметр $c = 0.8348$ получен при $K = 0.5$. Но точность решения, оцениваемая по формулам (25) для этих двух схем, здесь мало отличается.

Время решения задачи разностной схемой (10), (11) на 20–25% меньше чем разностной схемой 4-го порядка во всех вариантах расчетов обратной задачи.

В приведенных расчетах минимальная величина функционала достигает значения $10^{-8} - 10^{-10}$. Для достижения еще меньших значений необходима высокая точность решения прямой задачи.

Можно пытаться повысить точность разностной схемы 4-го порядка введением дополнительных параметров, как это сделано выше с использованием (10), (11) для разностной схемы 2-го порядка. Однако проведенные расчеты с использованием такой схемы 4-го порядка не дали более точного решения обратной задачи.

5. Заключение

Рассматривается разностная схема 2-го порядка аппроксимации с дополнительными параметрами. Эти параметры определяются минимизацией погрешности аппроксимации уравнения Гельмгольца.

Значения оптимальных параметров являются универсальными для уравнений и не зависят от шага разностной схемы.

Применение разложения Лагерра позволяет получить более высокую точность аппроксимации уравнений в сравнении с подобными же разностными схемами при использовании разложения Фурье.

При решении задачи распространения электромагнитного импульса в неоднородной среде использование оптимальной разностной схемы дает точность решения, сравнимую с точностью решения при использовании разностной схемы 4-го порядка.

При решении обратных задач, используя оптимальные параметры разностной схемы, можно получить высокую точность решения, оцениваемую по величине функционала.

В рассмотренных задачах применение разностной схемы 2-го порядка с дополнительными параметрами сокращало время счета задачи на 20–25 % в сравнении с разностной схемой 4-го порядка.

Литература

1. **Bergmann T., Robertsson J.O.A., Holliger K.** Finite-difference modeling of electromagnetic wave propagation in dispersive and attenuating media // *Geophysics*. — 1998. — Vol. 63, № 3. — P. 856–867.
2. **Bergmann T., Blanch J.O., Robertsson J.O.A., Holliger K.** A simplified Lax–Wendroff correction for staggered-grid FDTD modeling of electromagnetic wave propagation in frequency-dependent media // *Geophysics*. — 1999. — Vol. 64, № 5. — P. 1369–1377.
3. **Luebbers R., Hansberger F.P.** FDTD for Nth-order dispersive media // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. — 1992. — Vol. 40, № 11. — P. 1297–1301.
4. **Turner G., Siggins A.F.** Constant Q attenuation of subsurface radar pulses // *Geophysics*. — 1994. — Vol. 59, № 8. — P. 1192–1200.
5. *Электроразведка. Справочник геофизика* / А.Г. Тархов. — М.: Недра, 1980.
6. **Голуб Дж., Ван Лоун Ч.** Матричные вычисления. — М.: Мир, 1999.
7. **Jo C.-H., Shin C., Suh H.S.** An optimal 9-point, finite-difference, frequency-space, 2-d scalar wave extrapolator // *Geophysics*. — 1996. — Vol. 61, № 2. — P. 529–537.
8. **Chen J.B.** An average derivative optimal scheme for frequency-domain scalar wave equation // *Geophysics*. — 2012. — Vol. 77, № 6. — P. T201–T210.
9. **Tam C.K., Webb J.C.** Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics // *J. of Computational Physics*. — 1993. — Vol. 107. — P. 262–281.
10. **Мастрюков А.Ф.** Оптимальные разностные схемы для волнового уравнения // *Сиб. журн. вычисл. математики* / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 4. — С. 385–399.
11. **Мастрюков А.Ф., Михайленко Б.Г.** Оптимальные разностные схемы для уравнений Максвелла при решении прямых задач электромагнитных зондирований // *Геология и геофизика*. — 2015. — № 9. — С. 1713–1722.
12. **Мастрюков А.Ф.** Решение обратной задачи для уравнения диффузии на основе спектрального преобразования Лагерра // *Математическое моделирование*. — 2007. — Т. 19, № 9. — С. 15–26.

13. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979.
14. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978.
15. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1980.
16. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.
17. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. — М.: Наука, 1979.
18. Ghrist M., Fornberg B., Driscoll T.A. Staggered time integrator for wave equations // SIAM J. Numer. Anal. — 2000. — Vol. 38, № 3. — P. 718–741.
19. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. — М.: Мир, 2001.
20. Мастрюков А.Ф. Определение коэффициента диффузии // Математическое моделирование. — 2015. — Т. 27, № 1. — С. 16–32.

Поступила в редакцию 21 декабря 2018 г.

После исправления 9 февраля 2019 г.

Принята к печати 15 октября 2019 г.

Литература в транслитерации

1. Bergmann T., Robertsson J.O.A., Holliger K. Finite-difference modeling of electromagnetic wave propagation in dispersive and attenuating media // Geophysics. — 1998. — Vol. 63, № 3. — P. 856–867.
2. Bergmann T., Blanch J.O., Robertsson J.O.A., Holliger K. A simplified Lax–Wendroff correction for staggered-grid FDTD modeling of electromagnetic wave propagation in frequency-dependent media // Geophysics. — 1999. — Vol. 64, № 5. — P. 1369–1377.
3. Luebbers R., Hansberger F.P. FDTD for Nth-order dispersive media // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 1992. — Vol. 40, № 11. — P. 1297–1301.
4. Turner G., Siggins A.F. Constant Q attenuation of subsurface radar pulses // Geophysics. — 1994. — Vol. 59, № 8. — P. 1192–1200.
5. Elektorazvedka. Spravochnik geofizika / A.G. Tarhov. — М.: Nedra, 1980.
6. Golub Dzh., Van Loun CH. Matrichnye vychisleniya. — М.: Mir, 1999.
7. Jo C.-H., Shin C., Suh H.S. An optimal 9-point, finite-difference, frequency-space, 2-d scalar wave extrapolator // Geophysics. — 1996. — Vol. 61, № 2. — P. 529–537.
8. Chen J.B. An average derivative optimal scheme for frequency-domain scalar wave equation // Geophysics. — 2012. — Vol. 77, № 6. — P. T201–T210.
9. Tam C.K., Webb J.C. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics // J. of Computational Physics. — 1993. — Vol. 107. — P. 262–281.
10. Mastryukov A.F. Optimal'nye raznostnye skhemy dlya volnovogo uravneniya // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2016. — Т. 19, № 4. — С. 385–399.
11. Mastryukov A.F., Mikhailenko B.G. Optimal'nye raznostnye skhemy dlya uravnenii Maksvella pri reshenii pryamyh zadach elektromagnitnyh zondirovaniy // Geologiya i geofizika. — 2015. — № 9. — С. 1713–1722.
12. Mastryukov A.F. Reshenie obratnoi zadachi dlya uravneniya diffuzii na osnove spektral'nogo preobrazovaniya Lagerra // Matematicheskoe modelirovanie. — 2007. — Т. 19, № 9. — С. 15–26.
13. Tihonov A.N., Arsenin V.Ya. Metody resheniya nekorrektnykh zadach. — М.: Nauka, 1979.
14. Fedorenko R.P. Priblizhennoe reshenie zadach optimal'nogo upravleniya. — М.: Nauka, 1978.
15. Vasil'ev F.P. Chislennyye metody resheniya ekstremal'nykh zadach. — М.: Nauka, 1980.

16. **Landau L.D., Lifshic E.M.** Elektrodinamika sploshnyh sred. — M.: Nauka, 1982.
17. Spravochnik po special'nyh funkciyam / M. Abramovic, I. Stigan. — M.: Nauka, 1979.
18. **Ghrist M., Fornberg B., Driscoll T.A.** Staggered time integrator for wave equations // SIAM J. Numer. Anal. — 2000. — Vol. 38, № 3. — P. 718–741.
19. **Demmel' Dzh.** Vychislitel'naya lineinaya algebra. — M.: Mir, 2001.
20. **Masteryukov A.F.** Opredelenie koefficienta diffuzii // Matematicheskoe modelirovanie. — 2015. — Т. 27, № 1. — S. 16–32.