

ТЕПЛОТДАЧА К КЛИНУ, ОБТЕКАЕМОМУ ГИПЕРЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ СИЛЬНО РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА

Ю. А. Кошмаров

(Москва)

Излагаются результаты приближенного анализа стационарной задачи о теплообмене острого тонкого ($\sin \theta \approx \theta < 1$), сильно охлаждаемого ($t_w \ll 1$) клина, обтекаемого гиперзвуковым ($M \gg 1$) потоком газа под нулевым углом атаки при почти свободно-молекулярном режиме. Установлены безразмерные параметры, от которых зависит теплоотдача; приводятся приближенные формулы для оценочных расчетов.

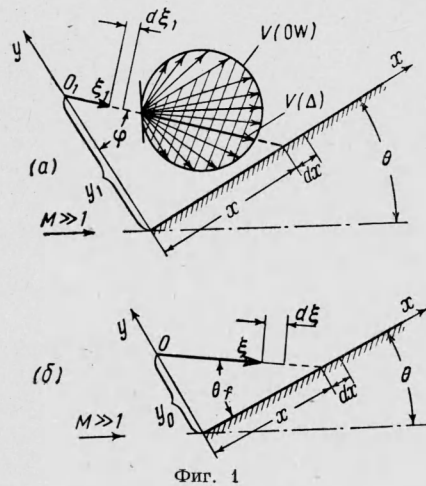
Настоящий анализ не является строгой количественной теорией и его результаты следует рассматривать как оценочные. Выводы анализа могут быть полезными для организации эксперимента и обобщения опытных данных. Использованный здесь метод аналогичен тому, который применялся в [1] при анализе обтекания пластины.

§ 1. Исходные положения и допущения.

Рассмотрение ведется в системе координат, связанной с клином (фигура). В силу симметрии потока относительно плоскости, делящей угол при вершине клина пополам, рассматривается только верхнее полупространство. Молекулы невозмущенного потока для краткости в дальнейшем называются О-молекулами. Молекулы, уходящие с поверхности клина (отраженные) и не испытавшие столкновений с молекулами других классов, называются W-молекулами. В результате столкновений О- и W-молекул образуются OW-молекулы. При столкновениях OW-молекул с О- и W-молекулами образуются молекулы вторичных столкновений. Рассмотрение ограничивается условиями, когда уже молекулы вторичных столкновений имеют малую вероятность попасть на клин, т. е. изучается теплообмен при режиме обтекания, когда следует учитывать лишь первые столкновения падающих и отраженных молекул.

Принимается, что W-молекулы образуют монокинетический пучок, нормально направленный от поверхности клина, а скорость молекул этого пучка $V(W)$ определяется температурой поверхности клина и соответствует условию полной аккомодации падающих на клин молекул. Принятое допущение можно рассматривать как грубую схематизацию диффузного отражения, согласно которому основная часть отраженных молекул движется от поверхности почти по нормали (в соответствии с законом косинуса). Предположение о полной аккомодации, видимо, будет отвечать многим практически интересным случаям. Однако, если это необходимо, неполную аккомодацию можно приближенно учесть специальным назначением величины скорости W-молекул.

При расчетах межмолекулярных столкновений предполагается, что молекулы газа являются идеально гладкими и упругими шариками одинаковой массы. Скорости молекул после столкновения определяются из законов соударения упругих шаров [2]. Кроме того, в силу неравенств $t_w \ll 1$ и $M \gg 1$, при расчетах вероятных скоростей OW-молекул принимается, что W-молекулы неподвижны, а О-молекулы движутся со скоростью невозмущенного потока V . В этом случае OW-молекулы рассеиваются из некоторой произвольной точки в соответствии с законом косинуса для значений скорости. Концы векторов вероятных скоростей OW-молекул $V(OW)$, проведенных из рассматриваемой точки пространства, образуют сферическую поверхность (фигура). Одна часть образовавшихся вблизи поверхности клина OW-молекул направляется к клину (фигура; заштрихованная часть векторной диаграммы), другая же уходит в пространство над клином. При определении энергии, приносимой к поверхности клина OW-молекулами, используются осредненные кинетические характеристики направляющихся к клину молекул. Осреднение сводится к тому, что поток OW-молекул, направляющихся к клину из рассматриваемой точки, заменяется монокинетическим пучком (лучом), скорость молекул в котором равна среднеквадратичной от вероятных скоростей, направленных к поверхности клина. Молекулы этого пучка в дальнейшем называются Δ -молекулами. Из геометрических соотношений и условия о том, что любая из скоростей OW-молекул, показанных на векторной диаграмме (фигура, а), равновероятна, вычисляется доля от общего числа образующихся в рассматриваемой



Фиг. 1

точке OW-молекул, приходящаяся на Δ -молекулы (δ); скорость Δ -молекул ($V(\Delta)$); угол между нормалью, опущенной из рассматриваемой точки к поверхности клина, и направлением скорости $V(\Delta)$ (угол φ)

$$\delta \approx \frac{1}{2}(1 + \theta), \quad V(\Delta) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} V \left(1 + \frac{\theta}{\pi}\right), \quad \varphi \approx \frac{\pi}{4} \quad (1.1)$$

Здесь θ — полуугол при вершине клина. При выводе формул (1.1) было использовано условие малости θ (считалось возможным пренебречь уже членами порядка θ^2 по сравнению с членами порядка единицы).

Число столкновений O- и W-молекул определялось на основе введения средней длины свободного пробега для W-молекул. Пучок W-молекул по мере удаления от поверхности клина ослабевает из-за столкновений W-молекул с S-молекулами, населяющими пространство над клином. Для рассматриваемых условий в пространстве над клином содержится ограниченное число классов, на которые можно разделить S-молекулы. Это, главным образом, — O-молекулы, OW-молекулы. Средняя длина свободного пробега W-молекул в атмосфере S-молекул определяется из формулы [3]

$$\lambda(W) = V(W) / \omega(S) F(WS) V(WS) \quad (1.2)$$

Здесь $\omega(S)$ — число S-молекул в единице объема; $V(WS)$ — величина средней относительной скорости W- и S-молекул перед столкновением; $F(WS)$ — поперечное сечение столкновений W- и S-молекул. В первом приближении числовая плотность S-молекул может быть принята постоянной, равной плотности в невозмущенном потоке, а относительная скорость $V(WS) \approx V$. Если считать, что поперечное сечение не зависит от относительной скорости сталкивающихся молекул, то с учетом сделанных замечаний из (1.2) следует

$$\lambda(W) \approx \lambda t_w^{1/2} \quad (1.3)$$

Если принять, что сечение столкновений обратно пропорционально относительной скорости сталкивающихся молекул [4], то из (1.2) следует

$$\lambda(W) \approx \lambda t_w^{1/2} M \quad (t_w = T_w/T_0) \quad (1.4)$$

Здесь T_w — температура поверхности клина (всюду одинакова); T_0 — температура адиабатного торможения потока; λ — средний свободный пробег молекул в невозмущенном потоке; M — число Маха в невозмущенном потоке. Количество W-молекул, выбывающих из монокинетического пучка из-за столкновений, в произвольной точке над поверхностью клина выражается через $\lambda(W)$ следующим образом [3]:

$$Q(W) = \frac{n(W)}{\lambda(W)} \exp \frac{y}{\lambda(W)} \quad (1.5)$$

Здесь $Q(W)$ — число выбывающих из W-класса молекул (т. е. число столкновений в единицу времени и в единице объема); $n(W)$ — число W-молекул, уходящих в единицу времени с единицы поверхности клина в точке x .

В соответствии с исходными условиями считается, что Δ -молекулы не испытывают столкновений с молекулами других классов.

При вычислениях числа O-молекул, достигших поверхности клина, используется метод фиктивного угла атаки [5]. Под фиктивным углом атаки θ_f понимается угол, при котором поток устремляющихся O-молекул со скоростью V из невозмущенной области к рассматриваемой площадке клина без учета тепловых скоростей будет равен потоку к этой площадке при свободномолекулярном обтекании с учетом тепловых скоростей O-молекул

$$\sin \theta_f = \sin \theta \left\{ \frac{1}{2} (1 + \operatorname{erf} \sqrt{1/2} \gamma M \sin \theta) + \frac{\exp(-1/2 M^2 \sin^2 \theta)}{\sqrt{2\pi} \gamma M \sin \theta} \right\} \quad (1.6)$$

§ 2. Количество O- и OW-молекул, падающих на клин. Рассмотрение баланса O-молекул в элементарном объеме ($1 \times d\xi$) на луче ξ , направленном под углом θ_f к произвольной элементарной площадке ($1 \times dx$) на поверхности клина (фигура, б), приводит к уравнению

$$V \frac{\partial \omega(O)}{\partial \xi} \approx -Q(W) \quad (2.1)$$

Здесь $\omega(O)$ — число O-молекул в единице объема. При составлении баланса предполагалось, в соответствии с постановкой задачи, что над поверхностью клина имеют место в основном столкновения O- и W-молекул.

Вычисление числа О-молекул, падающих на площадку ($1 \times dx$), сводится к интегрированию (2.1). Значение $n(W)$, входящее в $Q(W)$, является неизвестной функцией от ξ . В качестве достаточно хорошего первого приближения при вычислении числа О-молекул, достигающих площадки ($1 \times dx$), можно принять для рассматриваемых условий, что $n(W)$ равно тому значению, которое имеет место при свободномолекулярном обтекании [1]. Это допущение используется также при вычислении числа ОW-молекул, падающих на площадку ($1 \times dx$) (см. ниже). С учетом этого допущения и условия о том, что $d\xi = -dy / \sin \theta_f$, из (2.1) следует

$$\frac{n(O)}{n_m} = 1 + \int_{\beta_0}^{\theta} \exp(-\beta) d\beta = \exp(-\alpha \operatorname{tg} \theta_f)$$

$$\alpha = \frac{x}{\lambda(W)}, \quad \beta = \frac{y}{\lambda(W)}, \quad \beta_0 = \alpha \operatorname{tg} \theta_f \quad (2.2)$$

Здесь n_m — число молекул, падающих в единицу времени на единицу площади клина при свободномолекулярном обтекании; $n(O)$ — число О-молекул, падающих в единицу времени на единицу площади клина в точке x .

Рассмотрение баланса Δ -молекул в элементарном объеме ($1 \times d\xi_1$) на луче ξ_1 , направленном под углом φ к площадке ($1 \times dx$) на поверхности клина (фигура, а), приводит к уравнению

$$V(\Delta) \frac{\partial \omega(\Delta)}{\partial \xi_1} = 2Q(W) \delta \quad (2.3)$$

Здесь $\omega(\Delta)$ — числовая плотность Δ -молекул; $2Q(W)$ — общее число ОW-молекул, образующихся в единице объема около рассматриваемой точки пространства (число рождающихся ОW-молекул равно удвоенному числу столкновений О- и W-молекул). С учетом (1.1) из (2.3) вытекает

$$\frac{n(\Delta)}{n_m} \approx (1 + \theta) [1 - \exp(-\alpha)] \quad (2.4)$$

Здесь $n(\Delta)$ — число ОW-молекул, падающих на единицу площади клина.

Количество W-молекул, уходящих в точке x с единицы поверхности клина, можно теперь определить из условия

$$n(W) = n(O) + n(\Delta) \quad (2.5)$$

Найденное таким образом значение $n(W)$ может быть использовано для отыскания второго приближения для $n(O)$ и $n(\Delta)$.

§ 3. Теплоотдача к клину. Тепловой поток определяется разностью между энергией, приносимой О- и Δ -молекулами, и энергией, уносимой W-молекулами. Энергия одноатомных молекул суть кинетическая энергия их поступательного движения. Если молекулы двухатомные, то следует в общем случае учитывать внутреннюю энергию молекул. Для рассматриваемых условий ($M \gg 1$; $t_w \ll 1$) внутренняя энергия молекул, так же как и кинетическая энергия поступательного движения W-молекул, пренебрежимо малы по сравнению с кинетическими энергиями О- и Δ -молекул. С учетом сказанного и (1.1), (2.2), (2.4) для малых α и Z (настоящая теория верна при условии, что α и Z малы) можно получить следующие приближенные формулы:

$$\frac{q_x}{q_m} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(1 + \theta + \frac{2\theta}{\pi} - 2 \operatorname{tg} \theta_f \right) \alpha, \quad \frac{q}{q_m} \approx 1 + \frac{1}{4} \left(1 + \theta + \frac{2\theta}{\pi} - 2 \operatorname{tg} \theta_f \right) Z$$

$$\left(q = \frac{1}{l} \int_0^l q_x dx, \quad Z = \frac{l}{\lambda(W)} \right) \quad (3.1)$$

Здесь и далее q_m — удельный тепловой поток при свободномолекулярном обтекании; q_x — локальный удельный тепловой поток в клин; q — средний удельный тепловой поток; l — длина образующей клина. При $M\theta \gg 1$ из (3.1) с учетом (1.6) следует

$$\frac{q_x}{q_m} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\theta}{\pi} - \theta \right) \alpha, \quad \frac{q}{q_m} \approx 1 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2\theta}{\pi} - \theta \right) Z \quad (3.2)$$

При $M\theta \ll 1$ из (3.1) с учетом (1.6) и условия, что θ и $2\theta/\pi$ много меньше величины $1/M$ (это следует из неравенства $M\theta \ll 1$), вытекают формулы

$$\frac{q_x}{q_m} \approx 1 + \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{2}{\pi\gamma} \right)^{1/2} \frac{1}{M} \right] \alpha, \quad \frac{q}{q_m} \approx 1 + \frac{1}{4} \left[1 - \left(\frac{2}{\pi\gamma} \right)^{1/2} \frac{1}{M} \right] Z \quad (3.3)$$

При определении среднего свободного пробега W -молекул по формулам (1.3) и (1.4) соответственно будем иметь

$$\alpha = \frac{R_x}{M 1.255 \gamma^{1/2} t_w^{1/2}}, \quad Z = \frac{R}{M 1.255 \gamma^{1/2} t_w^{1/2}} = \left(\frac{\gamma-1}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{T}{T_w} \right)^{1/2} \frac{M}{K} \quad (3.4)$$

$$\alpha = \frac{R_x}{M^2 1.255 \gamma^{1/2} t_w^{1/2}}, \quad Z = \frac{R}{M^2 1.255 \gamma^{1/2} t_w^{1/2}} = \left(\frac{\gamma-1}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{T}{T_w} \right)^{1/2} \frac{1}{K}$$

$$\left(\gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad R = \frac{\rho V}{\mu}, \quad R_x = \frac{\rho x V}{\mu}, \quad K = \frac{\lambda}{l} \right) \quad (3.5)$$

Здесь ρ , T , μ — соответственно плотность, термодинамическая температура, вязкость газа в невозмущенном потоке; c_p и c_v — изобарная и изохорная теплоемкости. В заключение можно отметить: а) тепловые потоки при почти-свободномолекулярном гиперзвуковом обтекании клина могут заметно превышать те, которые следуют из теории свободномолекулярного обтекания (формулы (3.1) — (3.3)). Этот эффект при $M\theta \gg 1$ ослабляется с увеличением θ (формулы (3.2)), а при $M\theta \ll 1$ ослабляется с уменьшением M (формулы (3.3)); б) значения локальных и средних чисел Стантона при почти-свободномолекулярном обтекании зависят соответственно от α и Z (формулы (3.1) — (3.3)) и, кроме того, при $M\theta \gg 1$ — еще от θ (см. (3.2)), а при $M\theta \ll 1$ — еще от M (формулы (3.3)).

Результаты настоящего анализа согласуются с предсказаниями, сделанными в работе [4]. Интересно сравнить вторую формулу (3.3), справедливую в частном случае $M\theta = 0$, с результатами работы [5], в которой изучалась в более строгой постановке теплоотдача круглой пластинки при условиях, подобных рассматриваемым здесь, и была получена формула

$$\frac{q}{q_m} = 1 + 0.0725 \frac{M}{K} \left(\frac{T}{T_w} \right)^{1/2} \quad (3.6)$$

Если поперечное сечение столкновений молекул считать постоянным и $\gamma = 1.4$, то (3.3) примет вид

$$\frac{q}{q_m} \approx 1 + 0.111 \frac{M}{K} \left(\frac{T}{T_w} \right)^{1/2} \left[1 - \left(\frac{2}{\pi\gamma} \right)^{1/2} \frac{1}{M} \right] \quad (3.7)$$

При очень больших M вторым членом в квадратных скобках формулы (3.7) можно пренебречь, и тогда получается выражение, идентичное (3.6). Некоторое различие численных коэффициентов в (3.6) и (3.7) можно объяснить неточностями, обусловленными принятыми допущениями, а также тем, что в [5] рассматривалась круглая пластинка, а здесь — пластина бесконечного размаха. Выводы настоящей работы качественно подтверждаются результатами экспериментальных исследований [6]. (Данные [6] получены при больших значениях температурного фактора $t_w = 0.5-0.8$. Поэтому они могут быть привлечены здесь лишь для проверки качественных выводов.)

Поступила 10 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Charwat A. F. Molecular Flow Study of the Hypersonic sharp Leading Edge Interaction. Rarefied Gas Dynamics. Proceeding of the second International Symposium on Rarefied Gas Dynamics (ed. by L. Talbot), New York — London, 1961, p. 553—573.
2. Паттерсон Г. Н. Молекулярное течение газов. Физматгиз, 1960.
3. Kennard E. H. Kinetic theory of gases. McGraw — Hill, New York, 1938.
4. Коган М. Н. О гиперзвуковых течениях разреженного газа. ПММ, 1962, т. 26, вып. 3.
5. Перепухов В. А. Обтекание плоской пластинки, расположенной под нулевым углом атаки, потоком сильно разреженного газа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 3.
6. Кошмаров Ю. А., Горская Н. М. Теплообмен пластины в сверхзвуковом потоке разреженного газа. Инж. ж., 1965, т. 5, № 2.